Université Paris – Saclay
Parcours élève ingénieur Polytech
2020 – 2021

Mathématiques S3

Notes de Cours

Chapitre 6 : Systèmes différentiels linéaires

José Montesinos
jose.montesinos@universite-paris-saclay.fr

Chapitre 6

Systèmes différentiels linéaires

Avant d'attaquer l'étude générale des systèmes différentiels linéaires du premier ordre en dimension n, nous traitons le cas $n = 1$, c'est-à-dire les équations différentielles linéaires d'ordre 1 (que vous connaissez déjà) : elles illustrent dans un cadre simple des résultats qui se généraliseront (principe de superposition, méthode de variation de la constante).

Un autre préalable s'impose : introduire les espaces vectoriels de fonctions.
Nous considérons aussi l'espace vectoriel des suites numériques et revenons brièvement sur les suites définies par une relation de récurrence linéaire double afin d'illustrer le principe de superposition dans ce contexte.

Nous étudions à la fin du chapitre les équations différentielles linéaires d'ordre n à partir du lien fondamental entre ces équations et les systèmes différentiels linéaires du premier ordre en dimension n.

6.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère maintenant les équations différentielles de la forme

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{E}$$

où a et b sont deux fonctions définies et **continues** sur un intervalle ouvert U.
L'équation s'écrit $x'(t) = F(t, x(t))$ avec F définie sur $U \times \mathbb{R}$ par

$$F(t, x) = a(t)x + b(t)$$

Comme F est continue sur $U \times \mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t, x) = a(t)$ l'est aussi, le Th. de Cauchy-Lipschitz (Th. 5.4.1) s'applique à (E) sur $U \times \mathbb{R}$. Par conséquent

> *Le **problème de Cauchy** pour* (E)
>
> $$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
>
> *où* $(t_0, x_0) \in U \times \mathbb{R}$*, admet une unique solution maximale.*

Remarque. Nous montrerons que les solutions maximales de (E) sont globales.

L'équation $z'(t) = a(t)z(t)$ est l'**équation homogène** associée à (E). Il s'agit d'une équation à variables séparables.

6.1.1 Le principe de superposition

La linéarité de l'équation est une propriété très utile. On a en particulier la

Proposition 6.1.1 *Soit $I \subset U$ un intervalle ouvert et $x_1 : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{E}$$

Toute solution x de (E) sur I s'écrit

$$x = x_1 + z$$

où z est solution sur I de l'équation différentielle homogène associée :

$$z'(t) = a(t)z(t) \tag{EH}$$

Démonstration : Toute fonction de la forme $x_1 + z$ est solution de (E) sur I.
Soit maintenant x une solution de (E) sur I. Pour tout $t \in I$, on a $x_1'(t) = a(t)x_1(t) + b(x)$ et $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. On a donc, par soustraction $x'(t) - x_1'(t) = a(t)(x(t) - x_1(t))$ et $z = x - x_1$ est bien solution de (EH) sur I. □

Autrement dit

Pour trouver toutes les solutions de (E) sur l'intervalle I, il suffit de

1. *Déterminer toutes les fonctions z solutions sur I de l'équation homogène associée.*
2. *Trouver une solution particulière quelconque x_1 de (E) sur I.*

Les solutions de (E) sur I sont alors les fonctions $x = x_1 + z$

6.1.2 Solutions de l'équation homogène associée

Proposition 6.1.2 *Soit a une fonction continue sur un intervalle $U \subset \mathbb{R}$.*
Les solutions maximales de l'équation

$$z'(t) = a(t)z(t) \tag{EH}$$

sont globales, et sont définies par $z : t \mapsto Ce^{A(t)}$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, et A est une primitive de a sur U, par exemple

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds\,,$$

avec $t_0 \in U$ fixé.

Démonstration : Il est d'abord très simple de vérifier que toute fonction de la forme $t \mapsto Ce^{A(t)}$ *est solution de* (EH) *sur* U. *Nous devons montrer que toute solution maximale est de cette forme.*
Soit maintenant $I \subset U$ *un intervalle ouvert fixé et* $z : I \to \mathbb{R}$ *une solution quelconque de* (EH). *Comme le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique et que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation, alors ou bien* $z \equiv 0$, *ou bien la fonction* z *ne s'annule jamais sur* I.
Dans ce dernier cas on peut séparer les variables et (EH) *s'écrit*

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t)$$

Fixons $t_0 \in I$ *et intégrons chacun des membres de cette égalité entre* t_0 *et* $t \in I$, *on obtient*

$$\ln|z(t)| - \ln|z(t_0)| = \int_{t_0}^{t} a(s)ds = A(t).$$

On a donc

$$|z(t)| = Ke^{A(t)},$$

où $K = e^{\ln|z(t_0)|} = |z(t_0)|$ *est une constante strictement positive.*
On doit donc avoir $z(t) = \epsilon(t)Ke^{A(t)}$ *où* $\epsilon(t) = \pm 1$, *pour tout* $t \in I$. *Mais puisque* z *est continue, la fonction* ϵ *est nécessairement constante sur* I, *et l'on obtient bien*

$$z(t) = Ce^{A(t)}$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$ *(si* $C = 0$ *on retrouve la solution nulle).*
On remarque enfin que la même expression donne le prolongement de $z : I \to \mathbb{R}$ *sur* U *tout entier.* □

6.1.3 Recherche d'une solution particulière : variation de la constante

Grâce au principe de superposition, il reste à trouver une solution particulière de l'équation (E). On peut utiliser la méthode dite de « variation de la constante ». L'idée est la suivante :

> *On cherche une solution* $x : I \to \mathbb{R}$ *de* (E) *sous la forme*
>
> $$x(t) = C(t)e^{A(t)},$$
>
> *où* C *est une fonction dérivable à déterminer, et* A *est une primitive de* a *sur* I
>
> *De manière un peu rapide, on dit que l'on fait varier la constante* C *qui apparaît dans l'expression de la solution de l'équation homogène associée à* (E).

Pour que cette fonction soit une solution, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} b(t) = x'(t) - a(t)x(t) &= C'(t)e^{A(t)} + a(t)C(t)e^{A(t)} - a(t)C(t)e^{A(t)} \\ &= C'(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$, c'est-à-dire

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

et il suffit donc de prendre pour $C(t)$ une primitive quelconque de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, par exemple

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds,$$

où $t_0 \in I$.

Il faut noter au passage que la solution x correspondante, donnée par

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\right) e^{A(t)}$$

se prolonge (par la même expression) en une solution de (E) sur U tout entier.

6.1.4 L'ensemble des solutions. Exemples de calcul

On a montré la

Proposition 6.1.3 *Soient a et f deux fonctions continues sur un intervalle U de $\mathbb{R}$. Les solutions maximales de l'équation*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{E}$$

sont globales (définies sur U) et données par

$$x(t) = \underbrace{\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\right) e^{A(t)}}_{\text{solution particulière de } (E)} \quad + \quad \underbrace{Ce^{A(t)}}_{\text{solution générale de } (EH)} \tag{1}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de a sur U (par exemple $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds$, avec $t_0 \in U$).

En effet, dans les trois sections précédentes nous avons montré que si $I \subset U$ est un intervalle fixé, alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est donné par l'expression (1) et que cette formule donne le prolongement des solutions sur U tout entier.

Exemple 1. Résoudre l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x'(t) = 5t^2x(t) + t^2 \tag{E}$$

L'équation homogène associée est

$$z'(t) = 5t^2z(t) \tag{EH}$$

Ici $a(t) = 5t^2$ et une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est $A(t) = \frac{5}{3}t^3$. Les solutions maximales de (EH) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$z(t) = Ce^{5/3t^3}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

On voit directement que $x(t) = -\frac{1}{5}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (employer la méthode de variation de la constante dans ce cas est un peu exagéré...).

