La conjecture de Tate sur les cycles algébriques

Olivier Wittenberg

Mémoire de DEA réalisé sous la direction de
Jean-Louis Colliot-Thélène.

DEA de mathématiques pures de l'université Paris 11 – Orsay
Année universitaire 2001/2002

Résumé

Soient k un corps de type fini sur son sous-corps premier et X une variété algébrique projective et lisse sur k. Dans [41] et [44], Tate conjecture que toute classe de cohomologie ℓ-adique de $X \otimes_k \overline{k}$ invariante sous l'action du groupe de Galois est l'image d'un cycle algébrique (à coefficients ℓ-adiques). Le présent mémoire a pour but d'introduire cette conjecture. On en énoncera quelques variantes (notamment le lien avec la finitude du groupe de Tate-Shafarévitch des variétés abéliennes) et l'on exposera les démonstrations de deux cas particuliers importants : celui des variétés abéliennes sur les corps finis, d'après Tate (cf. [42]), et celui des surfaces $K3$ possédant un pinceau de courbes elliptiques, sur un corps fini, d'après Artin et Swinnerton-Dyer (cf. [4]).

Table des matières

1 Conventions, notations et rappels

Soit k un corps. Dans tout le texte, ℓ sera un nombre premier différent de la caractéristique de k. Une *variété sur k* est par définition un k-schéma de type fini ; de même, un *k-groupe algébrique* est un k-schéma en groupes de type fini. Une *courbe* (resp. *surface*) est une variété purement de dimension 1 (resp. 2). Le terme « anneau » désigne un anneau commutatif unitaire ; de même pour les algèbres. Si A est un anneau, B une A-algèbre et X un A-schéma, on note $X \times_A B$ ou simplement X_B le B-schéma $X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$. Soit X un schéma ; on note $\operatorname{Pic}(X)$ son groupe de Picard et $[\mathscr{L}]$ la classe dans $\operatorname{Pic}(X)$ d'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X. On dira que $\mathscr{L}$ est *trivial* si $[\mathscr{L}]$ l'est, i.e. si $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_X$-module libre. Pour $x \in X$, on note $\kappa(x)$ ou simplement $\{x\}$ le corps résiduel de x. Enfin, si X est intègre, $\kappa(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur X.

Si p est un nombre premier et G un groupe abélien, on note $G\{p\}$ la partie p-primaire de G, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des éléments dont l'ordre est une puissance de p. Si N est un entier et G un groupe ou un schéma en groupes, ${}_NG$ désignera la N-torsion de G. Si G est un groupe agissant sur un ensemble E, on note E^G le sous-ensemble des invariants. Si G est un groupe abélien et ℓ un nombre premier, on note $T_\ell(G)$ le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, G) = \varprojlim {}_{\ell^n}G$ et $V_\ell(G) = T_\ell(G) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

La catégorie opposée d'une catégorie $\mathscr{C}$ sera notée $\mathscr{C}^\circ$. On note **Sch** la catégorie des schémas, **Ens** celle des ensembles et **Ab** celle des groupes abéliens. Soit S un schéma. On note **Sch**$/S$ la catégorie des S-schémas. Si X et Y sont deux objets d'une catégorie, on écrira $X \approx Y$ pour « X est isomorphe à Y » et $X = Y$ pour « X est canoniquement isomorphe à Y ».

Le lecteur est supposé familier avec les topologies de Grothendieck, les résultats essentiels de cohomologie étale et la théorie des variétés abéliennes.

1.1 Cohomologie étale et cycles algébriques

Soient ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k et X un k-schéma de type fini. On note $X_{\text{ét}}$ le petit site étale de X, X_{Zar} le petit site Zariski de X, X_{fppf} le grand site fppf de X, $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$, $H^i_{\text{Zar}}(X,\mathscr{F})$, $H^i_{\text{fppf}}(X,\mathscr{F})$ ou $H^i(X,\mathscr{F})$ les groupes de cohomologie d'un faisceau en groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur le site correspondant, G_X ou simplement G le faisceau constant associé à un groupe abélien G (la topologie étant sous-entendue), $\mathbb{G}_{\mathrm{m},X}$ ou $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ le groupe multiplicatif de X, de même pour le groupe additif $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ et pour le faisceau des racines N-èmes de l'unité $\boldsymbol{\mu}_N = {}_N\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $N \in \mathbb{N}$. On emploiera la notation $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}(j)$ pour désigner la puissance tensorielle j-ème de $\boldsymbol{\mu}_\ell$, pour $j \in \mathbb{Z}$, en convenant que $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}(j) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}(-j), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ lorsque $j < 0$. Enfin, $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j))$ désigne le $\mathbb{Z}_\ell$-module limite projective des $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(j))$ et $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j))$ le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel qui s'en déduit par extension des scalaires.

Si X est une variété sur k, on note $\mathscr{Z}^i(X)$ le groupe abélien libre de base l'ensemble des fermés irréductibles de X de codimension i, pour $i \in \mathbb{N}$. Les éléments de $\mathscr{Z}^i(X)$ sont ce que l'on appelle les *cycles algébriques de codimension i sur X* ; $\mathscr{Z}^1(X)$ se note aussi $\operatorname{Div}(X)$.

Supposons maintenant k séparablement clos. Soit X une variété irréductible et propre sur k, de dimension d. On dispose du morphisme trace $\rho_X \colon H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to \mathbb{Q}_\ell$; c'est un isomorphisme. Le théorème de dualité de Poincaré affirme que si de plus X est lisse sur k, l'accouplement

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(m)) \times H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_\ell(d-m)) \longrightarrow H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) = \mathbb{Q}_\ell$$

donné par le cup-produit est une dualité parfaite de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie.

Rappelons que l'on a un isomorphisme canonique $\operatorname{Pic}(X) = H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ (théorème de Hilbert 90). La suite exacte de Kummer en topologie étale

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_{\ell^n,X} \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m},X} \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_{\mathrm{m},X} \longrightarrow 0$$

Je tiens à remercier Jean-Louis Colliot-Thélène d'avoir encadré avec patience ce DEA, David Harari et Wayne Raskind d'avoir bien voulu faire partie du jury, sans oublier Joseph Ayoub, Gaëtan Chenevier et Joël Riou, avec qui j'ai souvent l'occasion d'avoir des discussions mathématiquement éclairantes.

fournit une application bord $\mathrm{Pic}(X) \to H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})$. D'où, en passant à la limite projective, une application $\alpha\colon \mathrm{Pic}(X) \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$. Ceci permet d'associer une classe de cohomologie à tout cycle algébrique de codimension 1. Cette construction se généralise en codimension quelconque lorsque X est lisse ; si k est fini ou séparablement clos, on dispose ainsi d'une flèche

$$c\colon \mathscr{Z}^i(X) \longrightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

appelée *l'application de classe de cycle*. Pour $i = 1$, c coïncide avec la composée de α et de la flèche canonique $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$. Lorsque Y est un sous-schéma fermé irréductible de X, lisse sur k, $c(Y)$ est caractérisée par la dualité de Poincaré : il s'agit de l'unique classe vérifiant

$$\rho_X(\eta \cup c(Y)) = \rho_Y(\eta|_Y)$$

pour tout $\eta \in H^{2(d-i)}(X, \mathbb{Q}_\ell(d-i))$. Nous ne rappellerons pas la construction de $c(Y)$ lorsque Y n'est pas supposé lisse ; voir [12], ou [30] pour plus de détails.

Proposition 1.1.1 — *Soient X une surface irréductible et lisse sur un corps k algébriquement clos, C une courbe intègre sur X, lisse sur k, $\alpha \in H^2(X, \boldsymbol{\mu}_n)$ la classe de C. La flèche de restriction $H^2(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^2(C, \boldsymbol{\mu}_n) = \mathbb{Z}/n$ coïncide avec l'application $H^2(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^4(X, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) = \mathbb{Z}/n, x \mapsto x \cup \alpha$.*

Démonstration — Voir [30], VI.6.5. □

1.2 Théorie de l'intersection

Nous utiliserons la théorie de l'intersection pour des surfaces uniquement. Voici les résultats essentiels. Soient k un corps algébriquement clos et S une surface irréductible, projective et lisse sur k. Les notions de diviseur de Weil et de Cartier coïncident ; on parlera simplement de diviseurs. On appelle *courbe sur S* tout diviseur effectif sur S, et l'on identifiera implicitement un tel diviseur avec le sous-schéma fermé de S qui s'en déduit. On dit que deux courbes C et D sur S se coupent *transversalement* en un point fermé P de S si l'idéal de $\mathscr{O}_{S,P}$ engendré par f et g est $\mathfrak{m}_{S,P}$, où f et g sont des équations locales de C et D (ce sont des diviseurs de Cartier donc ils sont localement définis par une seule équation). On dit qu'elles se coupent transversalement si elles se coupent transversalement en tout point fermé dans l'intersection de leurs supports. Enfin, si C est une courbe sur S, on note $[C]$ sa classe dans le groupe de Picard de S.

Théorème 1.2.1 — *Il existe une unique application bilinéaire symétrique $\varphi\colon \mathrm{Pic}(S) \times \mathrm{Pic}(S) \to \mathbb{Z}$ telle que si C et D sont deux courbes lisses sur S se coupant transversalement, $\varphi([C],[D])$ soit égal au nombre de points fermés dans l'intersection des supports de C et D.*

Démonstration — Voir [25], Ch. V, Th. 1.1. □

On appelle cet accouplement la forme d'intersection ; on note $(C.D)$ pour $\varphi([C],[D])$ et $(C^2) = (C.C)$. Deux diviseurs C_1 et C_2 sont dits *numériquement équivalents* si pour tout diviseur D, $(C_1.D) = (C_2.D)$.

Proposition 1.2.2 — *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ premier à la caractéristique de k. Si C et D sont deux diviseurs sur S, le cup-produit de leurs classes dans $H^2(S, \boldsymbol{\mu}_n)$ est égal à $(C.D)$ dans $\mathbb{Z}/n$.*

Démonstration — Voir [30], VI.9.5. □

1.3 Groupe de Brauer

Si X est un schéma, on appelle *groupe de Brauer cohomologique* (ou simplement groupe de Brauer) et l'on note $\mathrm{Br}(X)$ le groupe $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_\mathrm{m})$. Lorsque X est le spectre d'un corps, ceci coïncide avec la définition classique du groupe de Brauer (classes d'équivalence d'algèbres simples centrales de dimension finie sur ledit corps, munies du produit tensoriel).

Théorème 1.3.1 — *Soit X une courbe sur un corps k. Si k est séparablement clos, ou si k est fini et X propre,* $\mathrm{Br}(X) = 0$.

Démonstration — Si k est séparablement clos, voir [20], cor. 5.8. Si k est fini, voir [10], lemme 1.6 et proposition 1.14. □

1.4 Foncteur de Picard relatif

Soit $f \colon X \to S$ un morphisme de schémas. On note $\mathbf{Pic}_{X/S}$ le faisceau $R^1 f_\star \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, où la topologie considérée est la topologie fppf. On appelle ce foncteur $\mathbf{Pic}_{X/S} \colon (\mathbf{Sch}/S)^\circ \to \mathbf{Ab}$ le *foncteur de Picard relatif de X sur S.*

Proposition 1.4.1 — *Si f est propre ou si $f_\star \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$, on peut remplacer la topologie fppf par la topologie étale dans la définition de $\mathbf{Pic}_{X/S}$.*

Démonstration — Voir [9], p. 203. □

En toute rigueur, il aurait fallu préciser « le grand site étale » ; cette ambiguïté est cependant innocente, car il revient au même de calculer $R^1 f_\star \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ sur le grand site étale puis de restreindre le foncteur obtenu au petit site étale, ou de le calculer sur le petit site étale (cf. [30], prop. III.3.1).

On peut donc utiliser la suite spectrale de Leray pour f et $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ en topologie étale afin d'exprimer $\mathbf{Pic}_{X/S}$; on obtient ainsi facilement la proposition suivante.

Proposition 1.4.2 — *Soit $f \colon X \to S$ un morphisme de schémas quasi-compact et quasi-séparé, vérifiant $f_\star \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$ universellement. Il existe alors, pour tout S-schéma T, une suite exacte canonique :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_S T) \longrightarrow \mathbf{Pic}_{X/S}(T) \longrightarrow \mathrm{Br}(T) \longrightarrow \mathrm{Br}(X \times_S T)$$

Si de plus f admet une section, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_S T) \longrightarrow \mathbf{Pic}_{X/S}(T) \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée.

Proposition 1.4.3 — *Soit $f \colon X \to S$ un morphisme propre et plat, de présentation finie, à fibres géométriques réduites et connexes. Alors $f_\star \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$ universellement.*

Démonstration — Comme les hypothèses faites sur f sont stables par changement de base, il suffit de prouver que $f_\star \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$; c'est une conséquence de [21], 7.8.8. □

Il existe de nombreux théorèmes de représentabilité pour le foncteur de Picard relatif, par des schémas ou par des espaces algébriques. Notons-en deux.

Théorème 1.4.4 (Grothendieck) — *Soit $f \colon X \to S$ un morphisme projectif, de présentation finie, plat, et à fibres géométriques intègres. Alors $\mathbf{Pic}_{X/S}$ est représenté par un S-schéma localement de présentation finie.*

Démonstration — Cf. [23], no. 232, th. 3.1. □

Théorème 1.4.5 — *Soient k un corps et X un k-schéma propre ; $\mathbf{Pic}_{X/k}$ est représenté par un k-schéma localement de type fini.*

Démonstration — Cf. [34] et [37]. □

Si X est un schéma propre sur un corps k, on notera $\mathbf{Pic}^0_{X/k}$ la composante neutre du k-schéma en groupes $\mathbf{Pic}_{X/k}$, c'est-à-dire le sous-schéma fermé réduit d'espace topologique sous-jacent la composante connexe du neutre. On note par ailleurs $\mathrm{Pic}^0(X)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ constitué des classes algébriquement équivalentes à 0, c'est-à-dire des $[\mathscr{L}] \in \mathrm{Pic}(X)$ tels qu'il existe une variété connexe T sur k, un faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur $X \times_k T$ et deux points $a, b \in T(k)$ tels que $\mathscr{M}|_{X \times \{a\}} \approx \mathscr{L}$ et que $\mathscr{M}|_{X \times \{b\}}$ soit trivial. Le *groupe de Néron-Severi* de X est le faisceau quotient $\mathrm{NS}_{X/k} = \mathrm{Pic}_{X/k}/\mathrm{Pic}^0_{X/k}$. On note souvent $\mathrm{NS}(X) = \mathrm{NS}_{X/k}(k)$.

