Feuille d'exercices 2

1. Puissances d'une matrice. Suites définies par des récurrences linéaires

1.1. Notons $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les deux suites réelles définies par leur premier terme u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - v_n \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
2. Exprimer $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ en fonction de A et de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Diagonaliser la matrice A et en déduire A^n.
4. Donner l'expression générale de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur u_0 et v_0) pour que les suites (u_n) et (v_n) aient chacune une limite finie quand $n \to +\infty$. Lorsque cette condition est remplie, que peut-on dire de ces suites ?

1.2. Notons $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ces relations définissent un « système dynamique discret » dans $\mathbb{R}^2$. On se propose de représenter approximativement sur le plan Oxy la « trajectoire » déterminée par (x_0, y_0) :

$$T_{(x_0,y_0)} = \{\ (x_n, y_n) \mid n \geq 0\ \}$$

Pour visualiser cette trajectoire, on pourra tracer la ligne polygonale reliant les points (x_n, y_n) et l'orienter dans le sens croissant de n.

1. Vérifier que les valeurs propres de A sont $1/2$, $3/2$ et ses sous-espaces propres sont $E_{1/2} = \text{Vect}(\ (2,-1)\ )$, $E_{3/2} = \text{Vect}(\ (2,1)\ )$.
2. Soit $(x_0, y_0) \in E_{1/2}$, que vaut (x_n, y_n) ? Dessiner la droite $E_{1/2}$ et donner l'allure de $T_{(x_0,y_0)}$. Même étude si $(x_0, y_0) \in E_{3/2}$.
3. Soit maintenant $(x_0, y_0) = (6, 1)$. En écrivant $(6,1) = (2,-1) + (4,2)$ (les composantes de $(6,1)$ dans les espaces propres), déterminer (x_n, y_n). Donner l'allure de $T_{(6,1)}$ *(on pourra déterminer les modules des composantes de (x_n, y_n) dans les espaces propres).*
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (x_0, y_0) pour que les limites des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ soient infinies. *Indication : On pourra écrire $(x_0, y_0) = \alpha(2,-1) + \beta(2,1)$.*
   Montrer dans ce cas que, si $(x_0, y_0) \notin E_{3/2}$, alors la suite $(\ (x_n, y_n)\ )_{n\geq 0}$ tend asymptotiquement vers la droite $E_{3/2}$.
5. Dessiner l'ensemble des trajectoires du système.

1.3.

a) Donner toutes les suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire double (R) si $n \geq 2$.

b) Préciser la suite déterminée par les valeurs de u_0 et u_1 données.

Former l'équation caractéristique de la récurrence, calculer ses racines et appliquer la recette du cours

1. a) $(R) : u_n = u_{n-1} + 6u_{n-2}$. b) $u_0 = 1$, $u_1 = 5$.
2. a) $(R) : u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (suites de Fibonacci). b) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$.
3. a) $(R) : u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$. b) $u_0 = 5$, $u_1 = 6$.
4. a) $(R) : u_n = -u_{n-1} - u_{n-2}$. b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

Exercice supplémentaire

1.4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $b \neq 0$.

1. En écrivant $a + ib = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \,]0, 2\pi[$) donner l'interprétation géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice A. En déduire A^n en fonction de ρ et θ.
2. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

   Donner l'allure des trajectoires $T_{(x_0,y_0)} = \{ \ (x_n, y_n) \mid n \geq 0 \ \}$.
   Indication : la dynamique de ce système discret dépend de la valeur de ρ.

2. Formes quadratiques : méthode de Gauss. Extrema locaux des fonctions de plusieurs variables

2.1. Pour les formes quadratiques suivantes :

a) $Q(x, y) = x^2 - 6xy + 5y^2$

b) $Q(x, y) = xy$

c) $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$

d) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2yz$

e) $Q(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 + z^2 + 4xy - 6xz + 5yz$

f) $Q(x, y, z) = xy + 2xz - 3yz$

1. Utiliser la méthode de Gauss pour réduire Q.
2. Déterminer son rang et sa signature.
3. La forme quadratique Q est-elle positive ? négative ? définie positive ? définie négative ?

2.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 2xy + y - y^3$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en chaque point critique (x_0, y_0) de f.
   On pourra noter $f(x_0 + h, y_0 + k) = \cdots$.
3. Déterminer les extrema locaux de la fonction f.

2.3. Mêmes questions pour la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$.

2.4. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et préciser leur nature

a) $f(x, y) = x^2 - y^3$ b) $f(x, y) = y^2 + x^6$

Peut-on conclure à partir de l'étude du signe de la forme quadratique donnée par la formule de Taylor ?