Par conséquent, les solutions maximales de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = -\frac{1}{5} + Ce^{5/3t^3}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + \frac{1}{\ln^2 t} \tag{E}$$

L'équation homogène associée est

$$z'(t) = \frac{1}{t}z(t) \tag{EH}$$

Une primitive de $a(t) = \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est $A(t) = \ln t$ et les solutions maximales de (EH) sur cet intervalle sont les fonctions définies pour tout $t > 0$ par

$$z(t) = Ce^{\ln t} = Ct$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Utilisons la méthode de variation de la constante pour chercher une solution particulière globale de (E) sous la forme

$$x(t) = C(t)t$$

Une telle fonction sera solution globale de (E) si et seulement si

$$x'(t) = C'(t)t + C(t) = \frac{1}{t}C(t)t + \frac{1}{\ln^2 t}$$

pour tout $t > 1$, ce qui équivaut à

$$C'(t) = \frac{1}{t\ln^2 t}$$

Si l'on pose $u = \ln t$, alors $du = \frac{1}{t}dt$ et les primitives de $t \to \frac{1}{t\ln^2 t}$ sur $]1, +\infty[$ sont

$$\int \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + K = -\frac{1}{\ln t} + K$$

En particulier $C(t) = -\frac{1}{\ln t}$ convient et

$$x(t) = C(t)t = -\frac{t}{\ln t}$$

est une solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

Les solutions maximales de (E) sont donc les fonctions définies sur $]1, +\infty[$ par

$$x(t) = -\frac{t}{\ln t} + Ct$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

6.2 Espaces vectoriels

Voici la définition générale d'espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les éléments de $\mathbb{K}$ sont les *scalaires*) :

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E (ses éléments sont les *vecteurs*) muni de deux opérations :

a) La somme des vecteurs $x, y \in E$ se note $x + y$, il s'agit d'un vecteur ($x + y \in E$).

b) La multiplication du scalaire λ par le vecteur x se note $\lambda \cdot x$ (ou λx), il s'agit d'un vecteur ($\lambda x \in E$)

La définition précise des opérations dépend évidemment de la nature de E, on parle d'espace vectoriel pour indiquer qu'elles vérifient les propriétés suivantes :

1. **Commutativité de « + »** : pour tous $x, y \in E$, on a $x + y = y + x$.
2. **Associativité de « + »** : pour tous $x, y \in E$, on a $(x + y) + z = x + (y + z)$ (on notera alors $x + y + z$).
3. **Élément neutre** : il existe un vecteur e tel que $x + e = x$, pour tout $x \in E$. On peut montrer que e est unique, on le note $\vec{0}$, ou simplement 0.
4. **Élément opposé** : Pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = \vec{0}$. On peut montrer que x' est unique, on note $x' = -x$.
5. Pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$.
6. **Associativité de « · »** : pour tous $x \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (on notera $\lambda\mu x$).
7. **Distributivités :** pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a
   i) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
   ii) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Rappelons deux notions importantes :

Une partie F du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un ***sous-espace vectoriel*** *de E si*
i) $\vec{0} \in F$.
ii) Pour tous $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + \mu y \in F$.

Une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, est ***libre*** *si*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \vec{0}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

implique que tous les scalaires λ_i sont nuls.

6.2.1 Espaces vectoriels de fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point.
$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Précisons la définition d'égalité dans cet ensemble : si $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dire que $f = g$ signifie que $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in I$.

On définit dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ les opérations suivantes

1. ***Somme de fonctions :*** *Si $f, g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, alors*

$$f + g : I \to \mathbb{R}$$

est la fonction définie par $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, pour tout $t \in I$.

2. ***Multiplication d'un scalaire par une fonction :*** *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, alors*

$$\lambda f : I \to \mathbb{R}$$

est la fonction $(\lambda f)(t) = \lambda\, f(t)$, pour tout $t \in I$.

On montre facilement que l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations, est un ***espace vectoriel*** *sur $\mathbb{R}$. Le vecteur $\vec{0}$ de cet espace est la fonction identiquement nulle sur I, qu'on notera 0.*

Remarques

1. Soit I un intervalle ouvert. L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. En effet,

i) $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

ii) La fonction 0 appartient à $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

iii) Enfin, si $f, g \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$: $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$

2. Voici une différence importante avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ on peut trouver des familles libres de taille arbitrairement grande : on dit alors que cet espace vectoriel est de dimension infinie.

En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $f_p : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_p(t) = t^p$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et montrons que la famille $(f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est libre. Supposons donc que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Cette égalité entre fonctions signifie que

$$\lambda_0 f_0(t) + \lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) = 0$$

pour tout $t \in I$, c'est-à-dire

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n = 0$$

pour tout $t \in I$. Comme l'intervalle I n'est pas réduit à un point, ceci implique que tous les λ_i sont nuls. En effet : on a un polynôme de degré n avec une infinité de racines... donc tous ses coefficients sont nuls (on peut aussi dériver n fois : on obtient $\lambda_n = 0$, puis $\lambda_{n-1} = 0$ grâce à l'expression de la dérivée d'ordre $n-1$ et ainsi de suite).

3. Les fonctions f_p étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, le même argument montre que $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

4. Bien que $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et les $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ sont de dimension infinie, ces espaces vectoriels admettent évidemment des sous-espaces de dimension finie, par exemple, dans les notations précédentes

$$F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \{ \alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (et de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$) puisque la famille génératrice (f_0, f_1, f_2) est libre.
Les éléments de F sont les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de la forme $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

5. On montre facilement que l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle linéaire homogène (EH) (notations de la Sect 6.1) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.
On connaît explicitement ses éléments (voir Prop. 6.1.2) : il s'agit des fonctions définies sur U par

$$z : t \mapsto Ce^{A(t)}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Par conséquent, la dimension de ce sous-espace est 1 (il est engendré par la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$).

Voici d'autres exemples d'espaces vectoriels de fonctions :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

1. *$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, l'ensemble de fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
   $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.
2. *$\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et plus généralement $\mathcal{F}(I, \mathbb{C}^n)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, ainsi que $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C}^n)$.*

Tous ces espaces sont de dimension infinie.

6.2.2 L'espace vectoriel des suites numériques *(Compléments)*

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques réelles

$$\mathcal{S} = \{ (u_k)_{k \geq 0} \mid u_k \in \mathbb{R} \}$$

Pour signifier que $U \in \mathcal{S}$ désigne la suite $(u_k)_{k \geq 0}$, nous écrirons $U : (u_k)_{k \geq 0}$.
Deux éléments $U : (u_k)_{k \geq 0}$ et $V : (v_k)_{k \geq 0}$ de $\mathcal{S}$ sont égaux si $u_k = v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on écrira alors $U = V$).

On définit deux opérations dans $\mathcal{S}$

i) **La somme des suites** $U : (u_k)_{k \geq 0}$ **et** $V : (v_k)_{k \geq 0}$ est la suite $U + V$ définie par

$$U + V \ : \ (u_k + v_k)_{k \geq 0}$$

ii) **La multiplication d'un scalaire** λ **par la suite** $U : (u_k)_{k \geq 0}$ est la suite λU définie par

$$\lambda U \ : \ (\lambda u_k)_{k \geq 0}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Le vecteur nul est la suite nulle, qu'on notera 0.