Proposition 1.4.6 — *Soit X un k-schéma propre. Supposons que X possède un point rationnel, de sorte que $\mathbf{Pic}_{X/k}(k) = \mathrm{Pic}(X)$. On a alors $\mathbf{Pic}^0_{X/k}(k) = \mathrm{Pic}^0(X)$.*

Démonstration — Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. Supposons $\mathscr{L}$ algébriquement équivalent à 0. Il existe une variété connexe T sur k, un faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur $X \times_k T$ et $a, b \in T(k)$ comme précédemment. La flèche $\mathrm{Pic}(X \times_k T) \to \mathbf{Pic}_{X/k}(T)$ et la classe de $\mathscr{M}$ déterminent un morphisme de schémas $g\colon T \to \mathbf{Pic}_{X/k}$. Comme T est connexe et g envoie b sur 0, g envoie a dans $\mathbf{Pic}^0_{X/k}$, d'où $[\mathscr{L}] \in \mathbf{Pic}^0_{X/k}(k)$. Inversement, si $[\mathscr{L}] \in \mathbf{Pic}^0_{X/k}(k)$, il suffit de prendre $T = \mathbf{Pic}^0_{X/k}$ (qui est bien une variété, car un k-schéma en groupes connexe et localement de type fini est de type fini), $a = [\mathscr{L}]$, $b = 0$, et pour $[\mathscr{M}] \in \mathrm{Pic}(X \times_k T)$ un relèvement de l'élément de $\mathbf{Pic}_{X/k}(T)$ correspondant à l'inclusion $T \to \mathbf{Pic}_{X/k}$. □

1.5 Variétés abéliennes

Soient k un corps et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On appelle *variété abélienne* sur k tout k-groupe algébrique propre, lisse et connexe. On prouve qu'une variété abélienne est automatiquement projective ([29], §7) et géométriquement connexe (combiner [22], 4.5.14 et 4.4.4). Si A et B sont deux variétés abéliennes sur k, on note $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ le groupe des k-morphismes de variétés abéliennes de A dans B, $\mathrm{Hom}^0_k(A, B) = \mathrm{Hom}_k(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{sch.}}(A, B)$ le groupe des k-morphismes de schémas de A dans B, encore noté $B(A)$.

Soit A une variété abélienne sur k. Pour $a \in A(k)$, soit $t_a\colon A \to A$ la translation par a. Notons $\mathrm{Pic}^t(A)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(A)$ constitué des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles $\mathscr{L}$ tels que $m^\star\mathscr{L} \approx p^\star\mathscr{L} \otimes q^\star\mathscr{L}$, où m, p et q sont respectivement l'addition, la première et la seconde projection $A \times A \to A$. On vérifie facilement que $[\mathscr{L}] \in \mathrm{Pic}^t(A)$ si et seulement si $t_a^\star\mathscr{L}_{\overline{k}} \approx \mathscr{L}_{\overline{k}}$ pour tout $a \in A(\overline{k})$: en d'autres termes, $\mathrm{Pic}^t(A)$ est constitué des classes invariantes par translation.

Définissons un foncteur $\hat{A}\colon (\mathbf{Sch}/k)^\circ \to \mathbf{Ab}$ par :

$$\hat{A}(T) = \left\{[\mathscr{L}] \in \mathrm{Pic}\left(A \times_k T\right) ; \mathscr{L}|_{\{0\}\times T} \text{ est trivial et } \forall t \in T,\ \left[\mathscr{L}|_{A\times\{t\}}\right] \in \mathrm{Pic}^t\left(A \times \{t\}\right)\right\}$$

Ce foncteur est représentable (cf. [33], §13) ; c'est un k-schéma en groupes et même une variété abélienne. On l'appelle la *variété abélienne duale* de A. On a par définition $\hat{A}(k) = \mathrm{Pic}^t(A)$ et $\hat{A}(\overline{k}) = \mathrm{Pic}^t(A_{\overline{k}})$. L'identité de $\hat{A}$ définit un élément canonique de $\mathrm{Pic}(A \times_k \hat{A})$, c'est la classe d'un faisceau inversible $\mathscr{P}_A$ sur $A \times_k \hat{A}$, que l'on appelle *faisceau de Poincaré*. Il n'est défini qu'à isomorphisme près. Par définition, $\mathscr{P}_A|_{\{0\}\times\hat{A}}$ est trivial ; on vérifie tout de suite qu'il en va de même pour $\mathscr{P}_A|_{A\times\{0\}}$ (remarquer que l'application $A \to A \times_k \hat{A}$, $x \mapsto (x, 0)$, est obtenue par changement de base à partir de la section nulle $0 \in \hat{A}(k) = \mathrm{Pic}^t(A)$).

Proposition 1.5.1 — *On a $\mathbf{Pic}^0_{A/k} = \hat{A}$ et $\mathrm{Pic}^t(A) = \mathrm{Pic}^0(A)$.*

Démonstration — L'inclusion $\mathrm{Pic}^0(A) \subset \mathrm{Pic}^t(A)$ se prouve à l'aide du théorème du cube ; voir [33], §8, énoncé (vi) pour plus de détails. L'autre inclusion découle directement de l'existence de la variété abélienne duale. Le neutre de A permet de scinder la suite exacte courte de la proposition 1.4.2, d'où

$$\mathbf{Pic}_{A/k}(T) = \left\{[\mathscr{L}] \in \mathrm{Pic}\left(A \times_k T\right) ; \mathscr{L}|_{\{0\}\times T} \text{ est trivial}\right\}.$$

Ceci montre, d'après l'identification entre Pic^t et Pic^0, la proposition 1.4.6 et la définition de $\hat{A}$, que

$$\hat{A}(T) = \left\{f \in \mathbf{Pic}_{A/k}(T) ; f(T) \subset \mathbf{Pic}^0_{A/k} \text{ ensemblistement}\right\}.$$

En particulier, en prenant $T = \hat{A}$, l'identité induit un morphisme $\hat{A} \to \mathbf{Pic}_{A/k}$ dont l'image ensembliste est incluse dans l'espace topologique sous-jacent à $\mathbf{Pic}^0_{A/k}$. Comme $\hat{A}$ est réduit, ce morphisme se factorise donc en $\psi\colon \hat{A} \to \mathbf{Pic}^0_{A/k}$. Si l'on prend maintenant $T = \mathbf{Pic}^0_{A/k}$ et f égal à l'inclusion, on obtient une flèche $\varphi\colon \mathbf{Pic}^0_{A/k} \to \hat{A}$. On vérifie tout de suite que φ et ψ sont des isomorphismes réciproques. □

Proposition 1.5.2 — *Soient A et B deux variétés abéliennes sur k. Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Hom}_k(A,B) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(A \times_k \hat{B}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(\hat{B})\right) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{NS}(A \times_k \hat{B}) \longrightarrow \mathrm{NS}(A) \times \mathrm{NS}(\hat{B})\right),$$

où la flèche entre groupes de Picard (resp. de Néron-Severi) est induite par $(\mathrm{Id}_A \times 0_{\hat{B}}, 0_A \times \mathrm{Id}_{\hat{B}})$.

Démonstration — L'application canonique $B \to \hat{\hat{B}}$ est un isomorphisme. D'où, par définition de $\hat{\hat{B}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{sch.}}(A,B) &= \hat{\hat{B}}(A) \\
&= \left\{[\mathscr{L}] \in \mathrm{Pic}\left(\hat{B} \times_k A\right) \,;\, \mathscr{L}|_{\{0\}\times A} \text{ trivial et } \forall t \in A,\ \left[\mathscr{L}|_{\hat{B}\times\{t\}}\right] \in \mathrm{Pic}^0\left(\hat{B} \times \{t\}\right)\right\} \\
&= \left\{[\mathscr{L}] \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}\left(A \times_k \hat{B}\right) \to \mathrm{Pic}(A)\right) \,;\, \forall t \in A,\ \left[\mathscr{L}|_{\{t\}\times\hat{B}}\right] \in \mathrm{Pic}^0\left(\{t\} \times \hat{B}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Pour qu'un morphisme de k-schémas $A \to B$ soit un morphisme de variétés abéliennes, il suffit qu'il envoie 0 sur 0 ; cela revient ici à demander que $\mathscr{L}|_{\{0\}\times\hat{B}}$ soit trivial. Sous cette hypothèse, la condition $\left[\mathscr{L}|_{\{t\}\times\hat{B}}\right] \in \mathrm{Pic}^0\left(\{t\} \times \hat{B}\right)$ pour $t \in A$ est alors automatiquement vérifiée d'après l'interprétation de $\mathrm{Pic}^0(B)$ comme l'ensemble des classes algébriquement équivalentes à 0. D'où :

$$\mathrm{Hom}_k(A,B) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}(A \times_k \hat{B}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(\hat{B})\right)$$

Lemme 1.5.3 (« seesaw principle ») — *Soient T et V deux variétés géométriquement intègres sur k, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ des faisceaux inversibles sur $V \times_k T$. Supposons V propre sur k. Si $\mathscr{L}_v \approx \mathscr{M}_v$ pour un $v \in V(k)$ et si $\mathscr{L}_t \approx \mathscr{M}_t$ pour tout $t \in T$, alors $\mathscr{L} \approx \mathscr{M}$.*

Démonstration — Voir [29], cor. 5.2. □

Soit $[\mathscr{L}] \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}^0(A \times_k \hat{B}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(\hat{B})\right)$. Les faisceaux inversibles $\mathscr{L}|_{A\times\{0\}}$ et $\mathscr{L}|_{\{0\}\times\hat{B}}$ sont alors triviaux, mais comme $[\mathscr{L}]$ est invariante par translations, $\mathscr{L}|_{A\times\{t\}}$ est trivial pour tout $t \in \hat{B}$. Le lemme entraîne alors que $\mathscr{L}$ est trivial. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Pic}^0(A \times_k \hat{B}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(A) \times \mathrm{Pic}^0(\hat{B})\right) = 0$$

et l'on en déduit l'égalité sur les groupes de Néron-Severi, puisque $\mathrm{NS}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ lorsque k est algébriquement clos. □

Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de variétés abéliennes. Dès que deux des trois conditions suivantes sont remplies, la troisième l'est aussi :

1. $\dim A = \dim B$;
2. f est surjectif ;
3. $\mathrm{Ker}(f)$ est un k-schéma fini.

On dit alors que f est une *isogénie* et que A et B sont *isogènes* ; c'est une relation d'équivalence. Notons qu'une isogénie est un morphisme localement libre, et qu'une isogénie est étale si et seulement si son noyau est un k-schéma étale. On écrit $\deg(f)$ pour le degré de f comme morphisme fini si f est une isogénie, 0 sinon. Si $f\colon A \to B$ est une isogénie, il existe une isogénie $g\colon B \to A$ telle que $g \circ f$ soit la multiplication par $\deg(f)$; dans ce cas $f \circ g$ est aussi la multiplication par $\deg(f)$. Les isogénies sont donc des isomorphismes dans la catégorie dont les objets sont les variétés abéliennes sur k et dont les ensembles de flèches sont les $\mathrm{Hom}_k^0(A,B)$.

Théorème 1.5.4 — *Soit A une variété abélienne sur un corps k. Il existe $r \in \mathbb{N}$, des variétés abéliennes simples $A_1, \ldots, A_r$ sur k deux à deux non isogènes et des entiers $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}^\star$, tels que A soit isogène à $\prod A_i^{n_i}$. (Une variété abélienne est simple si elle ne contient pas de sous-variété abélienne stricte non nulle.)*

DÉMONSTRATION — Voir [29], prop. 12.1. □

COROLLAIRE 1.5.5 — *L'anneau* $\mathrm{End}_k^0(A)$ *est semi-simple.*

THÉORÈME 1.5.6 — *Soit A une variété abélienne sur k de dimension d. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. On note $n_A\colon A \to A$ la multiplication par n dans A. C'est une isogénie de degré n^{2d} ; elle est étale si et seulement si n est premier à la caractéristique de k, et dans ce cas ${}_nA(\overline{k}) \approx (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.*

DÉMONSTRATION — Voir [29], th. 8.2. □

On déduit du théorème précédent que le *module de Tate ℓ-adique* $T_\ell(A) = T_\ell(A(\overline{k})) = \varprojlim \left({}_{\ell^n}A(\overline{k})\right)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $2d$. Il est muni d'une action linéaire et continue du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. On notera par la suite $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

THÉORÈME 1.5.7 — *Soit A une variété abélienne sur k. Il existe un isomorphisme canonique G-équivariant $H^1_{ét}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A), \mathbb{Z}_\ell)$. De plus, les applications*

$$\bigwedge_{\mathbb{Z}_\ell}^{r} H^1_{ét}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^r_{ét}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

induites par le cup-produit sont des isomorphismes pour tout r.

DÉMONSTRATION — Voir [29], th. 15.1. □

Ce théorème a pour corollaire que $n_A\colon A \to A$ induit la multiplication par n^r sur $H^r_{\text{ét}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell)$. La proposition suivante explicite l'action de n_A sur $\mathrm{Pic}(A)$.

PROPOSITION 1.5.8 — *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur une variété abélienne A sur k. On a alors, pour $n \in \mathbb{Z}$,*

$$n_A^\star \mathscr{L} \approx \mathscr{L}^{(n^2+n)/2} \otimes (-1)_A^\star \mathscr{L}^{(n^2-n)/2},$$

en particulier n_A agit par multiplication par n^2 sur le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(A)$.