3. Équations différentielles d'ordre 1

3.1. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(t, x) = 2tx^2$. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = F(t, x(t)) = 2tx^2(t) \tag{E}$$

1. Montrer que le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E) sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En déduire que toute autre solution maximale ne s'annule jamais.
2. Déterminer les solutions maximales de (E). Sont-elles globales ?
   Indication : l'équation (E) est à variables séparables. On montrera d'abord (avec la technique usuelle pour résoudre ce type d'équation) que les solutions maximales différentes de la solution nulle sont les fonctions
   $$x(t) = \frac{1}{\lambda - t^2}$$
   pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (famille de constantes) et tout $t \in I_\lambda$. Attention ! l'intervalle I_λ et la constante λ sont liés : on déterminera ensuite en fonction des valeurs de λ les intervalles I_λ correspondants.
3. Préciser les solutions maximales pour les conditions initiales $x(1) = 1$, $x(1) = -1$, $x(1) = -1/2$. Dessiner leurs graphes.
4. Donner l'allure des graphes des solutions maximales de (E) (on vérifiera ici le résultat du cours : *si le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique à une équation (E) sur le pavé $U \times \Omega$, alors les graphes des solutions maximales forment une partition de $U \times \Omega$*).

3.2. *Cet exercice est très proche de l'exemple de non unicité du problème de Cauchy étudié dans le Poly (Sect 5.3).* On considère l'équation différentielle définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$x'(t) = 4|x(t)|^{3/4} \tag{E}$$

1. Quelle est la monotonie des solutions de (E) ?
2. Montrer que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les solutions $x : I \to \mathbb{R}$ de (E) vérifiant $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$ (on donnera le plus grand intervalle I possible).
4. Même question avec $x(t) < 0$ pour tout $t \in I$.
5. Monter que les solutions trouvées dans 2. et 3. ne sont pas maximales en remarquant qu'on peut les raccorder à la solution nulle.
6. Montrer que le problème de Cauchy
   $$\begin{cases} x'(t) = 4|x(t)|^{3/4} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
   admet une infinité de solutions maximales.
   Préciser pourquoi le Th. de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas ici.

Les deux exercices qui suivent sont des « exercices-type » de résolution d'un problème de Cauchy (voir le modèle d'étude dans la Sect 5.6 du Poly). Vous trouverez d'autres exemples dans les annales.

3.3. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x'(t) = x(t)\,(1 - x(t)) \tag{E}$$

1. Justifier l'existence et unicité de solution maximale de tout Problème de Cauchy pour (E).
2. Déterminer les solutions maximales constantes de (E).
   En déduire la monotonie des autres solutions maximales.
3. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) vérifiant $0 < x(t_0) < 1$.
   Montrer qu'elle est bornée, en déduire grâce à un résultat du Cours qu'elle est globale ($I = \mathbb{R}$).
4. Soit $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(1 - x(t)) \\ x(0) \ = 2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $x_1(t) > 1$ pour tout $t \in I_1$.
   (b) Calculer
   $$\int_0^t \frac{x_1'(u)}{x_1(u)(1 - x_1(u))}\, du$$
   pour tout $t \in I_1$.
   (c) En déduire x_1 et I_1.

3.4. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x'(t) = 2t(e^{x(t)} - 1) \tag{E}$$

1. Justifier l'existence et unicité de solution maximale de tout Problème de Cauchy pour (E).
2. Déterminer les solutions maximales constantes de (E).
3. Soit $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t(e^{x(t)} - 1) \\ x(0) \ = \ln 2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $x_1(t) > 0$ pour tout $t \in I_1$. Étudier la monotonie de x_1.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{x_1'(u)}{e^{x_1(u)} - 1}\, du$ est bien définie pour tout $t \in I_1$, la calculer.
   On pourra remarquer que $\displaystyle\frac{x_1'(u)}{e^{x_1(u)} - 1} = \frac{e^{-x_1(u)}x_1'(u)}{1 - e^{-x_1(u)}}$.
   (c) Déterminer x_1 et I_1.

4. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On sait (Cours) que les solutions maximales d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont globales. Par la suite, le mot solution désignera toujours une solution globale.

4.1. Soit l'équation différentielle définie sur l'intervalle $]-1,\ 1\,[$ par

$$x'(t) = \frac{2}{1-t^2}x(t) + (1+t)e^t \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E). *On pourra remarquer que* $\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$.
2. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante.
3. Donner les solutions de (E).

4.2. On considère l'équation différentielle sur $]\,0,\ +\infty\,[$:

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2}\,x(t) - \frac{1}{t^3} \tag{E}$$

1. Calculer $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{s^3}\,e^{-1/s}\,ds$ pour $t \in\ ]\,0,\ +\infty\,[$.
   On pourra faire le changement de variable $u = -1/s$ et ensuite intégrer par parties.
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).