On trouve dans $\mathcal{S}$ des familles libres de cardinal arbitrairement grand : pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $S_i \in \mathcal{S}$ la suite dont tous ses termes sont nuls sauf celui d'indice i, qui est égal à 1, ainsi

$$\begin{array}{lll} S_0 & \text{est la suite} & 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \\ S_1 & \text{est la suite} & 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots \\ S_2 & \text{est la suite} & 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots \end{array}$$

Il est clair que l'égalité entre suites

$$\lambda_0 S_0 + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ \cdots \ + \lambda_n S_n = 0$$

implique que tous les réels λ_i sont nuls. En effet, si $S = \lambda_0 S_0 + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ \cdots \ + \lambda_n S_n$, alors

$$S \ \text{ est la suite } \ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_n,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$$

et l'égalité nous dit que tous les termes de la suite S sont nuls.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(S_0, S_1,\ \ldots\ , S_n)$ de vecteurs de S est libre.
Nous avons montré que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque. On a les résultats analogues pour l'ensemble des suites numériques complexes (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$).

Retour sur les récurrences linéaires doubles (homogènes)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, $b \neq 0$.
Soit $S_H \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\geq 0}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire double homogène

$$u_k = au_{k-1} + bu_{k-2} \qquad (RH)$$

pour tout $k \geq 2$. Remarquons que si les conditions initiales $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ sont données, il existe une unique suite $(u_k)_{k\geq 0}$ solution de (RH).

On montre facilement que

1. La suite 0 vérifie (RH).
2. Si les suites $U : (u_k)_{k\geq 0}$ et $V : (v_k)_{k\geq 0}$ sont deux solutions de (RH) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors la suite
$$\lambda U + \mu V : (\lambda u_k + \mu v_k)_{k\geq 0}$$
vérifie aussi (RH)

Autrement dit, S_H **est un sous-espace vectoriel de** $\mathcal{S}$.

On voit sans peine que $\dim S_H = 2$. En effet, considérons les suites $X : (x_k)_{k\geq 0}$ et $Y : (y_k)_{k\geq 0}$ définies respectivement par

$$\begin{cases} x_k = ax_{k-1} + bx_{k-2} \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y_k = ay_{k-1} + by_{k-2} \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

La famille (X, Y) est libre (il suffit de considérer les deux premiers termes de chaque suite).
Comme $X, Y \in S_H$, alors $\mathrm{Vect}(X, Y) \subset S_H$.
D'autre part, si la suite $U : (u_k)_{k\geq 0}$ est solution de (RH), alors $U = u_0X + u_1Y$ (car U et $u_0X + u_1Y$ vérifient (RH) avec les mêmes conditions initiales). Ainsi $S_H \subset \mathrm{Vect}(X, Y)$ et on a finalement l'égalité $S_H = \mathrm{Vect}(X, Y)$.

Remarques

1. La Prop 2.10.1 donne les solutions de (RH). On a ainsi l'expression explicite d'une base de cet espace vectoriel et on retrouve le fait qu'il est de dimension 2.

2. Si les coefficients a et b de la relation de récurrence (RH) son complexes, il est naturel d'étudier les suites complexes qui vérifient (RH) : on transpose sans difficulté les résultats précédents.

Les récurrences linéaires doubles non homogènes

Considérons maintenant la relation de récurrence linéaire double (non homogène)

$$u_k = au_{k-1} + bu_{k-2} + f(k) \tag{R}$$

pour tout $k \geq 2$. Ici $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ sont donnés, ainsi que la fonction à valeurs réelles f.

La donnée de conditions initiales $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ entraîne l'unicité de solution $(u_k)_{k\geq 0}$ de (R).

La relation de récurrence linéaire homogène associée à (R) est

$$u_k = au_{k-1} + bu_{k-2} \tag{RH}$$

On ne sera pas surpris du résultat suivant

> *Si la suite réelle $V : (v_k)_{k\geq 0}$ est une solution particulière de (R), alors les suites réelles $U : (u_k)_{k\geq 0}$ qui vérifient (R) sont les suites de la forme*
>
> $$U = V + Z$$
>
> *où $Z : (z_k)_{k\geq 0}$ est la solution générale de (RH).*
> *Par conséquent, pour trouver toutes les solutions de (R) il suffit de*
>
> 1. *Déterminer l'ensemble des solutions de (RH).*
> 2. *Trouver une solution particulière quelconque de (R).*

En effet, $V + Z$ est la suite $(v_k + z_k)_{k\geq 0}$ et toute suite de cette forme est bien solution de (R).
D'autre part, si $U : (u_k)_{k\geq 0}$ est solution de (R), alors la suite $U - V : (u_k - v_k)_{k\geq 0}$ est solution de (RH), ainsi $U - V = Z \in S_H$ et $U = V + Z$.

Remarque. Nous ne détaillerons pas ici la recherche de solution particulière de (R).
Notre but était d'illustrer le rôle de la linéarité des relations (R) et (RH) dans l'expression des solutions.
Le lecteur aura remarqué le parallélisme avec le principe de superposition pour l'équation différentielle linéaire d'ordre 1, et le constatera encore dans le cadre des systèmes différentiels linéaires et de l'équation différentielle linéaire d'ordre n.

6.3 Systèmes différentiels linéaires

Un **système différentiel linéaire** d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$ défini sur un intervalle ouvert $U \subset \mathbb{R}$ est un système de la forme

$$(S) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

où les fonctions $a_{ij} : U \to \mathbb{R}$ et $b_i : U \to \mathbb{R}$ sont données. **NOUS SUPPOSERONS TOUJOURS QU'ELLES SONT CONTINUES SUR L'INTERVALLE U.**

Pour tout $t \in U$, soit $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \qquad (S)$$

Une **solution** de (S) est une fonction $X : I \to \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$, définie sur un intervalle ouvert $I \subset U$, dérivable en tout point $t \in I$ et vérifiant (S) pour tout $t \in I$ (la fonction X est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).

Le **système homogène** associé à (S) est le système différentiel linéaire défini par

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) \qquad (SH)$$

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, on utilisera ici les notions de **solution maximale** et **solution globale** du système différentiel (S) (il suffit de transcrire la Déf. 5.1.2 dans notre cadre).

On dispose du résultat suivant concernant l'existence et unicité de solutions du **Problème de Cauchy** pour (S) :

> **Théorème 6.3.1** ***(Cauchy-Lipschitz)***
> *Soit U un intervalle ouvert et $a_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $b_i : U \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur U.*
> *Alors, pour tous $t_0 \in U$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*
>
> $$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$
>
> *admet une unique solution maximale.*
> *Cette solution est globale (définie sur U).*

Toute solution maximale de (S) ou de (SH) est globale : on ne s'occupera donc que des solutions définies sur U.

PAR LA SUITE, POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS (S) ET (SH), LE MOT SOLUTION DÉSIGNERA TOUJOURS UNE SOLUTION DÉFINIE SUR U.

Remarque. On a des définitions et résultats analogues dans le **cas complexe**, c'est-à-dire si le système différentiel est défini à partir de fonctions $a_{ij} : U \to \mathbb{C}$, $b_i : U \to \mathbb{C}$ continues sur U. Il est naturel alors de considérer les solutions globales à valeurs complexes $X : U \to \mathbb{C}^n$ du système (S).

6.3.1 Conséquences de la linéarité

Par souci de clarté, nous utilisons dans cette section la lettre Z pour désigner les solutions du système différentiel linéaire homogène (SH).