DÉMONSTRATION — Voir [29], cor. 6.6 pour le premier énoncé. Le corollaire sur $\mathrm{NS}(A)$ s'en déduit en remarquant que la multiplication par -1 agit comme l'identité sur $\mathrm{NS}(A)$. □

Rappelons enfin que l'on dispose de l'*accouplement de Weil* entre les modules de Tate d'une variété abélienne et de sa duale :

$$H_0\colon T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(\hat{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

Cet accouplement est une dualité parfaite G-équivariante. On en déduit un isomorphisme canonique de G-modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(\hat{A}), \mathbb{Z}_\ell(1)) = T_\ell(A).$$

Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur A, on note $\varphi_{\mathscr{L}}\colon A \to \hat{A}$ le morphisme qui induit $x \mapsto t_x^\star \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ sur les points à valeurs dans $\overline{k}$. Une *polarisation* sur A est une isogénie $f\colon A \to \hat{A}$ telle qu'il existe un faisceau inversible ample $\mathscr{L}$ sur $A_{\overline{k}}$ tel que $f_{\overline{k}} = \varphi_{\mathscr{L}}$. Si θ est une polarisation, on note $H_0^\theta\colon T_\ell(A) \times T_\ell(A) \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ l'accouplement déduit de θ (i.e. $H_0^\theta(x, y) = H_0(x, T_\ell(\theta)(y))$), et $H^\theta\colon V_\ell(A) \times V_\ell(A) \to \mathbb{Q}_\ell(1)$ celui que l'on obtient par extension des scalaires. Ce sont des formes bilinéaires alternées et G-équivariantes ; H^θ est toujours non dégénérée, et il en va de même pour H_0^θ si le degré de θ est premier à ℓ. Lorsque $\varphi_{\mathscr{L}}$ est une polarisation (par exemple si $\mathscr{L}$ est ample), on écrira $H^{\mathscr{L}}$ (resp. $H_0^{\mathscr{L}}$) au lieu de $H^{\varphi_{\mathscr{L}}}$ (resp. $H_0^{\varphi_{\mathscr{L}}}$).

1.6 Surfaces algébriques

1.6.1 Généralités

Soit X une surface propre, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k. On appelle *faisceau canonique* sur X et l'on note ω_X la seconde puissance extérieure du $\mathscr{O}_X$-module des différentielles de Kähler de X sur k. C'est un faisceau inversible, isomorphe à $\mathscr{O}_X(K)$ pour un diviseur K. On dit que K est un *diviseur canonique*. Si D est un diviseur sur X, on note $|D|$ le système linéaire complet associé à D, c'est-à-dire l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D, muni de sa structure canonique d'espace projectif sur k.

Proposition 1.6.1 (formule d'adjonction) — *Soit C une courbe lisse sur X, de genre g. On a $2g-2 = (C.(C+K))$.*

Démonstration — Voir [25], V.1.5. □

Théorème 1.6.2 (Riemann-Roch pour les surfaces) — *Pour tout $\mathscr{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$,*

$$\chi(\mathscr{L}) = \chi(\mathscr{O}_X) + \frac{1}{2}((\mathscr{L}^2) - (\mathscr{L}.\omega_X)).$$

Démonstration — Voir [25], V.1.6. □

Théorème 1.6.3 (dualité de Serre) — *Le k-espace vectoriel $H^2(X, \omega_X)$ est de dimension* 1. *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. Pour $i \in \{0,1,2\}$, le cup-produit*

$$H^i(X, \mathscr{L}) \otimes_k H^{2-i}(X, \omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{-1}) \longrightarrow H^2(X, \omega_X)$$

est une dualité parfaite de k-espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration — Voir [25], II.7. □

Proposition 1.6.4 (formule de Noether) — *Notons* $\mathrm{EP}(X)$ *la caractéristique d'Euler-Poincaré ℓ-adique de X pour un nombre premier ℓ inversible dans k, i.e.* $\mathrm{EP}(X) = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$. *On a alors :*

$$12\chi(\mathscr{O}_X) = (\omega_X^2) + \mathrm{EP}(X)$$

Démonstration — Voir [25], V.1.6.1 et [18], exp. VII, cor. 4.9. □

On dit que X est une surface *relativement minimale* si pour toute surface X' propre, lisse et connexe, tout morphisme birationnel $X \to X'$ est un isomorphisme. On dit que X est *minimale* si pour toute surface X' propre, lisse et connexe, toute application birationnelle $X' \to X$ est un morphisme. Toute surface est birationnellement équivalente à une surface relativement minimale ; celles-ci ont été classifiées par Enriques en caractéristique nulle, Bombieri et Mumford en toute caractéristique.

Proposition 1.6.5 — *Soient B une courbe propre et lisse de genre g, $f\colon X \to B$ un morphisme de schémas sans fibre multiple, tels que la fibre générique de f soit une courbe elliptique et que $f_\star\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_B$. On suppose que les fibres de f ne contiennent pas de composante irréductible rationnelle d'auto-intersection -1. Alors il existe un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur B, de degré $2g-2+\chi(\mathscr{O}_X)$, tel que $\omega_X = f^\star\mathscr{L}$.*

Démonstration — C'est un cas particulier du théorème 2 de [7]. □

Théorème 1.6.6 — *Soit S une surface propre sur k, normale, à singularités rationnelles. Il existe une surface X propre et lisse sur k et un morphisme $f\colon X \to S$ qui induise un isomorphisme sur l'ouvert de lissité de S et qui vérifie $R^1 f_\star \mathscr{O}_X = 0$, tels que pour toute surface X' propre et lisse sur k et tout morphisme birationnel $f'\colon X' \to S$, f' se factorise par X.*

DÉMONSTRATION — Voir [28], th. 4.1. □

THÉORÈME 1.6.7 (CRITÈRE DE CONTRACTIBILITÉ D'ARTIN) — *Soient X une surface propre sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$ et C une courbe connexe sur X. On suppose X régulière aux points de C. Notons $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ les composantes irréductibles de C, M la matrice d'intersection de C, i.e. $M = ((C_i.C_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant s}$, et $p_a(C)$ le genre arithmétique (défini pour un diviseur quelconque de X par la formule d'adjonction) de C. Si M est définie-négative et $p_a(C) = 0$, C est contractible, i.e. il existe une surface propre $\overline{X}$ sur k et un k-morphisme $\pi \colon X \to \overline{X}$ envoyant C sur un point fermé $P \in \overline{X}$, tels que π induise un isomorphisme de $X \backslash C$ sur $\overline{X} \backslash \{P\}$ et que P soit un point normal de $\overline{X}$.*

DÉMONSTRATION — Voir [2]. □

1.6.2 Surfaces K3

Soit X une surface propre et connexe sur un corps k. Lorsque k est algébriquement clos, on dit que X est une *surface* $K3$ si X est lisse, ω_X est trivial et si $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$; X est alors une surface minimale. En général, on dit que X est une surface $K3$ si $X_{\overline{k}}$ en est une, en notant $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Supposons dorénavant k algébriquement clos et fixons une surface $K3$ X. Le lemme suivant est une conséquence immédiate du théorème de Riemann-Roch et de la dualité de Serre.

LEMME 1.6.8 — *Si X est une surface $K3$, $\chi(\mathscr{O}_X) = 2$, et pour tout diviseur D sur X :*

$$\frac{1}{2}(D^2) = \chi(\mathscr{O}_X(D)) - 2.$$

LEMME 1.6.9 — *Sur une surface $K3$, l'équivalence numérique et l'équivalence linéaire des diviseurs coïncident.*

DÉMONSTRATION — Soit D un diviseur numériquement équivalent à 0 sur une surface $K3$ X. D'après le lemme 1.6.8, $\dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(D)) + \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(-D)) \geqslant 2$, d'où $|D| \neq \varnothing$ ou $|-D| \neq \varnothing$ mais un diviseur effectif ne peut pas être numériquement équivalent à 0 sur une surface projective. □

Supposons maintenant la caractéristique de k différente de 2. Parmi les propositions suivantes, celles que nous ne démontrons pas sont prouvées dans [38].

PROPOSITION 1.6.10 — *Si $|L|$ est un système linéaire complet sur X, sans composante fixe, avec $(L^2) > 0$, alors $|L|$ est sans point base et le membre générique de $|L|$ est une courbe lisse irréductible (i.e. il existe un ouvert non vide de l'espace projectif dual de $|L|$, dont les points correspondent à des courbes lisses irréductibles sur X).*

PROPOSITION 1.6.11 — *Soit C une courbe intègre sur X. On a $(C^2) = -2$ si et seulement si $\dim |C| = 0$, si et seulement si $C \approx \mathbb{P}^1$, et $(C^2) = 0$ si et seulement si $\dim |C| = 1$ si et seulement si $p_a(C) = 1$.*

PROPOSITION 1.6.12 — *Soit L un faisceau inversible sur X tel que $|L| \neq \varnothing$ et tel que L soit sans composante fixe. Alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. *$(L^2) > 0$ et le membre générique de $|L|$ est une courbe intègre ;*
2. *$(L^2) = 0$ et $L \approx \mathscr{O}_X(kE)$, avec $k \in \mathbb{N}^\star$, et E une courbe intègre de genre arithmétique 1.*

PROPOSITION 1.6.13 — *Soit Z une courbe intègre sur X. Pour tout $q > 0$, $H^q(X, \mathscr{O}_X(Z)) = 0$, et $\dim |Z| = \frac{1}{2}(Z^2) + 1$.*

DÉMONSTRATION — La première assertion entraîne la seconde d'après la formule de Riemann-Roch. Pour $q > 2$, $H^q(X, \mathscr{O}_X(Z))$ est évidemment nul ; pour $q = 2$, par dualité de Serre, il suffit de voir que $\mathscr{O}(-Z)$

n'admet pas de section globale non nulle, ce qui est vrai puisque Z est effectif. Pour le cas $q = 1$, utilisons la suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules suivante, où i désigne l'inclusion de Z dans X :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X(Z) \longrightarrow (i_\star \mathscr{O}_Z) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(Z) \longrightarrow 0$$

On a $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ puisque X est $K3$ et $H^2(X, \mathscr{O}_X(Z)) = 0$ comme on vient de le prouver. Par conséquent $H^1(X, \mathscr{O}_X(Z))$ est le noyau de $H^1(Z, i^\star \mathscr{O}_X(Z)) \to H^2(X, \mathscr{O}_X)$, qui est surjectif. On sait que $i^\star \mathscr{O}_X(Z)$ est le faisceau dualisant sur Z, ce qui montre que $\dim_k H^1(X, \mathscr{O}_X(Z)) = \dim_k H^0(Z, \mathscr{O}_Z) = 1$. Comme par ailleurs $\dim_k H^2(X, \mathscr{O}_X) = 1$ (dualité de Serre), on en déduit le résultat voulu. □

Proposition 1.6.14 — *Soient Z et C des courbes intègres sur X, avec $(Z.C) \geqslant 2$. Alors C n'est pas une composante fixe de $|Z + C|$.*

Démonstration — La proposition 1.6.13 montre que $(C^2) \geqslant -2$. Par conséquent, $((Z + C)^2) > (Z^2)$ et donc $\chi(\mathscr{O}_X(Z+C)) > \chi(\mathscr{O}_X(Z))$. Par dualité de Serre, comme $Z+C$ est effectif, on a $H^2(X, \mathscr{O}_X(Z+C)) = 0$. En utilisant la proposition 1.6.13, on obtient donc $\dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(Z)) < \dim_k H^0(X, \mathscr{O}_X(Z + C))$, ce qui prouve que la flèche évidente $H^0(X, \mathscr{O}_X(Z)) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(Z + C))$ n'est pas surjective, d'où le résultat. □

Proposition 1.6.15 — *Soit C une courbe intègre sur X. Lorsque D est un diviseur sur X, notons φ_D l'application rationnelle $X \dashrightarrow |D|$ qu'il définit. Si $p_a(C) \geqslant 2$ (resp. $p_a(C) \geqslant 3$), φ_{3C} (resp. φ_{2C}) est un morphisme birationnel sur son image, qui est une surface de degré $9(2p_a(C) - 2)$ (resp. $4(2p_a(C) - 2)$) dans $\mathbb{P}_k^{9p_a(C)-8}$ (resp. $\mathbb{P}_k^{4p_a(C)-3}$).*

Démonstration — Saint-Donat prouve dans [38] que si D est un diviseur sur X tel que $(D^2) > 0$ et que $|D|$ soit sans composante fixe, φ_D est un morphisme dans $\mathbb{P}_k^{p_a(D)}$ dont l'image est une surface ; de plus, si φ_D est birationnel sur son image, son image est de degré $2p_a(D) - 2$, et sinon, φ_D est génériquement fini de degré 2 sur son image. Il reste donc à prouver que φ_{nC} (pour $n = 2$ ou 3, selon les cas) ne peut pas être génériquement de degré 2 sur son image S. Supposons qu'il le soit. Comme k n'est pas de caractéristique 2, il existe un ouvert dense U de S tel que $\varphi_{nC}^{-1}(U) \to U$ soit fini étale. D'après la proposition 1.6.10 et l'inégalité $\dim |C| > 0$, il existe une courbe lisse intègre C' sur X dont le point générique est dans $\varphi_{nC}^{-1}(U)$, linéairement équivalente à C.

Lemme 1.6.16 — *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur une courbe Z intègre, propre et lisse de genre g. L'application rationnelle $\varphi_{\mathscr{L}} \colon Z \dashrightarrow |\mathscr{L}|$ est une immersion fermée si $\deg(\mathscr{L}) > 2g$.*

Démonstration — Ce lemme est bien connu et découle de la formule de Riemann-Roch (on vérifie que $\mathscr{L}$ sépare les points et les vecteurs tangents). □

La restriction de φ_{nC} à C' est génériquement de degré 2 sur son image ; le faisceau inversible $\mathscr{O}_X(nC)|_{C'}$ sur C' ne définit donc pas une immersion fermée, d'où $(nC.C') \leqslant 2p_a(C)$ par le lemme précédent. L'inégalité se réécrit $(2n - 2)p_a(C) \leqslant 2n$, ce qui est contradictoire puisque $n = 3$ si $p_a(C) \geqslant 2$ et $n = 2$ si $p_a(C) \geqslant 3$. □

1.7 Modèles de Néron

Soit S un schéma de Dedekind intègre (rappelons qu'un schéma est de Dedekind s'il est noethérien, normal et de dimension 1). Notons K le corps des fonctions de S.

Définition 1.7.1 — *Soit X un K-schéma lisse, séparé et de type fini. On appelle* modèle *de X sur S tout couple $(\mathscr{X}, u)$ où $\mathscr{X}$ est un S-schéma et u est un K-isomorphisme $X \to \mathscr{X}_K$. La donnée de u sera toujours sous-entendue. On appelle* modèle de Néron *de X sur S tout modèle $\mathscr{X}$ qui soit lisse, séparé et de type fini sur S, et qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout S-schéma lisse $\mathscr{Y}$, tout K-morphisme $\mathscr{Y}_K \to \mathscr{X}_K$ s'étend en un S-morphisme $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ d'une unique manière.*

Proposition 1.7.2 — *Soit X un K-schéma en groupes lisse, séparé et de type fini. Si $\mathscr{X}$ est un modèle de Néron de X sur S, la structure de K-schéma en groupes de X s'étend d'une unique manière en une structure de S-schéma en groupes sur $\mathscr{X}$.*

DÉMONSTRATION — Immédiat. □

Considérons le cas particulier où X est une courbe elliptique sur K. On appelle *modèle propre et régulier minimal* de X un modèle régulier $\mathscr{X}$ de X sur S, propre et plat sur S, tel que pour tout modèle régulier $\mathscr{Y}$ de X sur S, propre et plat sur S, tout S-morphisme $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ qui induise un isomorphisme sur les fibres génériques soit un isomorphisme. Il en existe toujours un (cf. [1], [27], [35]).

THÉORÈME 1.7.3 — *Soit E une courbe elliptique sur K, $\mathscr{E}$ un modèle propre et régulier minimal de E sur S. L'ouvert de lissité de $\mathscr{E} \to S$ (cf. [22], 6.8.7) est alors un modèle de Néron de E sur S.*

DÉMONSTRATION — Voir [40], p. 325, th. 6.1. □

Kodaira et Néron ont classifié les fibres spéciales géométriques des modèles propres et réguliers minimaux des courbes elliptiques sur K. On peut consulter la table des configurations possibles dans [40] (p. 354) ou [35]. Notons F une telle fibre géométrique, $F_1, \ldots, F_s$ ses composantes irréductibles, n_i la multiplicité de F_i dans F. On suppose que F n'est pas lisse.

PROPOSITION 1.7.4 — *Les F_i sont des courbes rationnelles d'auto-intersection -2. Si $s > 1$, les F_i sont lisses. Pour tout i_0 tel que $n_{i_0} = 1$, la courbe $\sum_{i \neq i_0} F_i$ est un arbre*[1]*. Si D est une combinaison linéaire des F_i, $(D^2) \leqslant 0$, et $(D^2) = 0$ implique que D est un multiple rationnel de F, i.e. il existe $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^\star$ tels que $bD = aF$ (en particulier la matrice d'intersection $((F_i.F_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant s}$ est négative, et toute sous-matrice carrée stricte est définie-négative). Enfin, si l'on note K un diviseur canonique sur $\mathscr{E}$, $(K.F_i) = 0$ pour tout i.*

DÉMONSTRATION — Voir [40], IV.7.3 et IV.8.1. □

PROPOSITION-DÉFINITION 1.7.5 — *Si G est un schéma en groupes lisse et de présentation finie sur un schéma S, la réunion des composantes connexes du neutre dans chaque fibre est un ouvert de G, et même un sous-schéma en groupes, que l'on appelle la* composante neutre *de G.*

DÉMONSTRATION — Voir [22], 15.6.5. □

1.8 Courbes relatives, jacobiennes

Soit X une courbe propre sur un corps k. Rappelons que l'on définit le *degré* d'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X par la formule de Riemann-Roch

$$\chi(\mathscr{L}) = \deg(\mathscr{L}) + \chi(\mathscr{O}_X),$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré : $\chi(\mathscr{L}) = \dim_K H^0(X, \mathscr{L}) - \dim_K H^1(X, \mathscr{L})$. On appelle *jacobienne de X* le k-groupe algébrique $\mathbf{Pic}^0_{X/k}$. C'est un k-schéma lisse (cf. [9], 8.4/2). Si de plus X est lisse sur k, $\mathbf{Pic}^0_{X/k}$ est une variété abélienne (cf. [9], 8.4/3).

Ces notions nous seront surtout utiles dans un cadre relatif. Soit S un schéma. On appelle *courbe relative* (ou simplement courbe) sur S tout S-schéma X plat et localement de présentation finie dont les fibres sont purement de dimension 1. Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur une courbe X propre sur S, son *degré* est par définition la fonction $\deg(\mathscr{L}) \colon S \to \mathbb{Z}$ qui à un point $s \in S$ associe le degré de la restriction $\mathscr{L}_s$ de $\mathscr{L}$ à la courbe propre X_s sur $\kappa(s)$. Cette fonction est localement constante (cf. [9], 9.1/2). Notons $\mathbf{Pic}^n_{X/S}$ le sous-foncteur de $\mathbf{Pic}_{X/S}$ constitué des classes de faisceaux inversibles de degré n, pour $n \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 1.8.1 — *Soit $X \to S$ une courbe projective dont les fibres géométriques sont intègres, avec S connexe. Le foncteur $\mathbf{Pic}_{X/S}$ est représenté par un S-schéma lisse et séparé, $\mathbf{Pic}^n_{X/S}$ est un sous-schéma ouvert et fermé connexe de $\mathbf{Pic}_{X/S}$, et l'on a ainsi une décomposition*

$$\mathbf{Pic}_{X/S} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{Pic}^n_{X/S}.$$

[1] On dit qu'une courbe réduite $\sum Z_i$ sur une surface est un *arbre* si elle est connexe et si les trois conditions suivantes sont vérifiées : $(Z_i.Z_j) \leqslant 1$ pour $i \neq j$, trois Z_i deux à deux distincts n'ont jamais un point en commun, il n'existe pas de suite $i_1, \ldots, i_n$ avec $(Z_i.Z_{i+1}) \neq 0$ pour tout i et $(Z_n.Z_1) \neq 0$.

De plus, $\mathbf{Pic}^n_{X/S}$ *est un torseur sous* $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$.

DÉMONSTRATION — Voir [9], 9.3/1. □

Remarquons que la notation $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ est compatible avec celle introduite précédemment pour le cas où S est le spectre d'un corps. On appelle ce S-schéma en groupes la *jacobienne* de $X \to S$.

Dans certains cas, la jacobienne de X sur S se relie à un modèle de Néron de la jacobienne de la fibre générique de X. Le théorème suivant précise cette relation. On dit qu'un schéma X est *à singularités rationnelles* s'il existe un schéma régulier X' et un morphisme propre $g\colon X' \to X$ qui induise un isomorphisme sur le lieu régulier de X, et tel que $R^1 g_\star \mathscr{O}_{X'} = 0$.

THÉORÈME 1.8.2 — *Soient R un anneau de valuation discrète, $S = \operatorname{Spec} R$, K le corps des fractions de R et X une courbe projective sur S, à fibres géométriquement intègres, admettant une section. On suppose que X est un schéma normal à singularités rationnelles et que X_K est géométriquement irréductible. Alors la jacobienne de X_K admet un modèle de Néron sur S, dont la composante neutre est isomorphe à $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$.*

DÉMONSTRATION — Voir [9], 9.7/1. □

2 Énoncés de la conjecture et de quelques variantes

2.1 Énoncé

Soit k un corps de type fini sur son sous-corps premier. On note $\overline{k}$ une clôture séparable de k et G le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Soient ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k, i un entier naturel et X une variété projective et lisse sur k.

CONJECTURE DE TATE — *On note $T^i(X)$ la conjecture suivante. La flèche*

$$\mathscr{Z}^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{2i}_{ét}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i))^G,$$

déduite de l'application de classe de cycle pour $X_{\overline{k}}$, est surjective.

Par la suite on s'intéressera surtout au cas $i = 1$. $T^1(X)$ équivaut à la surjectivité de l'application $\operatorname{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^2(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G$ obtenue à partir de la suite de Kummer.

2.2 Conjecture de Tate et modules de Tate des variétés abéliennes

Soient A et B des variétés abéliennes sur k. La fonctorialité du module de Tate fournit une application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_k(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell[G]}(V_\ell(A), V_\ell(B))$$

dont on sait qu'elle est toujours injective (cf. [29], th. 12.5). Notons $H(A, B)$ l'énoncé « Φ est surjective ».

LEMME 2.2.1 — *Les propriétés $H(A, B)$ et $H(A, \hat{B})$ sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION — B et $\hat{B}$ sont isogènes (par exemple, le morphisme $\varphi_{\mathscr{L}}\colon B \to \hat{B}$ est une isogénie si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible ample) et $H(A, B)$ est évidemment invariante par isogénie. □

PROPOSITION 2.2.2 — *Soient A et B deux variétés abéliennes sur k. Les propriétés $T^1(A)$, $T^1(\hat{B})$ et $T^1(A \times_k \hat{B})$ entraînent $H(A, B)$.*

DÉMONSTRATION — Notons $K = H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_{\text{ét}}(\hat{B}_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$. D'après la proposition 1.5.2 et la formule de Künneth en cohomologie ℓ-adique, le diagramme suivant est commutatif et ses lignes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_k(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(A \times_k \hat{B}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(\hat{B})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K(1)^G \arrow[r] & H^2_{\text{ét}}((A \times_k \hat{B})_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \arrow[r] & H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \times H^2_{\text{ét}}(\hat{B}_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G
\end{tikzcd}$$

Les hypothèses $T^1(A)$, $T^1(\hat{B})$ et $T^1(A \times_k \hat{B})$ impliquent que les deux flèches verticales de droite sont des isomorphismes ; il en va donc de même pour la flèche verticale de gauche. Par ailleurs, en utilisant le théorème 1.5.7 et l'accouplement de Weil, on obtient

$$\begin{aligned}
K(1) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A), \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(\hat{B}), \mathbb{Q}_\ell(1)) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A), \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V_\ell(B) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A), V_\ell(B))
\end{aligned}$$

puisque $V_\ell(A)$ et $V_\ell(B)$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. Le résultat s'ensuit. □

PROPOSITION 2.2.3 — *Soit A une variété abélienne sur k ; $H(A,A)$ entraîne $T^1(A)$.*

DÉMONSTRATION — D'après le lemme 2.2.1, il suffit de prouver que $H(A, \hat{A})$ entraîne $T^1(A)$. Notons m, p et q respectivement l'addition, la première et la seconde projection $A \times_k A \to A$. Soient

$$\alpha\colon \mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{NS}(A \times_k A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \quad \text{et} \quad \alpha'\colon H^2(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \to H^2(A_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G$$

les flèches $m^\star - p^\star - q^\star$. Soient

$$\beta\colon \mathrm{NS}(A \times_k A) \otimes_Z \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \quad \text{et} \quad \beta'\colon H^2(A_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \to H^2(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G$$

les flèches induites par la diagonale $\Delta\colon A \to A \times_k A$. On a ainsi $\beta \circ \alpha = (m \circ \Delta)^\star - (p \circ \Delta)^\star - (q \circ \Delta)^\star = (2\mathrm{Id})^\star - \mathrm{Id}^\star - \mathrm{Id}^\star$, et donc $\beta \circ \alpha = 2$ d'après la proposition 1.5.8. De même, $\beta' \circ \alpha' = 2$ d'après le théorème 1.5.7. Par ailleurs, on vérifie tout de suite que les composées

$$\mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{NS}(A \times_k A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow (\mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell) \times (\mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell)$$

et

$$H^2(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \longrightarrow H^2(A_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \longrightarrow H^2(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \times H^2(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G$$

sont nulles, où les flèches sont α, α', et celles induites par $(\mathrm{Id} \times 0, 0 \times \mathrm{Id})$. La formule de Künneth et la proposition 1.5.2 permettent d'en déduire que α et α' se factorisent respectivement par $\mathrm{Hom}_k(A, \hat{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$ et $K(1)^G$, où $K = H^1(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Comme précédemment, $K(1)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A), V_\ell(\hat{A}))$. On en arrive au carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_k(A, \hat{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \arrow[d] \\
H^2(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell[G]}(V_\ell(A), V_\ell(\hat{A}))
\end{tikzcd}$$

Les restrictions de $\beta/2$ et $\beta'/2$ fournissent des rétractions aux flèches horizontales, et le carré formé par β, β' et les deux flèches verticales du diagramme précédent est commutatif ; par conséquent la bijectivité de la flèche verticale de droite entraîne celle de la flèche verticale de gauche, i.e. $H(A, \hat{A}) \Rightarrow T^1(A)$. □

2.3 Conjecture de Tate et groupe de Brauer

Proposition 2.3.1 — *Soient k un corps fini, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k et X une variété irréductible, projective et lisse sur k. La propriété $T^1(X)$ équivaut alors à la finitude de $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$.*

Lemme 2.3.2 — *Soient k un corps fini et X une k-variété projective géométriquement intègre. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Pic}(X)$ est de type fini.*

Démonstration — D'après la proposition 1.4.2, il suffit de prouver que $\mathbf{Pic}_{X/k}(k)$ est de type fini. Ce groupe s'insère dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Pic}^0_{X/k}(k) \longrightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}(k) \longrightarrow \mathrm{NS}_{X/k}(\overline{k}),$$

où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k. Le théorème 1.4.4 montre que $\mathbf{Pic}^0_{X/k}$ est une k-variété ; comme k est fini, on en déduit que $\mathbf{Pic}^0_{X/k}(k)$ est fini. Ainsi, il suffit de voir que le terme de droite est un groupe de type fini, ce qui est bien connu ([19], exp. XIII, th. 5.1). □

Lemme 2.3.3 — *Soient k un corps fini, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et X une k-variété projective et lisse. On a $H^2(X, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^2(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$.*

Démonstration — Écrivons la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^p(G, H^q(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})$$

Comme k est fini et $H^q(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})$ de torsion, on a $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \geqslant 2$ (un groupe procyclique sans torsion est de dimension cohomologique 1, cf. [36], 1.6.13), d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(G, H^1(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})) \longrightarrow H^2(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n}) \longrightarrow H^2(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})^G \longrightarrow 0$$

Comme k est fini, $H^1(G, H^1(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})) = H^1(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})_G$, où M_G désigne le groupe des coinvariants de M, lorsque M est un G-module ([36], 1.6.13). Passons à la limite projective. Comme $H^1(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})$ est fini, on peut faire commuter coinvariants et limite projective ; $H^2(X_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})$ étant fini, la condition de Mittag-Leffler est vérifiée, d'où la suite exacte suivante après tensorisation par $\mathbb{Q}_\ell$:

$$0 \longrightarrow H^1(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))_G \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Q}_\ell(1)) \longrightarrow H^2(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G \longrightarrow 0$$

Il suffit de montrer que 1 n'est pas valeur propre du Frobenius sur $H^1(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ pour conclure, mais cela résulte de l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques sur les corps finis, prouvée par Deligne (c'est le seul endroit de la démonstration qui utilise la lissité de X) : les valeurs propres sont des nombres algébriques dont tous les plongements complexes sont de module une puissance demi-entière de $\mathrm{Card}\, k$. □

Lemme 2.3.4 — *Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. On a canoniquement une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow T_\ell(\mathrm{Br}(X)) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Démonstration du lemme — La suite de Kummer fournit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n}) \longrightarrow {}_{\ell^n}\mathrm{Br}(X) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

Comme $\mathrm{Pic}(X)$ est de type fini (lemme 2.3.2), $\varprojlim (\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n) = \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$ et les $\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n$ sont finis, ce qui permet de passer à la limite projective, d'où le résultat. □

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION — Le groupe $H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_\ell)$ est fini ([17], exp. XIV, cor. 1.2) ; la suite exacte (2) montre donc que la ℓ-torsion de $\mathrm{Br}(X)$ est finie.