Comme pour les équation différentielles linéaires, nous avons aussi **le principe de superposition** dans le cadre des les systèmes différentiels linéaires :

Si $X_1 : U \to \mathbb{R}^n$ et $X : U \to \mathbb{R}^n$ sont deux solutions du système (S), alors $Z = X - X_1$ est solution du système homogène associé (SH). Ainsi, toute solution X de (S) s'écrit sous la forme

$$X = X_1 + Z$$

où Z est une solution de (SH).
Réciproquement, si Z est une solution quelconque de (SH), alors $X_1 + Z$ est solution de (S). Par conséquent :

> *Pour trouver toutes les solutions du système différentiel linéaire (S) il suffit de*
> 1. *Déterminer toutes les solutions Z du système homogène associé.*
> 2. *Déterminer une solution particulière quelconque X_1 de (S).*
>
> *Les solutions de (S) sont alors toutes les fonctions de la forme $X = X_1 + Z$*

Voici une autre conséquence fondamentale de la linéarité du système :

> *L'ensemble S_H des solutions du système différentiel linéaire homogène (SH) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.*
> *En effet :*
> 1. *La fonction nulle est solution de (SH).*
> 2. *Si Z_1 et Z_2 sont solutions de (SH), alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ est aussi solution de (SH).*

En effet, pour établir 2, il suffit de remarquer que $(\alpha Z_1(t) + \beta Z_2(t))' = \alpha Z_1'(t) + \beta Z_2'(t)$ et que

$$A(t) \cdot (\alpha Z_1(t) + \beta Z_2(t)) = \alpha A(t) \cdot Z_1(t) + \beta A(t) \cdot Z_2(t)$$

pour tout $t \in U$.

Remarque. On peut transposer tous les résultats précédents au cas complexe.

6.3.2 Solutions du système homogène

Le Th. de Cauchy-Lipschitz va nous permettre d'affiner le résultat précédent :

> **Proposition 6.3.2** *L'ensemble S_H des solutions du système différentiel linéaire homogène (SH) dans $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n*

Démonstration : On considère le cas $n = 2$ pour simplifier les notations.
Fixons $t_0 \in U$ et soient $X_1 : U \to \mathbb{R}^2$, $X_2 : U \to \mathbb{R}^2$ les solutions de (SH) vérifiant les conditions initiales

$$X_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le Th. de Cauchy-Lipschitz (Th. 6.3.1) nous garantit leur existence et unicité. On sait que

$$\mathrm{Vect}(X_1, X_2) = \{ \, \alpha X_1 + \beta X_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, \} \subset S_H$$

Montrons que $S_H \subset \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$. Soit $X \in S_H$. Notons $X(t_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
On a donc $X(t_0) = (aX_1 + bX_2)(t_0)$. Par conséquent, X et $aX_1 + bX_2$ son deux solutions du même problème de Cauchy pour (SH) : elles sont identiques et $X = aX_1 + bX_2 \in \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$.
La famille (X_1, X_2) est libre : l'égalité $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$, dans $\mathcal{C}^1\left(U, \mathbb{R}^2\right)$, signifie que

$$\alpha X_1(t) + \beta X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in U$ et si $t = t_0$ on obtient $\alpha = \beta = 0$. □

Remarquons que

> **Proposition 6.3.3** *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forment une base de l'espace vectoriel des solution de (SH), alors la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$*
>
> $$(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$$
>
> *est une base de $\mathbb{R}^n$, **pour tout** $t \in U$.*

Démonstration : Par l'absurde. Fixons $t_0 \in U$. Si $(X_1(t_0), X_2(t_0), \ldots, X_n(t_0))$ n'est pas une suite libre, alors ils existent $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$\alpha_1 X_1(t_0) + \alpha_2 X_2(t_0) + \cdots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$$

Par conséquent, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$ est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction nulle l'est aussi, le Th. de Cauchy-Lipschitz implique que

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n = 0$$

Il s'agit d'une égalité dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ où les α_i ne sont pas tous nuls, par conséquent les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne forment pas une famille libre. Contradiction ! □

Remarque. Comme dans les sections précédentes, on a les résultats analogues dans le cas complexe.

6.3.3 La méthode de variation des constantes

Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pratique pour résoudre un système différentiel linéaire homogène dans $\mathbb{R}^n$, défini sur un intervalle ouvert U :

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) \tag{SH}$$

Cependant, si on connaît n solutions $Z_1, Z_2, \ \dots \ , Z_n$ de (SH) linéairement indépendantes, on sait que les solutions du système homogène sont les fonctions

$$\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \ \cdots \ + \alpha_n Z_n$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (Sect. 6.3.2). Connaissant ces solutions, pour résoudre le système différentiel inhomogène

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \tag{S}$$

on sait qu'il suffit de trouver une solution particulière (Sect. 6.3.1), qu'on peut déterminer grâce à la méthode de variation des constantes :

> *On recherche une solution $X : U \to \mathbb{R}^n$ de (S) sous la forme*
>
> $$X : t \to \alpha_1(t) Z_1(t) + \alpha_2(t) Z_2(t) + \ \cdots \ + \alpha_n(t) Z_n(t) \tag{1}$$
>
> *où les $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ à déterminer.*

Remarquons que la dérivée de $t \to \alpha_i(t) Z_i(t)$ est la fonction $t \to \alpha_i'(t) Z_i(t) + \alpha_i(t) Z_i'(t)$. Par conséquent une fonction de la forme (1) est solution de (S) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t) Z_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) Z_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) A(t) \cdot Z_i(t) + B(t)$$

pour tout $t \in U$, et comme $Z_i'(t) = A(t) \cdot Z_i(t)$ sur U, ceci équivaut à

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t) Z_i(t) = B(t) \tag{2}$$

pour tout $t \in U$.

On sait que $(Z_1(t), Z_2(t), \ \dots \ , Z_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ pour tout $t \in U$ (Prop. 6.3.3) donc, pour t fixé, le système linéaire (2) est de Cramer, on peut trouver les inconnues $\alpha_i'(t)$, puis par intégration les fonctions α_i, car les fonctions $t \to \alpha_i'(t)$ ainsi obtenues sont continues :

Pour justifier la continuité des fonctions α_i', écrivons $B(t)$ dans cette base

$$B(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) Z_i(t)$$

Les $\beta_i(t)$ sont des réels connus et on peut montrer que les fonctions $t \to \beta_i(t)$ sont continues [1].

1. En effet, pour les calculer, il faut inverser la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $Z_j(t)$: l'expression de l'inverse d'une matrice à partir de sa comatrice et son déterminant (voir Sect. 1.5) montre que les coefficients de la matrice inverse sont des fonctions continues de t, grâce à la continuité des Z_j. On obtient les $\beta_i(t)$ en multipliant cette matrice par la fonction continue $B(t)$.

Par conséquent (2) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t) Z_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) Z_i(t)$$

ce qui équivaut à $\alpha_i'(t) = \beta_i(t)$ pour tous $t \in U$ et $1 \leq i \leq n$. La continuité des fonctions β_i permet par intégration de déterminer les fonctions α_i.
Une solution particulière $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ de chaque équation suffit pour donner une solution particulière (1) de (S).

Remarque. Comme d'habitude, on a les mêmes résultats dans le cas complexe.

6.4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Lorsque la matrice $A(t)$ de (S) est une matrice constante $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que le système différentiel linéaire est à coefficients constants. Le système s'écrit

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t)$$

Il est défini pour tout $t \in U$, l'intervalle ouvert où la fonction B est définie.