LEMME 2.3.5 — *Soit M un groupe abélien tel que ${}_\ell M$ soit fini. Alors $M\{\ell\}$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r \times E$ où E est un groupe fini et $r \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION — Si G est un groupe abélien, notons G_{div} le sous-groupe de G constitué des éléments infiniment divisibles. Comme G_{div} est un $\mathbb{Z}$-module injectif, il est facteur direct de G. Prenons $G = M\{\ell\}$; on a alors $M\{\ell\} = M\{\ell\}_{\text{div}} \oplus N$. Comme $N_{\text{div}} = 0$, il existe un n tel que ${}_{\ell^n}N = 0$, et donc N est engendré par ses éléments de ℓ^j-torsion pour $j \leqslant n$. Comme ${}_\ell N$ est fini, ${}_{\ell^j}N$ l'est aussi pour tout j et donc N est lui-même fini. On peut donc supposer que $M\{\ell\}$ est divisible. Fixons un plongement $\rho \colon {}_\ell M \hookrightarrow (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r$ qui induise un isomorphisme sur la ℓ-torsion. Comme $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r$ est injectif, on peut prolonger ρ en un morphisme $M\{\ell\} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r$, dont on vérifie tout de suite qu'il est nécessairement injectif. On voit à l'aide du lemme du serpent qu'il induit un isomorphisme sur la ℓ^n-torsion pour tout n, donc que c'est un isomorphisme. □

Ce lemme entraîne que $\mathrm{Br}(X)\{\ell\} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^r \times (\text{fini})$; ainsi $T_\ell(\mathrm{Br}(X)) = {\mathbb{Z}_\ell}^r$. D'après la suite exacte (1) et le lemme 2.3.3, la propriété $T^1(X)$ équivaut à la nullité de $V_\ell(\mathrm{Br}(X))$, donc à $r = 0$, donc à la finitude de $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$. □

REMARQUE — On peut prouver que, sous les hypothèses du théorème précédent, $T^1(X)$ équivaut même à la finitude de $\mathrm{Br}(X)$ (voir [43], [31], [44] §4). Mentionnons enfin une question d'Artin, proche de la conjecture de Tate : le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ est-il fini pour tout schéma X propre sur $\mathbb{Z}$?

2.4 Conjecture de Tate et groupe de Tate-Shafarévitch

Soient K un corps de nombres, $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers de K, M_K l'ensemble des places de K et A une variété abélienne sur K. Le groupe de cohomologie galoisienne $H^1_{\text{ét}}(K, A)$ classifie les torseurs sur $\operatorname{Spec} K$ sous A ; un tel torseur est trivial si et seulement s'il admet un point rationnel. Pour chaque place $v \in M_K$, on note K_v le complété de K en v et l'on dispose d'une flèche de restriction $H^1_{\text{ét}}(K, A) \to H^1_{\text{ét}}(K_v, A)$ (en toute rigueur le second groupe devrait se noter $H^1_{\text{ét}}(K_v, A \times_K K_v)$). Rappelons la définition du groupe de Tate-Shafarévitch de A sur K : il s'agit du noyau

$$Ш(A/K) = \operatorname{Ker}\left(H^1(K, A) \longrightarrow \prod_{v \in M_K} H^1(K_v, A)\right),$$

autrement dit $Ш(A/K)$ est le groupe des classes de torseurs sous A qui possèdent un K_v-point pour toute place v. Ce groupe intervient de manière cruciale dans l'étude de l'arithmétique des variétés abéliennes sur les corps de nombres, mais on connaît très peu de résultats le concernant. On sait que $Ш(A/K)$ est un groupe de torsion et que pour tout entier m, la m-torsion de $Ш(A/K)$ est finie. On dispose enfin d'un accouplement $Ш(A/K) \times Ш(\hat{A}/K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dit de Cassels-Tate, qui est alterné si l'on peut identifier A avec $\hat{A}$ à l'aide d'une polarisation principale provenant d'un diviseur rationnel sur A. On conjecture que $Ш(A/K)$ est fini ; ceci entraînerait que l'on peut déterminer algorithmiquement un système de générateurs du groupe de Mordell-Weil d'une courbe elliptique sur un corps de nombres. Si $Ш(A/K)$ est fini, l'accouplement de Cassels-Tate est non dégénéré ; ainsi, lorsque A possède une polarisation principale provenant d'un diviseur rationnel, l'ordre de $Ш(A/K)$ est un carré s'il est fini.

Le groupe de Tate-Shafarévitch peut aussi se définir dans le cadre géométrique. Soit k un corps fini. Notons V une courbe irréductible, projective et lisse sur k. Soit K le corps des fonctions rationnelles sur V. On note $V^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de V (points de codimension 1) et l'on pose, si A est une variété abélienne sur K,

$$Ш(V, A) = \operatorname{Ker}\left(H^1(K, A) \longrightarrow \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A)\right),$$

où K_v désigne le complété de K par rapport à la valuation associée au point fermé v.

Théorème 2.4.1 — *Soient X une surface propre et lisse sur k et $f\colon X \to V$ un morphisme plat, de dimension relative constante 1, à fibres géométriques connexes, de fibre générique lisse, et possédant une section. Notons A la jacobienne de la fibre générique de f. Il existe alors un isomorphisme canonique* $\mathrm{Br}(X) = Ш(V, A)$.

Démonstration — Voir [20], p. 107. □

Corollaire 2.4.2 — *Soient X une surface projective et lisse sur un corps fini k, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k, f et A comme dans le théorème précédent. Alors $T^1(X)$ équivaut à la finitude de $Ш(V, A)\{\ell\}$.*

3 Résultats connus

Les hypothèses $H(A, B)$ et $T^1(A)$ sont connues en toute généralité, lorsque A et B sont des variétés abéliennes sun un corps k de type fini sur son sous-corps premier. Lorsque k est fini, ce résultat est dû à Tate ([42]) ; on en exposera la preuve dans la section suivante. Le cas général est dû à Zarhin et Faltings. Voici une liste non exhaustive d'autres cas connus de la conjecture de Tate.

- $T^i(X)$ pour tout i lorsque X est un produit de courbes elliptiques sur un corps fini (Michael Spieß, Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields, *Math. Ann.* **314** (1999), no. 2, 285–290) ;
- $T^2(X)$ lorsque X est une hypersurface cubique ordinaire de $\mathbb{P}^5$ sur un corps fini (Norman Levin, The Tate conjecture for cubic fourfolds over a finite field, *Compositio Math.* **127** (2001), no. 1, 1–21) ;
- $T^i(X)$ lorsque X est une variété abélienne presque ordinaire sur un corps fini, i.e. les pentes de son polygône de Newton sont 0, 1/2 et 1, et la pente 1/2 est de multiplicité 2 (Hendrik W. Lenstra Jr et Yuri G. Zarhin, The Tate conjecture for almost ordinary abelian varieties over finite fields, *Advances in number theory (Kingston, ON, 1991)*, 179–194, Oxford Sci. Publ., *Oxford Univ. Press, New York*, 1993) ;
- $T^i(X)$ pour tout i pour certaines variétés de Fermat sur un corps fini, i.e. les hypersurfaces projectives d'équation $x_0^m + \cdots + x_n^m = 0$ (Tetsuji Shioda, The Hodge conjecture and the Tate conjecture for Fermat varieties, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), no. 3, 111–114) ;
- $T^1(X)$ lorsque X est une surface $K3$ en caractéristique 0 ([44], th. 5.6) ;
- $T^1(X)$ lorsque X est une surface $K3$ de hauteur finie sur un corps fini de caractéristique $p > 3$ (Niels Nygaard et Arthur Ogus, Tate's conjecture for $K3$ surfaces of finite height, *Ann. of Math.* (2) **122** (1985), no. 3, 461–507) ;
- $T^1(X)$ lorsque X est une surface $K3$ admettant un pinceau de courbes elliptiques, sur un corps fini ([4]) — ce dernier cas fera l'objet de la cinquième section du mémoire.

On pourra également consulter les articles suivants :

- Yves André, On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties, *Math. Ann.* **305** (1996), no. 2, 205–248 (contient notamment le cas d'hypersurfaces cubiques lisses de $\mathbb{P}^5$ en caractéristique nulle) ;
- Yuri G. Zarhin, The Tate conjecture for nonsimple abelian varieties over finite fields, *Alegbra and number theory (Essen, 1992)*, 267–296, *de Gruyter, Berlin*, 1994 ;
- Yasuo Morita, Tate's conjectures for the second étale cohomologies of abelian surfaces, Algebraic number theory (Hapcheon/Saga, 1996), *Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan)* **1** (1999), 45–56.

Mentionnons enfin que si X et Y sont deux variétés projectives et lisses sur un corps k de type fini, $T^1(X \times_k Y)$ équivaut à la conjonction de $T^1(X)$ et de $T^1(Y)$. De plus, si $X \dashrightarrow Y$ est une application rationnelle dominante, $T^1(X)$ implique $T^1(Y)$ ([44], th. 5.2).

4 Le théorème de Tate

Soient k un corps fini, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, A et B deux k-variétés abéliennes. Notons $\pi_A\colon A \to A$ l'endomorphisme de Frobenius de A ; c'est le morphisme de schémas qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et $f \mapsto f^q$ sur les germes de fonctions, où q est le cardinal de k.

THÉORÈME 4.0.3 (TATE) — *$H(A,B)$ est vraie.*

4.1 Preuve

Commençons par réduire quelque peu ce qu'il faut montrer.

LEMME 4.1.1 — *On peut supposer $A = B$. Plus précisément, $H(A \times_k B, A \times_k B) \Rightarrow H(A,B)$.*

DÉMONSTRATION — Il suffit de vérifier que l'isomorphisme

$$\mathrm{End}_k(A \times_k B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[G]}(V_\ell(A \times_k B))$$

est compatible aux décompositions

$$\mathrm{End}^0_k(A \times_k B) = \mathrm{End}^0_k(A) \times \mathrm{Hom}^0_k(A,B) \times \mathrm{Hom}^0_k(B,A) \times \mathrm{End}^0_k(B)$$

et

$$V_\ell(A \times_k B) = V_\ell(A) \times V_\ell(B).$$

□

Notons E_ℓ l'image de Φ et F_ℓ la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$ engendrée par l'image de G.

LEMME 4.1.2 — *Pour montrer que Φ est surjective, il suffit de prouver que F_ℓ est le commutant de E_ℓ dans* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$.

DÉMONSTRATION — Montrer que Φ est bijective revient à montrer que E_ℓ est le commutant de F_ℓ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$. Le lemme est donc une application directe du théorème du bicommutant, puisque E_ℓ est un anneau semi-simple. Rappelons son énoncé : soient k un corps, A une k-algèbre, V un A-module fidèle, semi-simple et de dimension finie sur k ; alors A est égal à son bicommutant dans $\mathrm{End}_k(V)$. □

Fixons un faisceau très ample $\mathscr{L}$ sur A. Dorénavant, on considérera toujours $V_\ell(A)$ muni de l'accouplement $H^{\mathscr{L}}$; ainsi, les termes « orthogonal » et « isotrope » seront relatifs à $H^{\mathscr{L}}$. Notons d^2 le degré de la polarisation $\varphi_{\mathscr{L}}$ et g la dimension de A. Selon la terminologie de Bourbaki, on dira qu'un sous-espace vectoriel de $V_\ell(A)$ est *totalement isotrope* s'il est inclus dans son orthogonal.

PROPOSITION 4.1.3 — *Soit W un sous-espace vectoriel de $V_\ell(A)$ totalement isotrope maximal, que l'on suppose de plus stable par G. Il existe alors $u \in E_\ell$ tel que $u(V_\ell(A)) = W$.*

DÉMONSTRATION — Notons $T = T_\ell(A)$, $V = V_\ell(A)$ et $X_n = (T \cap W) + \ell^n T$. D'après le théorème de structure des modules sur les anneaux principaux appliqué à T, qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $2g$, il existe une $\mathbb{Z}_\ell$-base de T $(e_1, \ldots, e_{2g})$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}_\ell$ tels que $(\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_r e_r)$ soit une $\mathbb{Z}_\ell$-base de $T \cap W$. Puisque $(T \cap W) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \approx W$, qui est de dimension g sur $\mathbb{Q}_\ell$ (étant égal à son orthogonal), on a $r = g$. De plus, $\alpha_i e_i \in T \cap W$ et $e_i \in T$ impliquent que $e_i \in T \cap W$, et donc α_i est inversible : on peut supposer $\alpha_i = 1$. Ainsi l'inclusion $T \cap W \subset T$ est isomorphe à l'inclusion ${\mathbb{Z}_\ell}^g \times \{0\}^g \subset {\mathbb{Z}_\ell}^{2g}$, ce qui montre que X_n est d'indice ℓ^{ng} dans T.

LEMME 4.1.4 — *Il existe une variété abélienne B_n sur k, et une isogénie $f_n \colon B_n \to A$ de degré ℓ^{ng}, telle que* $\mathrm{Im}(T_\ell(f_n)) = X_n$.

DÉMONSTRATION — Soit $\psi_n \colon T_\ell(A) \to A[\ell^n](\overline{k})$ la flèche naturelle. On pose $K_n = \psi_n(X_n)$. C'est un sous-groupe fini de $A(\overline{k})$ stable par G, que l'on identifie à un sous-k-schéma en groupes commutatif fini étale de A. Soient $B_n = A/K_n$ et $\pi_n \colon A \to B_n$ la projection. Étant donné que K_n est contenu dans $A[\ell^n]$ (en toute rigueur, il faut préciser « en tant que sous-schéma », mais c'est bien sûr équivalent à l'inclusion en tant que partie finie de $A(\overline{k})$ stable par G), il existe un morphisme de variétés abéliennes f_n qui fasse commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\ell^n"] \arrow[dr, "\pi_n"'] & & A \\ & B_n \arrow[ur, "f_n"'] & \end{tikzcd}$$

On a $\psi_n(T_\ell(f_n)(T_\ell(B_n))) = f_n((B_n)[\ell^n](\overline{k})) = (f_n \circ \pi_n)(\{x \in A(\overline{k})\,;\, \ell^n x \in K_n\}) = K_n$ (les deux dernières égalités proviennent de la surjectivité de π_n et de la multiplication par ℓ^n). En d'autres termes, X_n et $T_\ell(f_n)(T_\ell(B_n))$ sont deux sous-modules de T qui contiennent $\ell^n T$ et qui sont égaux modulo $\ell^n T$. Ils sont donc égaux. L'assertion sur le degré de f_n provient du fait que X_n est d'indice ℓ^{ng} dans T. □

On aimerait maintenant montrer qu'une infinité de B_n sont isomorphes, à l'aide du théorème suivant.

Théorème 4.1.5 — *Soient g et d des entiers, k un corps fini. L'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes sur k de dimension g sur lesquelles il existe une polarisation de degré d^2 est fini.*

Démonstration — La preuve de ce théorème utilise essentiellement quatre ingrédients :
- le théorème de Riemann-Roch pour les variétés abéliennes ;
- le fait que si $\mathscr{L}$ est un faisceau ample sur une variété abélienne, $\mathscr{L}^3$ est très ample ;
- le fait qu'une polarisation sur une variété abélienne sur un corps fini provient toujours d'un faisceau inversible défini sur le corps de base ;
- les formes de Chow.

Pour plus de détails, voir [29]. □

Il nous reste donc à montrer que B_n possède une polarisation de degré d^2. Il existe en tout cas une polarisation de degré $\ell^{2ng} d^2$ sur B_n, à savoir $\hat{f}_n \circ \varphi_{\mathscr{L}} \circ f_n = \varphi_{f_n^\star \mathscr{L}}$. Comme le degré de la multiplication par ℓ^n est ℓ^{2ng}, il nous suffirait de montrer que l'on peut diviser cette polarisation par ℓ^n. Utilisons pour cela la proposition suivante.

Proposition 4.1.6 — *Soit A une variété abélienne sur un corps parfait. Soit θ une polarisation de A, telle que $H_0^\theta \colon T_\ell(A) \times T_\ell(A) \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ soit à valeurs dans $\ell^n \mathbb{Z}_\ell(1)$. Il existe alors une polarisation θ' de A telle que $\theta = \ell^n \theta'$.*

Démonstration — Comme $\mathrm{Hom}_{\overline{k}}(A_{\overline{k}}, \hat{A}_{\overline{k}})$ est sans torsion, si $\theta_{\overline{k}} = \ell^n \theta'_{\overline{k}}$, $\theta'_{\overline{k}}$ est invariant sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et provient donc d'une polarisation θ' sur A. Ainsi, on peut supposer k algébriquement clos. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur A tel que $\theta = \varphi_{\mathscr{L}}$. L'application $\mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Hom}_k(A, \hat{A})$, $[\mathscr{M}] \mapsto \varphi_{\mathscr{M}}$ se factorise par $\mathrm{NS}(A)$; la proposition 1.5.1 montre que la flèche $\mathrm{NS}(A) \to \mathrm{Hom}_k(A, \hat{A})$ ainsi obtenue est injective. Il suffit donc de prouver que la classe de $\mathscr{L}$ dans $\mathrm{NS}(A)$ est divisible par ℓ^n.

La suite de Kummer fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n \longrightarrow H^2(A, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n}) \longrightarrow {}_{\ell^n}\mathrm{Br}(A) \longrightarrow 0$$

Passons à la limite projective. Comme $\mathrm{Pic}^0(A) = \hat{A}(k)$ est divisible, $\mathrm{Pic}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n = \mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n$; $\mathrm{NS}(A)$ étant de type fini (puisqu'il s'injecte dans $\mathrm{Hom}_k(A, \hat{A})$), on obtient :

$$0 \longrightarrow \mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\ i\ } H^2(A, \mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow T_\ell(\mathrm{Br}(A))$$

Le $\mathbb{Z}_\ell$-module $H^2(A, \mathbb{Z}_\ell(1))$ s'identifie à $\Lambda^2_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A), \mathbb{Z}_\ell(1))$ (théorème 1.5.7), et l'application i envoie la classe d'un faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur $-H_0^{\mathscr{M}}$ (cf. [29], p. 133). Par hypothèse, $i([\mathscr{L}])$ est divisible par ℓ^n. Le lemme 2.3.5 et la finitude de $H^2(A, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n})$ entraînent que $T_\ell(\mathrm{Br}(A))$ est sans torsion ; par conséquent la classe de $\mathscr{L}$ dans $\mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$ est divisible par ℓ^n, mais comme $\mathrm{NS}(A)$ est de type fini, la classe de $\mathscr{L}$ dans $\mathrm{NS}(A)$ l'est aussi. □

Vérifions que la proposition s'applique. Pour $x, y \in T_\ell(B_n)$, on a

$$H_0^{\hat{f}_n \circ \varphi_{\mathscr{L}} \circ f_n}(x, y) = H_0(T_\ell(f_n)(x), T_\ell(\varphi_{\mathscr{L}}) \circ T_\ell(f_n)(y)) = H_0^{\mathscr{L}}(T_\ell(f_n)(x), T_\ell(f_n)(y))$$

car $T_\ell(\hat{f}_n)$ est l'adjoint à gauche de $T_\ell(f_n)$ pour H_0. Ainsi, $H_0^{f_n^\star \mathscr{L}}$ prend sur $T_\ell(B_n)$ les mêmes valeurs que $H_0^{\mathscr{L}}$ sur $T_\ell(f_n)(T_\ell(B_n)) = X_n = T \cap W + \ell^n T$. Comme W est totalement isotrope, cela montre bien que ces valeurs sont divisibles par ℓ^n, d'où le résultat.

Finalement, une infinité des B_n sont isomorphes. Soit I une partie infinie de $\mathbb{N}$ telle que les B_i pour $i \in I$ soient tous isomorphes. Soit $m = \min I$. On fixe un isomorphisme $v_i \colon B_m \to B_i$, pour chaque i. Il existe $g_n \colon A \to B_n$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[rr, "\deg(f_n)"] \arrow[dr, "f_n"'] & & B_n \\ & A \arrow[ur, "g_n"'] & \end{tikzcd}$$

On note $f_n^{-1} = \dfrac{1}{\deg(f_n)} g_n \in \mathrm{Hom}_k^0(A, B_n)$. Soit u_i l'image, dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$, de $f_i \circ v_i \circ f_m^{-1} \in \mathrm{End}^0(A)$. On a

$$u_i(X_m) = u_i(T_\ell(f_m)(T_\ell(B_m))) = T_\ell(f_i) \circ T_\ell(v_i)(T_\ell(B_m)) = T_\ell(f_i)(T_\ell(B_i)) = X_i$$

donc en particulier $u_i(X_m) \subset X_m$ (les X_i sont décroissants), c'est-à-dire $u_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(X_m)$. Le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(X_m)$ est une partie compacte de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$. Quitte à diminuer l'ensemble I, on peut donc supposer que $(u_i)_{i \in I}$ converge vers un certain $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(X_m)$ lorsque i tend vers l'infini. Montrons maintenant que $u(X_m) = \bigcap_{i \in I} X_i$. L'inclusion « $\subset$ » est évidente : les X_i sont décroissants. Soit maintenant $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$. Il existe $x_i \in X_m$ tel que $x = u_i(x_i)$. Quitte à diminuer encore I, on peut supposer que $(x_i)_{i \in I}$ converge vers un certain $x' \in X_m$; ainsi $x = u_i(x_i) \to u(x')$ et donc $x \in u(X_m)$: l'autre inclusion est vérifiée. Remarquons enfin que l'on a

$$u(X_m) = \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} \big((T \cap W) + l^i T\big) = T \cap W,$$

la dernière égalité provenant du fait que l'inclusion $T \cap W \subset T$ est isomorphe à l'inclusion ${\mathbb{Z}_\ell}^g \times \{0\}^g \subset {\mathbb{Z}_\ell}^{2g}$. Comme E_ℓ est un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$, il est fermé, étant complet. En particulier, $u \in E_\ell$: le résultat est prouvé. □

Proposition 4.1.7 — *Si F_ℓ est une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre diagonale (i.e. $F_\ell \approx {\mathbb{Q}_\ell}^s$ pour un $s \in \mathbb{N}$), F_ℓ est bien le commutant de E_ℓ dans* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$.

Démonstration — Nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 4.1.8 — *Soit D le commutant de E_ℓ. Si W est un sous-espace totalement isotrope de V stable par F_ℓ, il est aussi stable par D.*

Démonstration du lemme — Procédons par récurrence descendante sur $\dim W$. Le cas où $\dim W = g$ se résout à l'aide de la proposition précédente : il existe $u \in E_\ell$ tel que $u(V) = W$ et on a alors $DW = Du(V) = u(DV) \subset u(V) = W$. Supposons donc que $\dim W < g$ et que le résultat est prouvé en dimension supérieure. La stabilité de W par G et la G-équivariance de $H^{\mathscr{L}}$ entraînent que $W^\perp$ (l'orthogonal de W pour $H^{\mathscr{L}}$) est stable par G, donc par F_ℓ. Comme F_ℓ est semi-simple, le sous-F_ℓ-module W de $W^\perp$ admet un supplémentaire semi-simple. On peut décomposer ce supplémentaire comme somme de F_ℓ-modules simples :

$$W^\perp = W \oplus \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

où les L_i sont simples sur F_ℓ. Les idéaux bilatères minimaux de F_ℓ sont des anneaux isomorphes à $\mathbb{Q}_\ell$; ainsi, L_i est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace de dimension 1. Posons maintenant $W_i = W \oplus L_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$. C'est un F_ℓ-module ; vu comme sous-espace de V stable par F_ℓ, il est totalement isotrope puisque $L_i \subset L_i^\perp$ (du fait que L_i est de dimension 1 et que $H^{\mathscr{L}}$ est alternée) et que $L_i \subset W^\perp$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : W_i est stable par D. Enfin, $\dim W < g$ et $\dim W^\perp + \dim W = 2g$ (la forme est non dégénérée) entraînent que $m \geqslant 2$, et donc $W = W_1 \cap W_2$, ce qui prouve que W est stable par D. □

Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_s)$ de F_ℓ sur $\mathbb{Q}_\ell$ qui détermine un isomorphisme $F_\ell \approx {\mathbb{Q}_\ell}^s$ et notons V_i l'image de e_i. Un endomorphisme u de V est dans F_ℓ si et seulement si pour tout i, u stabilise V_i et l'endomorphisme induit $u|_{V_i} \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_i)$ est une homothétie. Utilisons cette caractérisation pour prouver que $D \subset F_\ell$. Soit $u \in D$. Si on applique le lemme en prenant pour W la droite engendrée par un $x \in V_i$ (qui est bien totalement isotrope et stable par F_ℓ), on trouve que x est stable par u. En d'autres termes, tout vecteur non nul de V_i est vecteur propre de u : cela montre bien que u stabilise V_i et que $u|_{V_i}$ est une homothétie. Ainsi, $D \subset F_\ell$; l'autre inclusion étant évidente, la proposition est prouvée. □

À présent, on a montré que si F_ℓ est une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre diagonale, l'application Φ est bijective. Remarquons que si l'on prouve la bijectivité de Φ pour un nombre premier ℓ différent de p et que l'on montre que la dimension de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[G]}(V_\ell(A))$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ ne dépend pas de ℓ, la bijectivité de Φ pour tout $\ell \neq p$ s'ensuivra (en effet, Φ est toujours injective). C'est ce que nous allons faire.

La $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[\pi_A]$ est séparable, car elle est incluse dans le centre de l'anneau semi-simple $\mathrm{End}_k^0(A)$; on peut l'écrire $\mathbb{Q}[\pi_A] = K_1 \times \ldots \times K_n$ où les K_i sont des extensions finies de $\mathbb{Q}$. Choisissons une extension finie galoisienne $K/\mathbb{Q}$ dans laquelle se plongent tous les K_i. Comme le Frobenius est un générateur topologique de G, on a $F_\ell = \mathbb{Q}[\pi] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ (remarquons que $T_\ell(\pi_A)$ est égal à l'endomorphisme défini par le Frobenius de G). Pour trouver un ℓ tel que F_ℓ soit une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre diagonale, il suffit donc d'en trouver un tel que $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ soit une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre diagonale (en effet, une sous-algèbre d'une algèbre diagonale est diagonale). Soit $\alpha \in K$ tel que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ et $f \in \mathbb{Z}[X]$, en notant f le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.

Lemme 4.1.9 — *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Il existe une infinité de nombres premiers ℓ tels que P ait une racine dans $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.*

Démonstration — On pose $P = a_n X^n + \ldots + a_0$. Si $a_0 = 0$, le résultat est évident. Si $a_0 \neq 0$, on peut supposer $a_0 = 1$ quitte à remplacer X par $a_0 X$. Supposons alors qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers ℓ tels que P ait une racine dans $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Soient N le produit de ces entiers ℓ, $x \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $|P(Nx)| > 1$ et ℓ un diviseur premier de $P(Nx)$. Par définition, N est un multiple de ℓ ; par ailleurs $P(Nx) = a_n N^n x^n + \ldots + a_1 N x + 1$, d'où une contradiction en regardant modulo ℓ. □

D'après le lemme, il existe un nombre premier ℓ différent de p et ne divisant pas le discriminant de f et un entier x tels que $f(x) \equiv 0 \pmod{\ell}$. La condition sur le discriminant entraîne que $f'(x) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Ainsi, d'après le lemme de Hensel, f a une racine dans $\mathbb{Z}_\ell$. En fait, f est même scindé dans $\mathbb{Q}_\ell$; en effet, les conjugués de α s'écrivent comme des polynômes de α (on rappelle que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne). La $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ est diagonale : c'est le résultat voulu.