Le système homogène associé

$$X'(t) = A \cdot X(t)$$

est, quant à lui, défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après le Th de Cauchy-Lipschitz, ses solutions maximales sont globales (définies donc sur $\mathbb{R}$ tout entier). On sait qu'elles forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Les vecteurs propres et les valeurs propres de A nous permettent de construire des solutions du système homogène :

> *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de la matrice A et $V \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé.*
> *Alors la fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par*
>
> $$X(t) = e^{\lambda t} V$$
>
> *est solution du système $X'(t) = A \cdot X(t)$.*

En effet : $X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V$ et

$$A \cdot X(t) = A \cdot \left(e^{\lambda t} V\right) = e^{\lambda t} A \cdot V = e^{\lambda t} \lambda V$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque. On a les résultat analogues si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6.4.1 Résolution du système homogène si sa matrice est diagonalisable

Proposition 6.4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*
Soit $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \ \dots \ , V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes.
Alors, les solutions maximales du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

$$X'(t) = A \cdot X(t) \tag{SH}$$

sont les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définies par

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \ \cdots \ + \alpha_n e^{\lambda_n t} V_n \tag{1}$$

pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \ \dots \ , \alpha_n \in \mathbb{R}$

Voici deux démonstrations de la proposition, la première (très simple) utilise les (gros) résultats des sections précédentes :

Démonstration 1 : *On sait que les solutions maximales de (SH) sont globales (définies sur $\mathbb{R}$) et que l'ensemble S_H des solutions globales du système est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Nous savons aussi que les fonctions $X_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définies par $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$ sont solutions de (SH). Pour montrer que ces n fonctions forment une base de S_H, il suffira de montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons alors que*

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ \cdots \ + \alpha_n X_n = 0$$

L'égalité signifie que $\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \ \cdots \ + \alpha_n X_n(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, si $t = 0$, en remarquant que $X_i(0) = V_i$, on a

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ \cdots \ + \alpha_n V_n = 0$$

et tous les α_i sont nuls puisque $(V_1, V_2, \ \dots \ , V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Les n fonctions $t \to e^{\lambda_i t} V_i$ forment bien une base de S_H et tout élément de cet espace vectoriel s'écrit donc sous la forme (1). □

La deuxième démonstration illustre le technique du **changement d'inconnue**, qu'on exploitera ultérieurement dans des cadres plus généraux, elle permet d'établir la proposition sans aucun préalable :

Démonstration 2 : *Soit $P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}$.*
Les vecteurs colonnes de la matrice P sont $V_1, V_2, \ \dots \ V_n$. On sait alors que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une solution de (SH). Considérons le changement d'inconnue

$$\widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1} X(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$X(t) = P\widetilde{X}(t) = \tilde{x}_1(t)V_1 + \cdots + \tilde{x}_n(t)V_n \tag{2}$$

Puisque $X'(t) = P\widetilde{X}'(t)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ les équivalences suivantes

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P\widetilde{X}'(t) = AP\widetilde{X}(t) \Leftrightarrow \widetilde{X}'(t) = P^{-1}AP\widetilde{X}(t) \Leftrightarrow \widetilde{X}'(t) = D\widetilde{X}(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1'(t) = \lambda_1\tilde{x}_1(t) \\ \quad\vdots \\ \tilde{x}_n'(t) = \lambda_n\tilde{x}_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \quad\vdots \\ \tilde{x}_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = P\widetilde{X}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}V_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}V_n$$

pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et nous avons montré que les solutions globales de (SH) sont définies par (1).
Remarquons que ce raisonnement appliqué à une solution $X : I \to \mathbb{R}^n$ aboutit à la même expression (1) (pour tout $t \in I$), expression qui donne le prolongement de X sur $\mathbb{R}$ tout entier : les solutions maximales de (SH) sont bien globales et définies par (1). □

Remarques

1. La technique du changement d'inconnue exploite l'écriture (2) de $X(t)$ dans une base de vecteurs propres de A.

2. Si $P^{-1}AP = M$ (matrice quelconque) le changement d'inconnue $X(t) = P\widetilde{X}(t)$ établit l'équivalence entre $X'(t) = AX(t)$ et $\widetilde{X}'(t) = M\widetilde{X}(t)$. Ce dernier système peut s'avérer plus simple à résoudre (par exemple si M est une matrice triangulaire). Noter que le calcul explicite de P^{-1} n'est pas nécessaire.

3. La classification des matrices réelles 2×2 de la Sect 2.10.4 va nous permettre au chapitre suivant de résoudre tous les systèmes différentiels homogènes 2×2 à coefficients réels.

L'énoncé (et les démonstrations) de la proposition sont identiques dans la cas complexe :

> *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$, $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres correspondantes, alors les solutions maximales à valeurs complexes du système*
>
> $$X'(t) = A \cdot X(t)$$
>
> *sont globales et définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par*
>
> $$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}V_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}V_n$$
>
> *pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.*

Exemples de calcul

Exemple 1.

Déterminons les solutions maximales à valeurs réelles du système différentiel

$$(H) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 6y(t) \end{cases}$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et (H) s'écrit $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est (exercice) $P_A(x) = (x-3)(x-5)$ et A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (Corollaire 2.8.2).
On trouve $E_3 = \text{Vect}\,(\,(1,-1)\,)$ et $E_5 = \text{Vect}\,(\,(1,-3)\,)$.

D'après la Prop. 6.4.1, les solutions maximales à valeurs réelles de (H) sont les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : Solutions à valeurs complexes et solutions à valeurs réelles.

Considérons le système différentiel

$$(H) \qquad \begin{cases} x'(t) = - y(t) \\ y'(t) = \ \ x(t) \end{cases}$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, nous l'avons étudié dans l'Exemple 2 de la Sect. 2.5. Elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque $P_A(x) = x^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ d'après le Corollaire 2.8.2 car $P_A(x) = (x-i)(x+i)$.

On trouve $E_i = \text{Vect}\,(\,(1,-i)\,)$ et $E_{-i} = \text{Vect}\,(\,(1,i)\,)$ et la Prop 6.3.1 dans le cas complexe nous dit que les solutions maximales à valeurs complexes de (H) sont les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \beta \underbrace{e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}_{X_2(t)}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Il s'agit des combinaisons linéaires des solutions X_1 et X_2.

Voici une remarque générale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : R \to \mathbb{C}^n$ une solution du système

$$X'(t) = AX(t) \tag{SH}$$

$$\textit{Si} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \textit{notons} \quad \overline{X}(t) = \begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_n(t)} \end{pmatrix}$$

(on prend le conjugué composante à composante dans $X(t)$).

Comme la matrice A est à coefficients réels et $\overline{X}'(t) = \overline{X'}(t)$, on montre facilement que $\overline{X} : R \to \mathbb{C}^n$ est aussi une solution de (SH).

*En particulier les fonctions **à valeurs dans** $\mathbb{R}^n$ définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$\mathrm{Re}X = \frac{1}{2}(X + \overline{X}) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}X = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$$

sont solutions de (SH) (combinaisons linéaires des solutions X et $\overline{X}$).

Enfin, comme on a aussi $X = \mathrm{Re}X + i\,\mathrm{Im}X$ et $\overline{X} = \mathrm{Re}X - i\,\mathrm{Im}X$, on a l'égalité entre les sous-espaces vectoriels

$$\left\{\alpha X + \beta \overline{X} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\} = \{\alpha\,\mathrm{Re}X + \beta\,\mathrm{Im}X \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

Revenons à notre exemple : on a $X_2 = \overline{X_1}$ (ceci n'est pas une coïncidence : relire l'Exemple 2 de la Sect. 2.5 et la remarque générale qu'on avait fait alors)

$$X_1(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\mathrm{Re}X_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}}_{\mathrm{Im}X_1}$$

par conséquent, les solutions maximales à valeurs complexes de (H) sont les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

En particulier, si α et β sont réels, $(*)$ donne des solutions à valeurs réelles de (H). Réciproquement, si une solution $(*)$ est à valeurs réelles,

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et α, β sont réels.

En résumé, les solutions maximales à valeurs réelles de (H) sont sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $(*)$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6.4.2 Résolution du système non homogène si sa matrice est diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une **matrice diagonalisable sur** $\mathbb{R}$.

Soit U un intervalle ouvert et $B : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.
Considérons le système différentiel linéaire à coefficients constants sur U

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t) \tag{S}$$

Nous savons (Sect 6.3.1) que pour trouver toutes les solutions de (S) il suffit de

1. Trouver toutes les solutions Z du système homogène associé.
2. Trouver une solution particulière quelconque X_1 de (S).