Il ne reste plus qu'à montrer que la dimension de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[G]}(V_\ell(A))$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ est indépendante de ℓ. Notons cette dimension d_ℓ. Notons aussi π_ℓ l'endomorphisme de $V_\ell(A)$ induit par π_A. Il est semi-simple, puisque π_A est séparable sur $\mathbb{Q}$ et que Φ est injective. Par conséquent $V_\ell(A)$ est un $\mathbb{Q}_\ell[\pi_\ell]$-module semi-simple : on peut écrire $V_\ell(A) = V_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus V_m^{n_m}$ où les V_i sont des $\mathbb{Q}_\ell[\pi_\ell]$-modules simples non nuls deux à deux non isomorphes. On a alors $d_\ell = \dim \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[\pi_\ell]}(V_\ell(A)) = \sum n_i^2 \dim \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell[\pi_\ell]}(V_i) = \sum n_i^2 \dim V_i$, du fait que V_i est un sous-espace cyclique pour π_ℓ. Notons $P_{\ell,i}$ le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}_\ell$ de l'endomorphisme de V_i induit par π_ℓ (qui est aussi son polynôme caractéristique) et $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme caractéristique de π_A (voir [29] pour la définition). Il est bien connu que P est aussi le polynôme caractéristique de π_ℓ ; ainsi, $P = \prod_i P_{\ell,i}^{n_i}$ et $\dim V_i = \deg P_{\ell,i}$, de sorte que

$$d_\ell = \sum v_Q(P)^2 \deg Q,$$

où la somme porte sur les $Q \in \mathbb{Q}_\ell[X]$ irréductibles unitaires et où $v_Q(P)$ dénote la Q-valuation de P. Une vérification facile montre que cette somme reste inchangée si on la fait porter sur les $Q \in \mathbb{Q}[X]$ irréductibles unitaires (écrire la décomposition d'un polynôme irréductible unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{Q}_\ell[X]$, sans oublier qu'il est séparable). Il est maintenant évident que d_ℓ ne dépend pas de ℓ. Le théorème de Tate est prouvé.

4.2 Quelques corollaires

On garde les notations précédentes ; k est un corps fini.

Corollaire 4.2.1 — *Soient A et B des variétés abéliennes sur k. Il y a équivalence entre :*

– *B est isogène à une sous-variété abélienne de A ;*
– *$V_\ell(B)$ se plonge dans $V_\ell(A)$ comme $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module ;*
– *le polynôme caractéristique de π_B divise celui de π_A.*

En particulier, le polynôme caractéristique du Frobenius d'une variété abélienne sur k détermine uniquement sa classe d'isogénie.

Démonstration — L'équivalence des deux dernières conditions est une conséquence du fait que l'action du Frobenius sur le module de Tate est semi-simple. La seule chose à montrer est que s'il existe une injection $\mathbb{Q}_\ell[G]$-linéaire $F\colon V_\ell(B) \to V_\ell(A)$, B est isogène à une sous-variété abélienne de A. D'après le théorème de Tate, il existe $f\colon B \to A$ tel que $V_\ell(f)$ soit arbitrairement proche de F (topologie ℓ-adique). Si $V_\ell(f)$ est suffisamment proche de F, $V_\ell(f)$ sera injectif lui aussi (il faut vérifier la non annulation d'un certain nombre de mineurs), ce qui implique que la restriction de f à son image est une isogénie. □

Soit A une variété abélienne sur k. Notons $E = \mathrm{End}_k^0(A)$ et $F = \mathbb{Q}[\pi_A]$. Le théorème de Tate affirme que $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ est le centre de $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$; on en déduit que F est le centre de E.

Remarque — Soit A une variété abélienne sur k. L'action du Frobenius sur $V_\ell(A)$ est semi-simple. En effet, la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre $\mathrm{End}_k^0(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ étant semi-simple, son centre, auquel appartient l'endomorphisme de Frobenius, est une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre séparable.

5 Le théorème d'Artin et Swinnerton-Dyer

5.1 Énoncé et preuve du théorème

Théorème 5.1.1 (Artin, Swinnerton-Dyer) — *Soient k un corps fini de caractéristique $p \geqslant 5$, $A^\star$ une surface $K3$ sur k telle qu'il existe un morphisme $f\colon A^\star \to \mathbb{P}^1_k$ admettant une section arrivant dans le lieu lisse de f, de sorte que la fibre générique soit une courbe elliptique. Alors $T^1(A^\star)$ est vraie.*

Par la suite, on ne s'intéressera qu'aux ℓ impairs, pour simplifier. Le cas $\ell = 2$ se traite presque de la même manière et ne présente pas plus de difficulté (voir [4] ; il y est fait mention du « relèvement de Whitehead » de $\alpha \cup \alpha$ dans $H^4(X, \boldsymbol{\mu}_{2^{n+1}}^{\otimes 2})$ pour $\alpha \in H^2(X, \boldsymbol{\mu}_{2^n})$, mais on peut se passer de cette construction générale puisque le α dont on se servira sera lui-même canoniquement relevé dans $H^2(X, \boldsymbol{\mu}_{2^{n+1}})$).

Théorème 5.1.2 — *L'application* $\mathrm{Pic}(A^\star) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^2(A^\star, \mathbb{Q}_\ell(1))$ *est surjective.*

C'est ce théorème que l'on va montrer. Il implique le théorème 5.1.1, d'après le lemme 2.3.3. Notons $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

Lemme 5.1.3 — *Pour prouver le théorème 5.1.1 (ou 5.1.2), on peut s'autoriser une extension finie du corps k, après avoir fixé $A^\star$.*

Démonstration — Soit k' une extension finie de k telle que $\mathrm{Pic}(A^\star_{k'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^2(A^\star_{k'}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ soit surjective. On peut supposer k'/k galoisienne. D'après le lemme 2.3.4 appliqué à $A^\star$, cette flèche est même un isomorphisme, de sorte que l'on peut passer aux invariants sous $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k'/k)$, d'où le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{Pic}(A^\star_{k'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell)^{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\sim} & H^2(A^\star_{k'}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\mathfrak{g}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Pic}(A^\star) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell & \longrightarrow & H^2(A^\star, \mathbb{Q}_\ell(1))
\end{array}$$

D'après le lemme 2.3.3, la flèche verticale de droite est un isomorphisme ; il suffit donc de prouver que la flèche verticale de gauche en est un aussi. On a bien sûr $(\mathrm{Pic}(A^\star_{k'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell)^{\mathfrak{g}} = (\mathrm{Pic}(A^\star) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$, d'où le résultat grâce au lemme suivant. □

Lemme 5.1.4 — *Soient k'/k une extension finie galoisienne de groupe $\mathfrak{g}$ et X un k-schéma. L'application naturelle* $\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (\mathrm{Pic}(X_{k'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\mathfrak{g}}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration — La suite spectrale de Hochschild-Serre pour le faisceau Zariski $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ donne la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, H^0(X_{k'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{k'})^{\mathfrak{g}} \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, H^0(X_{k'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}))$$

Tensorisons-la par $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$. Comme $\mathfrak{g}$ est fini, $H^1(\mathfrak{g}, H^0(X_{k'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}))$ et $H^2(\mathfrak{g}, H^0(X_{k'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}))$ sont de torsion, d'où $\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathrm{Pic}(X_{k'})^{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Il reste à voir que $\mathrm{Pic}(X_{k'})^{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (\mathrm{Pic}(X_{k'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\mathfrak{g}}$, mais cela découle du fait que limite inductive filtrante et invariants sous un groupe fini commutent. □

Commençons par remarquer que le morphisme $f\colon A^\star \to \mathbb{P}^1_k$ est plat ([25], prop. III.9.7). Soit $\mathscr{A} \subset A^\star$ l'ouvert de lissité de $f\colon A^\star \to \mathbb{P}^1_k$ ([22], 6.8.7). Comme $A^\star$ est une surface $K3$, c'est un modèle propre et régulier minimal de la fibre générique de f. Le théorème 1.7.3 permet d'en déduire que $\mathscr{A}$ en est un modèle de Néron. Ainsi, d'après la proposition 1.7.2, $\mathscr{A}$ est canoniquement un schéma en groupes sur $\mathbb{P}^1_k$, de neutre la section que l'on a fixée.

Soit $A \subset \mathscr{A}$ la composante neutre (cf. définition 1.7.5). Les fibres de f sont lisses, sauf un nombre fini ; on sait ce que peuvent être les fibres géométriques dégénérées, d'après la classification de Kodaira-Néron. Soit $y \in \mathbb{P}^1_k$ tel que la fibre de f en y ne soit pas lisse, et notons $C_0, \ldots, C_s$ les composantes irréductibles de la fibre géométrique de f en y (en appelant C_0 la composante rencontrant la section nulle), $n_0, \ldots, n_s$ leurs multiplicités respectives, et $C = \sum_{1\leqslant i\leqslant s} n_i C_i$. Vérifions que le critère de contractibilité 1.6.7 s'applique. La proposition 1.7.4 montre que la matrice d'intersection de C est définie-négative. Reste à calculer le genre arithmétique $p_a(C) = \frac{1}{2}(C^2) + 1$. Comme C_0 rencontre la section nulle, $n_0 = 1$ et $C + C_0$ est une fibre. Par conséquent $(C + C_0.C) = 0$ et $(C + C_0.C_0) = 0$ (en effet, $C + C_0$ est linéairement équivalent à une autre fibre, qui est de support disjoint de ceux de C et C_0). Puisque $(C_0^2) = -2$, on obtient bien $(C^2) = -2$ et $p_a(C) = 0$. Il existe ainsi une surface propre et normale $A'_{\overline{k}}$ sur $\overline{k}$, munie d'un morphisme vers $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ dont les fibres sont intègres, et un $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$-morphisme $\pi\colon A^\star_{\overline{k}} \to A'_{\overline{k}}$ qui est un isomorphisme de $A_{\overline{k}}$ sur le complémentaire d'un nombre fini de points de $A'_{\overline{k}}$. Ces objets sont en tout cas définis sur une extension finie de k, et l'on peut donc les supposer définis sur k en vertu du lemme 5.1.3. On a donc une surface normale A' sur k et un morphisme $\pi\colon A^\star \to A'$; A' est à singularités rationnelles puisque les fibres de π sont de genre arithmétique nul. On considérera ainsi A comme un ouvert de A'.

Théorème 5.1.5 — *L'application* $\mathrm{Pic}(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^2(A', \mathbb{Q}_\ell(1))$ *est surjective.*

Montrons que le théorème 5.1.5 implique le théorème 5.1.2. Notons $\Delta_1, \ldots, \Delta_t$ les composantes irréductibles des fibres géométriques de π.

Lemme 5.1.6 — *La suite suivante est exacte :*

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow H^2(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \longrightarrow & H^2(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_\ell{}^t \\ & \alpha & \longmapsto & (\alpha \cup [\Delta_i])_{1\leqslant i\leqslant t} \end{array}$$

Par ailleurs, $H^1(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^1(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$.

Démonstration — Considérons la suite spectrale de Leray pour le morphisme $\pi_{\overline{k}}\colon A^\star_{\overline{k}} \to A'_{\overline{k}}$ et le faisceau $\boldsymbol{\mu}_n$, n premier à p. On a $\pi_{\overline{k}\star}\boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu}_n$ car les fibres de $\pi_{\overline{k}}$ sont connexes.

Rappel 5.1.7 (suite exacte de Mayer-Vietoris pour les fermés) — *Soit X un schéma. Si Z est un sous-schéma fermé de X, $i\colon Z \to X$ l'inclusion et K un faisceau de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$, notons K_Z le faisceau $i_\star i^\star K$. Soient F et G deux sous-schémas fermés de X. On a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow K_{F\cup G} \longrightarrow K_F \oplus K_G \longrightarrow K_{F\cap G} \longrightarrow 0,$$

d'où, en passant aux sections globales :

$$H^i(F\cup G, K|_{F\cup G}) \longrightarrow H^i(F, K|_F)\oplus H^i(G, K|_G) \longrightarrow H^i(F\cap G, K|_{F\cap G}) \longrightarrow H^{i+1}(F\cup G, K|_{F\cup G})$$

Comme les fibres de $\pi_{\overline{k}}$ sont des arbres (proposition 1.7.4) dont les composantes irréductibles sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$, la suite exacte de Mayer-Vietoris pour les fermés montre que $R^1\pi_{\overline{k}\star}\boldsymbol{\mu}_n = 0$. Enfin, $R^2\pi_{\overline{k}\star}\boldsymbol{\mu}_n = \bigoplus_{x\in A'\setminus A} i_{x\star}H^2(\pi^{-1}(x)_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)$. La suite spectrale montre donc que $H^1(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = H^1(A^\star_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)$, d'où l'assertion sur les H^1 en passant à la limite projective et en tensorisant par $\mathbb{Q}_\ell$. Les différentielles $E_2^{0,2}\to E_2^{2,1}$, $E_2^{0,1}\to E_2^{2,0}$ et le $H^1(A'_{\overline{k}}, R^1\pi_{\overline{k}\star}\boldsymbol{\mu}_n)$ sont nuls, d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow H^2(A^\star_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow \bigoplus_{x\in A'\setminus A} H^2(\pi^{-1}(x)_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)$$

La suite exacte de Mayer-Vietoris pour les fermés montre que

$$\bigoplus_{x\in A'\setminus A} H^2(\pi^{-1}(x)_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = \bigoplus_{i=1}^{t} H^2((\Delta_i)_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^t\,.$$

De plus la flèche de restriction $H^2(A^\star_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^2((\Delta_i)_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'identifie au cup-produit par la classe de Δ_i (proposition 1.1.1). D'où le résultat en passant à la limite projective et en tensorisant par $\mathbb{Q}_\ell$. □

Lemme 5.1.8 — *On a* $H^2(A', \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^2(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^G$.