Les solutions de (S) sont alors les fonctions $X = X_1 + Z$.

Nous avons déjà traité la première question (Prop. 6.4.1).

Pour déterminer une solution particulière de (S) sur U nous disposons de deux techniques (très proches dans ce contexte) :

A) La méthode de variation des constantes (Sect 6.3.3) :

Dans les notations de la Prop. 6.4.1 les solutions du système homogène associé à (S) sont

$$Z(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \ \cdots \ + \alpha_n e^{\lambda_n t} V_n$$

On cherchera alors une solution particulière de (S) sur U sous la forme

$$X(t) = \alpha_1(t) e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2(t) e^{\lambda_2 t} V_2 + \ \cdots \ + \alpha_n(t) e^{\lambda_n t} V_n$$

B) La technique du changement d'inconnue (qu'on a déjà illustrée dans la démonstration de la Prop. 6.4.1) :

Soit donc $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \ \ldots \ , V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots \ , \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes.

Soit $P = P_{\,\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}$. Les vecteurs colonnes de la matrice P sont $V_1, V_2, \ \ldots \ V_n$.
On sait alors que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ une solution de (S). Considérons le changement d'inconnue

$$\widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1} X(t)$$

pour tout $t \in U$. Ainsi

$$X(t) = P\widetilde{X}(t) = \tilde{x}_1(t) V_1 + \ \cdots \ + \tilde{x}_n(t) V_n \tag{1}$$

Soit enfin

$$\widetilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{b}_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1}B(t)$$

Par conséquent

$$B(t) = P\widetilde{B}(t) = \tilde{b}_1(t)V_1 + \ \cdots \ + \tilde{b}_n(t)V_n \tag{2}$$

Puisque $X'(t) = P\widetilde{X}'(t)$, on a pour tout $t \in U$ les équivalences suivantes

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \ \Leftrightarrow \ P\widetilde{X}'(t) = AP\widetilde{X}(t) + B(t) \ \Leftrightarrow \ \widetilde{X}'(t) = P^{-1}AP\widetilde{X}(t) + P^{-1}B(t)$$

$$\Leftrightarrow \ \widetilde{X}'(t) = D\widetilde{X}(t) + \widetilde{B}(t) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \tilde{x}_1'(t) = \lambda_1\tilde{x}_1(t) + \widetilde{b}_1(t) \\ \qquad \vdots \\ \tilde{x}_n'(t) = \lambda_n\tilde{x}_n(t) + \widetilde{b}_n(t) \end{cases}$$

La continuité des fonctions $\widetilde{b}_i$ sur U (conséquence de la continuité de B sur cet intervalle), nous permet de déterminer une solution particulière $\widetilde{x}_i$ pour chacune des équations linéaires $\tilde{x}_i'(t) = \lambda_i\tilde{x}_i(t) + \widetilde{b}_i(t)$ sur l'intervalle U.

La fonction

$$X(t) = P\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

est donc une solution particulière de (S) sur U.

Bien entendu, on peut aussi trouver **toutes** les solutions pour chaque équation $\tilde{x}_i'(t) = \lambda_i\tilde{x}_i(t) + \widetilde{b}_i(t)$ et, en revenant à l'inconnue $X(t) = P\widetilde{X}(t)$, donner ainsi **toutes** les solutions du système (S) sur U.

Remarques.

1. La technique exploite l'écriture de $X(t)$ et $B(t)$ dans une base de vecteurs propres de la matrice A (égalités (1) et (2)).
Le changement d'inconnue est induit par le changement de coordonnées $\widetilde{X} = P^{-1}X$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Si A est semblable à une matrice triangulaire T ($P^{-1}AP = T$) et $\widetilde{X}(t) = P^{-1}X(t)$, $\widetilde{B}(t) = P^{-1}B(t)$, alors (même technique) :

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \ \Leftrightarrow \ P\widetilde{X}'(t) = AP\widetilde{X}(t) + B(t) \ \Leftrightarrow \ \widetilde{X}'(t) = T\widetilde{X}(t) + \widetilde{B}(t)$$

Système qu'on peut résoudre en commençant par la dernière équation (si T est triangulaire supérieure) ou par la première (si T est triangulaire inférieure).
En effet, supposons par exemple $n = 3$ et T triangulaire supérieure, on a un système de la forme

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1'(t) &= t_{11}\widetilde{x}_1(t) + t_{12}\widetilde{x}_2(t) + t_{13}\widetilde{x}_3(t) + \widetilde{b}_1(t) \\ \widetilde{x}_2'(t) &= t_{22}\widetilde{x}_2(t) + t_{23}\widetilde{x}_3(t) + \widetilde{b}_2(t) \\ \widetilde{x}_3'(t) &= t_{33}\widetilde{x}_3(t) + \widetilde{b}_3(t) \end{cases}$$

La dernière équation donne $\widetilde{x}_3$ et la deuxième devient alors une équation linéaire en $\widetilde{x}_2$. Enfin, avec les valeurs de $\widetilde{x}_2$ et $\widetilde{x}_3$, la première équation nous permet de trouver $\widetilde{x}_1$.

Exemple : Illustration des méthodes de variation des constantes et du changement d'inconnue.

Soit le système différentiel sur $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}}_{B(t)} \tag{S}$$

1. Déterminer les solutions du système homogène associé.
2. Déterminer une solution particulière de (S).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (S).

1. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (x-1)(x-2)$: A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (deux valeurs propres réelles distinctes). On trouve $E_1 = \text{Vect}\,(\,(3,2)\,)$ et $E_2 = \text{Vect}\,(\,(1,1)\,)$. D'après la Prop. 6.4.1, les solutions maximales à valeurs réelles du système homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Utilisons d'abord la **méthode de variation des constantes** :

Cherchons une solution particulière de (S) sous la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

D'une part

$$AX(t) = \alpha(t)e^t A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta(t)e^{2t} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha(t)e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\beta(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$X'(t) = \alpha'(t)e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha(t)e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta'(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\beta(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, une fonction de la forme (1) est solution de (S) si et seulement si

$$\alpha'(t)e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta'(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3\alpha'(t)e^t + \beta'(t)e^{2t} & = & e^t \\ 2\alpha'(t)e^t + \beta'(t)e^{2t} & = & 0 \end{cases}$$

A partir de la deuxième équation on a $\alpha'(t) = -1/2\beta'(t)e^t$ et la première s'écrit $-3/2\beta'(t)e^{2t} + \beta'(t)e^{2t} = e^t$, d'où $\beta'(t) = -2e^{-t}$ et $\alpha'(t) = 1$. Ainsi $\alpha(t) = t$ et $\beta(t) = 2e^{-t}$ conviennent, en revenant à (1) on obtient une solution particulière de (S) :

$$X(t) = te^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$$

2. Reprenons la question pour illustrer l'application de la **méthode du changement d'inconnue** :

A partir **1.**, on sait que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Considérons le changement d'inconnue $\widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$. Alors, comme nous venons de voir, on a

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{X}'(t) = D\widetilde{X}(t) + P^{-1}B(t)$$

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, donc $P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$ et dans la nouvelle inconnue le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}'(t) \\ \widetilde{y}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

(i) Une solution particulière de $\widetilde{x}'(t) = \widetilde{x}(t) + e^t$ est $\widetilde{x}(t) = te^t$ (méthode de variation de la constante : on cherche $\widetilde{x}(t)$ sous la forme $c(t)e^t$...).

(ii) Une solution particulière de $\widetilde{y}'(t) = 2\widetilde{y}(t) - 2e^t$ est $\widetilde{y}(t) = 2e^t$ (méthode de variation de la constante : on cherche $\widetilde{y}(t)$ sous la forme $d(t)e^{2t}$...).

On en déduit que

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t \\ 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$$

est une solution particulière de (S).

3. Les solutions maximales à valeurs réelles du système (S) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix} + \alpha e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6.5 Équations différentielles linéaires d'ordre n

Une **équation différentielle linéaire d'ordre** n sur un intervalle ouvert U est une équation de la forme

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \qquad (E_n)$$

où les fonctions $a_i : U \to \mathbb{R}$ et $b : U \to \mathbb{R}$ sont données, **NOUS SUPPOSERONS TOUJOURS QU'ELLES SONT CONTINUES SUR L'INTERVALLE** U.

Une solution de (E_n) est une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset U$, n fois dérivable sur I et vérifiant l'équation (E_n) pour tout $t \in I$. La continuité des fonctions a_i et b implique les solutions sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

L'équation homogène associée à (E_n) est

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) \qquad (EH_n)$$

6.5.1 Le système différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^n$ associé

En introduisant les n **fonctions inconnues auxiliaires**

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad \ldots \quad , x_{n-1}(t) = x^{(n-2)}(t), \quad x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

on a

$$x_1'(t) = x'(t) = x_2(t), \quad x_2'(t) = x''(t) = x_3(t), \quad \ldots \quad x_{n-1}'(t) = x^{(n-1)}(t) = x_n(t)$$

et

$$\begin{aligned} x_n'(t) = x^{(n)}(t) &= a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ &= a_0x_1(t) + a_1x_2(t) + \cdots + a_{n-1}x_n(t) + b(t) \end{aligned}$$

On transforme donc (E_n) en un système différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^n$ défini sur U :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{B(t)} \qquad (\mathcal{S}E_n)$$

Remarquons que les solutions du système $(\mathcal{S}E_n)$ sont de la forme

$$X(t) = \Big(x(t),\ x'(t),\ x''(t),\ \ldots \quad , x^{(n-1)}(t) \Big)$$

où $t \to x(t)$ est solution de (E_n).

6.5.2 Problème de Cauchy

Le Th de Cauchy-Lipschitz (Th. 6.3.1) appliqué à $(\mathcal{S}E_n)$ garantit que, pour tous $t_0 \in U$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

de plus, cette solution est globale (définie sur U).

Si $X_0 = (c_1, c_2, \ \dots \ , c_n)$, la condition $X(t_0) = X_0$ s'écrit

$$x_1(t_0) = c_1, \quad x_2(t_0) = c_2, \quad \dots \quad , x_{n-1}(t_0) = c_{n-1}, \quad x_n(t_0) = c_n$$

c'est-à-dire

$$x(t_0) = c_1, \quad x'(t_0) = c_2, \quad \dots \quad x^{(n-2)}(t_0) = c_{n-1}, \quad x^{(n-1)}(t_0) = c_n$$

Récapitulons :

Proposition 6.5.1 *Soit U un intervalle ouvert, $a_i : U \to \mathbb{R}$ et $b : U \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur U, $0 \leq i \leq n-1$.*
Alors, pour tous $t_0 \in U$ et $(c_1, c_2, \ \dots \ , c_n) \in \mathbb{R}^n$, le Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ \cdots \ + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = c_1 \\ x'(t_0) = c_2 \\ \quad \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = c_n \end{cases}$$

admet une unique solution maximale. De plus, elle est globale (définie sur U)

Toute solution maximale de (E_n) ou de (EH_n) est globale : on ne s'occupera donc que des solutions définies sur U.
PAR LA SUITE, POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (E_n) ET (EH_n), AINSI QUE POUR LEURS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ASSOCIÉS, LE MOT SOLUTION DÉSIGNERA TOUJOURS UNE SOLUTION DÉFINIE SUR U.

6.5.3 Conséquences de la linéarité

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, nous avons aussi **le principe de superposition** pour (E_n), l'équation différentielle linéaire d'ordre n :
Si $x_1 : U \to \mathbb{R}$ et $x : U \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E_n), alors $z = x - x_1$ est solution sur U de (EH_n). Ainsi, toute solution x de (E_n) s'écrit sous la forme

$$x = x_1 + z$$

où z est une solution de (EH_n).
Réciproquement, si z est une solution quelconque de (EH_n), alors $x_1 + z$ est solution de (E_n).

Par conséquent :

> *Pour trouver toutes les solutions de (E_n) il suffit de*
> 1. *Déterminer toutes les solutions z de l'équation homogène associée .*
> (2) *Déterminer une solution particulière quelconque x_1 de (E_n).*
>
> *Les solutions de (E_n) sont alors toutes les fonctions de la forme $x = x_1 + z$*

Voici une autre conséquence fondamentale de la linéarité de l'équation :

> *Si z_1 et z_2 sont solutions de (EH_n), alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction*
>
> $$\alpha z_1 + \beta z_2$$
>
> *est solution de l'équation. Comme la fonction nulle est aussi solution, on en déduit que : L'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^n(U, \mathbb{R})$.*

6.5.4 Solutions de l'équation homogène

Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n définie sur U

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) \qquad (EH_n)$$

et son système différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^n$ défini sur U associé :

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{S}EH_n)$$

Il s'agit d'un système homogène.

Rappelons que les solutions du système sont les fonctions $X : U \to \mathbb{R}^n$ de la forme

$$X(t) = \Big(x(t),\, x'(t),\, x''(t),\, \ldots\ ,\, x^{(n-1)}(t) \Big)$$

où $x : U \to \mathbb{R}$ est solution de (EH_n).

On sait que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}EH_n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n (Prop. 6.3.2). On montre facilement que si les fonctions

$$Z_i(t) = \Big(z_i(t),\, z_i'(t),\, z_i''(t),\, \ldots\ ,\, z_i^{(n-1)}(t) \Big), \qquad 1 \le i \le n$$

forment une base de cet espace, alors les fonctions z_i forment une base des solutions de l'équation (EH_n) :

> *L'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.*

Solutions de l'équation homogène à coefficients constants

Un cas particulier important est celui de l'équation homogène à coefficients constants, que nous écrirons

$$x^{(n)}(t) + c_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + c_1 x'(t) + c_0 x(t) = 0 \qquad (EH_n)$$

Ici les $c_i \in \mathbb{R}$. L'équation est définie sur $U = R$: les solutions maximales de (EH_n) sont donc définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Le **polynôme caractéristique** de (EH_n) est, par définition,

$$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

On peut montrer que

1. *Si λ est racine réelle de multiplicité m du polynôme caractéristique, alors les fonctions*

$$t \to t^k e^{\lambda t}, \qquad 0 \leq k \leq m-1 \qquad (1)$$

sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle à coefficients constants (EH_n).

2. *Si $\lambda = a + bi$, avec $b > 0$, est racine de multiplicité m du polynôme caractéristique, alors les fonctions*

$$t \to \mathrm{Re}\left(t^k e^{\lambda t}\right) = t^k e^{at}\cos bt,\ t \to \mathrm{Im}\left(t^k e^{\lambda t}\right) = t^k e^{at}\sin bt,\ 0 \leq k \leq m-1 \quad (2)$$

sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle à coefficients constants (EH_n).

Remarque. Dans le deuxième cas, $\overline{\lambda} = a - bi$ est aussi est racine de multiplicité m du polynôme caractéristique (puisqu'il est à coefficients réels) et les fonctions $t \to \mathrm{Re}(t^k e^{\overline{\lambda} t})$, $t \to \mathrm{Im}(t^k e^{\overline{\lambda} t})$, $0 \leq k \leq m-1$, sont aussi solutions (mais elles s'expriment comme combinaisons linéaires des fonctions (2))

*Les cas 1 et 2 ci-dessus fournissent n solutions **linéairement indépendantes** : elles forment donc une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle à coefficients constants (EH_n).*

Remarques

1. Si les coefficients c_i de l'équation (EH_n) sont complexes, une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (EH_n) est donnée par les fonctions

$$t \to t^k e^{\lambda t}, \qquad 0 \leq k \leq m-1$$

pour chaque racine complexe λ du polynôme caractéristique (m est la multiplicité λ).

2. On peut montrer que le polynôme caractéristique de l'équation (EH_n) défini ci-dessus est le polynôme caractéristique de la matrice du système différentiel homogène dans $\mathbb{R}^n$ associé à cette équation.

6.5.5 Le cas non homogène : variation des constantes

Supposons connue une base $z_1, z_2, \dots, z_n$ des solutions de l'équation homogène définie sur U par

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) \qquad (EH_n)$$

On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \qquad (E_n)$$

il suffira donc de trouver une solution particulière (principe de superposition).

Dans ce but, nous allons appliquer la méthode de variation des constantes (voir Sect. 6.3.3) au système différentiel associé à (E_n) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{B(t)} \qquad (\mathcal{S}E_n)$$

Rappelons que les solutions de ce système sont de la forme

$$X(t) = \Big(x(t),\ x'(t),\ x''(t),\ \dots\ ,\ x^{(n-1)}(t) \Big) \qquad (*)$$

où $t \to x(t)$ est solution de (E_n).

Comme les fonctions z_i sont solutions de (EH_n), les fonctions définies sur U par

$$Z_i(t) = (z_i(t), z_i'(t), \dots, z_i^{(n-1)}(t))$$

avec $1 \leq i \leq n$, sont solutions de

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) \qquad (\mathcal{S}EH_n)$$

le système différentiel associé à l'équation (EH_n).
La famille des z_i est libre : on en déduit facilement que les Z_i sont libres. Elles forment donc une base des solutions de $(\mathcal{S}EH_n)$, ce qui nous permet de démarrer la méthode de variation des constantes :

Une fonction $X : U \to \mathbb{R}^n$ de la forme

$$X(t) = \alpha_1(t)Z_1(t) + \alpha_2(t)Z_2(t) + \cdots + \alpha_n(t)Z_n(t) \qquad (1)$$

(où les $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$) est solution de $(\mathcal{S}E_n)$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)Z_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)Z_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)A(t) \cdot Z_i(t) + B(t)$$

pour tout $t \in U$, et comme $Z_i'(t) = A(t) \cdot Z_i(t)$ sur U, ceci équivaut à

$$\alpha_1'(t)Z_1(t) + \alpha_2'(t)Z_2(t) + \cdots + \alpha_n'(t)Z_n(t) = B(t)$$

pour tout $t \in U$. C'est à dire

$$\alpha_1'(t)\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_1'(t) \\ \vdots \\ z_1^{(n-2)}(t) \\ z_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \alpha_2'(t)\begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_2^{(n-2)}(t) \\ z_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n'(t)\begin{pmatrix} z_n(t) \\ z_n'(t) \\ \vdots \\ z_n^{(n-2)}(t) \\ z_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Pour tout $t \in U$ fixé, les vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$ (Prop. 6.3.3). Le système linéaire (2), dont les inconnues sont les réels $\alpha_i'(t)$, est de Cramer : il admet une solution unique. Ceci détermine $\alpha_i'(t)$ pour tout $t \in U$ et on peut trouver par intégration les fonctions α_i. Ainsi

> *La fonction X définie par (1) est solution sur U du système différentiel (SE_n) si et seulement si les fonctions α_i vérifient (2) pour tout $t \in U$.*

En particulier, si les si les fonctions α_i vérifient (2), alors la fonction X définie par (1) est solution du système $(\mathcal{S}E_n)$ et par conséquent **la première composante de X est solution de l'équation** (E_n) (ne pas oublier $(*)$) : il s'agit, d'après (1), de la fonction définie sur U par

$$x(t) = \alpha_1(t)z_1(t) + \alpha_2(t)z_2(t) + \cdots + \alpha_n(t)z_n(t)$$

Récapitulons :

> *Si les fonctions $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ vérifient les conditions (2) sur U, alors la fonction*
>
> $$x(t) = \alpha_1(t)z_1(t) + \alpha_2(t)z_2(t) + \cdots + \alpha_n(t)z_n(t)$$
>
> *est solution sur cet intervalle de l'équation (E_n), les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ étant une base des solutions sur U de l'équation homogène associée (EH_n).*

Exemple. On se propose de résoudre sur l'intervalle $U =]\,0,\, \pi/2\,[$ l'équation

$$x''(t) + 4x(t) = \frac{1}{\sin 2t} \tag{E_2}$$

Commençons par déterminer les solutions globales de l'équation homogène associée

$$x''(t) + 4x(t) = 0 \tag{EH_2}$$

Son polynôme caractéristique est $P(x) = x^2 + 4$ et ses racines sont $\pm 2i$, par conséquent une base des solutions sur U de l'équation homogène est formée par les fonctions

$$z_1 : t \to \cos 2t \qquad z_2 : t \to \sin 2t$$

Cherchons ensuite une solution particulière de (E_2) sous la forme

$$x(t) = \alpha_1(t)z_1(t) + \alpha_2(t)z_2(t) = \alpha_1(t)\cos 2t + \alpha_2(t)\sin 2t \tag{1}$$

Les conditions (2) pour $n = 2$ sont

$$\alpha_1'(t)\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix} + \alpha_2'(t)\begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

ce qui donne dans le cas présent le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha_1'(t)\cos 2t & + & \alpha_2'(t)\sin 2t & = & 0 \\ \alpha_1'(t)\,(-2\sin 2t) & + & \alpha_2'(t)\,(2\cos 2t) & = & \dfrac{1}{\sin 2t} \end{array} \right. \tag{2}$$

Les conditions (2) sont suffisantes pour que (1) soit solution de (E_2).

A partir de la première équation de (2) on a, pour tout $t \in \,]\,0,\ \pi/2\,[$

$$\alpha_2'(t) = -\alpha_1'(t)\frac{\cos 2t}{\sin 2t} \tag{3}$$

et la deuxième équation du système s'écrit

$$-\alpha_1'(t)\sin 2t - \alpha_1'(t)\frac{\cos^2 2t}{\sin 2t} = \frac{1}{2\sin 2t}, \quad \text{ou encore : } -\alpha_1'(t)\left(\frac{\sin^2 2t + \cos^2 2t}{\sin 2t}\right) = \frac{1}{2\sin 2t}$$

ainsi $\alpha_1'(t) = -1/2$ pour tout $t \in \,]\,0,\ \pi/2\,[$ et $\alpha_1(t) = -t/2$ convient. D'après (3)

$$\alpha_2'(t) = \frac{1}{2}\frac{\cos 2t}{\sin 2t}$$

et $\alpha_2(t) = \dfrac{\ln(\sin 2t)}{4}$ convient. Par conséquent

$$x(t) = -\frac{t}{2}\cos 2t + \frac{\ln(\sin 2t)}{4}\sin 2t$$

est solution de (E_2) sur $]\,0,\ \pi/2\,[$.

Les solutions maximales de (E_2) sont les fonctions définies sur $]\,0,\ \pi/2\,[$ par

$$x(t) = \underbrace{\left(-\frac{t}{2}\cos 2t + \frac{\ln(\sin 2t)}{4}\sin 2t\right)}_{\text{solution particulière de } (E_2)} + \underbrace{\alpha_1\cos 2t + \alpha_2\sin 2t}_{\text{solution générale de } (EH_2)}$$

pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Table des matières