Démonstration — La démonstration du lemme 2.3.3 s'applique encore ici, à condition de savoir que $H^1(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^1(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$, ce que l'on vient de prouver. (Remarque : on n'a pas besoin ici de l'hypothèse de Riemann, puisque $H^1(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) = 0$, étant donné que $H^1(A^\star_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^n}) = {}_{\ell^n}\mathrm{Pic}(A^\star_{\overline{k}})$ et que $\mathrm{Pic}(A^\star_{\overline{k}})$ est sans torsion, $A^\star$ étant une surface $K3$.) □

Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer les Δ_i définis sur k. Soit W le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(A^\star)$ engendré par les classes des Δ_i. D'après le lemme précédent, $H^2(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ s'identifie à l'orthogonal de $\mathrm{Im}(W\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell \to H^2(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)))$ pour le cup-produit. La forme bilinéaire sur W induite par le cup-produit de $H^2(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est la restriction de la forme d'intersection sur $\mathrm{Pic}(A^\star)$ (proposition 1.2.2). Elle est non dégénérée sur W, la matrice d'intersection étant définie-négative (proposition 1.7.4) ; le cup-produit étant non dégénéré sur $H^2(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ par dualité de Poincaré, on en déduit finalement la décomposition en somme orthogonale

$$H^2(A^\star_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^2(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \oplus \mathrm{Im}(W\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell).$$

Le groupe de Galois G agit trivialement sur W et stabilise $H^2(A'_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$. En passant aux invariants sous G, on obtient donc, d'après les lemmes 2.3.3 et 5.1.8 :

Lemme 5.1.9 — *On a canoniquement*

$$H^2(A^\star, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^2(A', \mathbb{Q}_\ell(1)) \oplus \mathrm{Im}(W\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell)$$

et la somme est orthogonale pour le cup-produit.

Avec ce lemme, il est maintenant clair que le théorème 5.1.5 implique le théorème 5.1.2.

5.2 Fibrations de Weierstrass

Rappelons que si X est une courbe propre sur un corps k, on définit le *genre arithmétique* de X par la formule $p_a(X) = 1-\chi(\mathscr{O}_X)$.

Définition 5.2.1 — *On appelle* fibration de Weierstrass *la donnée d'un morphisme de schémas $f\colon X\to S$ et d'une section $\theta\colon S\to X$ de f, tels que :*

– *f soit une courbe relative propre dont les fibres géométriques sont des courbes intègres de genre arithmétique 1,*
– *la fibre générique de f soit lisse,*
– *θ soit à valeurs dans l'ouvert de lissité de f.*

Par la suite, la section sera toujours sous-entendue, et l'on dira que f est une fibration de Weierstrass.

Les fibres d'une fibration de Weierstrass sont donc des courbes elliptiques, des cubiques planes à point double, ou des cubiques planes à pointe. Soit $f\colon A' \to S$ une fibration de Weierstrass. Notons $A \subset A'$ l'ouvert de lissité. Si t est une section de f, c'est une immersion fermée puisque f est un morphisme séparé ; on note $\mathscr{I}_t$ le faisceau quasi-cohérent d'idéaux associé à t.

Théorème 5.2.2 — *Il existe une et une seule loi $+\colon A \times_S A' \to A'$ telle que, sur S et après tout changement de base, pour $x \in A(S)$ et $y \in A'(S)$, on ait $\mathscr{I}_{x+y} \otimes \mathscr{I}_\theta \approx \mathscr{I}_x \otimes \mathscr{I}_y$ localement sur S. Muni de cette loi, A est un S-schéma en groupes commutatif de neutre θ agissant sur A'.*

Démonstration — Voir [13], prop. 2.7, p. 189. □

Un diviseur de Cartier effectif relatif sur un morphisme de schémas $X \to S$ est un diviseur de Cartier effectif sur X (i.e. un sous-schéma fermé de X dont le faisceau d'idéaux est inversible) plat sur S. L'avantage de la notion de diviseur de Cartier relatif par rapport à celle de diviseur de Cartier est qu'elle se comporte bien vis-à-vis des changements de base. On a notamment le critère fibre à fibre suivant.

Proposition 5.2.3 — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme plat, localement de présentation finie, avec S localement noethérien. Soit D un sous-schéma fermé de X plat sur S. C'est un diviseur de Cartier effectif relatif si et seulement si pour tout $s \in S$, D_s est un diviseur de Cartier effectif sur X_s, si et seulement si pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S, $D_{\overline{s}}$ est un diviseur de Cartier effectif sur $X_{\overline{s}}$.*

Démonstration — Voir [26], cor. 1.1.5.2, p. 7. □

Proposition 5.2.4 — *Soient $f\colon X \to S$ une courbe relative qui soit un morphisme séparé, t une section de f à valeurs dans l'ouvert de lissité de f. Le sous-schéma fermé de X défini par t est un diviseur de Cartier (en d'autres termes, $\mathscr{I}_t$ est un faisceau inversible), que l'on note $[t]$.*

Démonstration — Comme A' est localement de présentation finie sur S, on peut se ramener au cas où S est localement noethérien à l'aide de [22], 8.9.1. D'après la proposition 5.2.3, on peut même supposer que S est le spectre d'un corps, auquel cas il suffit d'appliquer le lemme suivant. □

Lemme 5.2.5 — *Soient k un corps, A une k-algèbre de type fini de dimension $\leqslant 1$, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A tel que le localisé $A_\mathfrak{m}$ soit régulier. Alors il existe $f \in A \backslash \mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{m}A[1/f]$ soit un idéal principal de $A[1/f]$.*

Démonstration — Soient $x_1, \ldots, x_n \in A$ qui engendrent l'idéal $\mathfrak{m}$ de A. Comme $A_\mathfrak{m}$ est régulier, local, noethérien et de dimension $\leqslant 1$, $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ est principal ; notons $\pi \in A$ un générateur de cet idéal. Pour tout i, il existe un $g_i \in A \backslash \mathfrak{m}$ tel que $g_i x_i \in \pi A$. L'élément $f = \prod g_i$ convient. □

Théorème 5.2.6 — *Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et 3 et $f\colon A' \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration de Weierstrass, de section neutre θ. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, $a \in \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(4N))$ et $b \in \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(6N))$ tels que A' soit $\mathbb{P}^1_k$-isomorphe au sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-2N) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-3N) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k})$ d'équation*

$$y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3,$$

de sorte que θ soit envoyé sur la section $[0 : 1 : 0]$. De plus, $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \in \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(12N))$ s'annule en un point $y \in \mathbb{P}^1_k$ si et seulement si la fibre de f en y n'est pas lisse.

Précisons le sens de ce dernier énoncé. L'inclusion de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-2N)$ dans $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-2N) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-3N) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ définit une section de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(2N) \otimes \mathscr{E}$. On appelle $x \in \Gamma\left(\mathbb{P}(\mathscr{E}), \left(\pi^\star \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(2N)\right)(1)\right)$ l'image de cette section par le morphisme déduit du morphisme canonique $\pi^\star \mathscr{E} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1)$, où $\pi\colon \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to Y$ est la projection. De même pour y et z. La différence des deux membres de l'équation est ainsi une section du faisceau inversible $\left(\pi^\star \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(6N)\right)(3)$, dont on peut considérer le diviseur : c'est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(\mathscr{E})$.

Démonstration — Voir [32], ch. II (la preuve s'applique sans modification en caractéristique $p > 3$). □

Proposition 5.2.7 — *Soient $A' \to Y$ une fibration de Weierstrass avec Y de Dedekind et A' normal à singularités rationnelles, $A \subset A'$ son ouvert de lissité et θ sa section nulle. La flèche de faisceaux en groupes abéliens sur $Y_{ét}$*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{Pic}^0_{A'/Y} \\ s & \longmapsto & [s] - [\theta] \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration — Notons η le point générique de Y. A est la composante neutre du modèle de Néron de A'_η, d'après le théorème 1.7.3. Comme A'_η est une courbe elliptique, elle est canoniquement isomorphe à sa jacobienne, par l'application $s \mapsto [s] - [\theta_\eta]$, où s est une section de A'_η. Le morphisme $A' \to Y$ est projectif d'après le théorème 5.2.6. Le théorème 1.8.2 montre donc que $\mathbf{Pic}^0_{A'/Y}$ est la composante neutre du modèle de Néron de la jacobienne de A'_η, d'où le résultat. □

Proposition 5.2.8 — *Soient $A' \to Y$ une fibration de Weierstrass, $A \subset A'$ son ouvert de lissité et $n \in \mathbb{Z}$ un entier inversible sur Y. Notons $n_A\colon A \to A$ la multiplication par n. C'est un morphisme étale, et la suite de faisceaux en groupes abéliens sur $Y_{ét}$ suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow {}_nA \longrightarrow A \xrightarrow{n_A} A \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Démonstration — Il suffit de prouver que n_A est un morphisme étale. Lorsque Y est le spectre d'un corps, A est soit une courbe elliptique, soit isomorphe au groupe additif, soit au groupe multiplicatif : il est alors bien connu que la multiplication par n est étale pour n premier à la caractéristique du corps. Comme un morphisme est étale si et seulement s'il est plat et si ses fibres sont étales, le cas général en résulte, grâce au lemme suivant, que l'on peut appliquer car A est plat sur Y (puisque lisse). □

Lemme 5.2.9 (critère de platitude fibre à fibre) — *Soient S un schéma localement noethérien, X et Y deux S-schémas plats et localement noethériens, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme. Alors f est plat si et seulement si $f_s\colon X_s \to Y_s$ est plat pour tout $s \in S$.*

Démonstration — Voir [16], exp. IV, cor. 5.9. □

Pour terminer, calculons les images directes supérieures de $\boldsymbol{\mu}_n$.

Proposition 5.2.10 — *Soient $f\colon A' \to Y$ une fibration de Weierstrass, avec Y de Dedekind, A' normal et à singularités rationnelles, $A \subset A'$ son ouvert de lissité et n un entier inversible sur Y. On a alors :*

$$f_\star \mathbb{G}_\mathrm{m} = \mathbb{G}_\mathrm{m} \quad ; \quad R^1 f_\star \mathbb{G}_\mathrm{m} = \mathbf{Pic}_{A'/Y} = A \oplus \mathbb{Z}$$

$$f_\star \boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu}_n \quad ; \quad R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n = {}_nA\,; \quad R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n = \mathbb{Z}/n\,; \quad R^j f_\star \boldsymbol{\mu}_n = 0 \text{ pour } j > 2.$$

Démonstration — L'égalité $f_\star \mathbb{G}_\mathrm{m} = \mathbb{G}_\mathrm{m}$ découle de la proposition 1.4.3. D'après la proposition 5.2.7, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbf{Pic}_{A'/Y} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où la seconde flèche est l'application « degré sur les fibres » (si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur A', le degré de $\mathscr{L}_y$ sur A'_y est une fonction localement constante de y, cf. [9], 9.1/2). La section θ de f définit un diviseur de Cartier sur A' de degré 1 sur les fibres, d'après la proposition 5.2.4 ; elle permet donc de scinder la suite exacte précédente, d'où $\mathbf{Pic}_{A'/Y} = A \oplus \mathbb{Z}$.

Appliquons $f_\star$ à la suite exacte de Kummer. Comme $f_\star \mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, on obtient tout de suite que $f_\star \boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu}_n$ et que la multiplication par n de $f_\star \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est surjective. D'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow A \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow A \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n$$

Par conséquent $R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n = {}_nA$. On obtient de plus une injection $\mathbb{Z}/n \to R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n$. Le théorème de changement de base propre et la connexité géométrique des fibres de f entraînent que c'est un isomorphisme. Enfin, $R^j f_\star \boldsymbol{\mu}_n = 0$ pour $j > 2$ est évident avec le théorème de changement de base propre. □

5.3 Quelques identifications préliminaires

Lemme 5.3.1 — *Soit $A' \to Y$ une fibration de Weierstrass. Les éléments de $H^1(Y, {}_nA)$ classifient les couples (X, S), où X est un torseur sous A sur Y et $S \in H^0(Y, X^{(n)})$ (deux tels couples sont identifiés s'il existe un isomorphisme entre les torseurs compatible avec la section).*

Démonstration — Choisissons une résolution injective de A dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $Y_{\text{ét}}$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_I^0} I^0 \xrightarrow{d_I^1} I^1 \xrightarrow{d_I^2} I^2 \longrightarrow \cdots$$

La suite exacte (3) permet d'en déduire une résolution injective de ${}_nA$: il suffit de considérer le complexe simple associé au complexe double formé par la multiplication par n de $I^\bullet$. On obtient ainsi la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_nA \xrightarrow{d_J^0} I^0 \xrightarrow{d_J^1} I^1 \oplus I^0 \xrightarrow{d_J^2} I^2 \oplus I^1 \longrightarrow \cdots,$$

où les différentielles sont définies par $d_J^0 = d_I^0$, $d_J^1(a) = (d_I^1(a), na)$ et pour $m \geqslant 2$:

$$\begin{array}{rccc} d_J^m \colon & I^{m-1} \oplus I^{m-2} & \longrightarrow & I^m \oplus I^{m-1} \\ & (a,b) & \longmapsto & (d_I^m a, d_I^{m-1} b - (-1)^m na) \end{array}$$

Rappelons comment l'association entre classes d'isomorphisme de torseurs sous A et éléments de $H^1(Y, A)$ se lit sur la résolution injective $I^\bullet$. Soit $\alpha \in H^1(Y, A)$; il est représenté par un $\alpha_0 \in \Gamma(Y, I^1)$ tel que $d_I^2 \alpha_0 = 0$. Le sous-faisceau d'ensembles X_{α_0} de I^0 défini par

$$\Gamma(U, X_{\alpha_0}) = \left\{ s \in \Gamma(U, I^0) \,;\, d_I^1 s = \alpha_0|_U \right\}$$

est un torseur sous A, dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du relèvement α_0 de α.

Un élément de $H^1(Y, {}_nA)$ est représenté par un couple $(a, b) \in \Gamma(Y, I^1) \times \Gamma(Y, I^0)$ tel que $d_I^2 a = 0$ et $d_I^1 b = na$. La donnée de a correspond à un torseur sous A, et d'après ce que l'on vient de rappeler, b est une section du torseur $X_{na} = X_a^{(n)}$. On vérifie tout de suite que la classe d'isomorphisme du couple (X_a, b) est invariante si l'on remplace (a, b) par $(a + d_I^1 r, b + nr)$, $r \in \Gamma(Y, I^0)$, d'où le résultat. □

Soit $A' \to Y$ une fibration de Weierstrass, avec Y localement noethérien de dimension 1, A' normal à singularités rationnelles, dont on note $A \subset A'$ le lieu lisse. Les éléments de $H^1(Y, A)$ classifient les torseurs sous A sur Y, c'est-à-dire les faisceaux d'ensembles sur Y munis d'une action simplement transitive de A. Ils sont tous représentables, car A est lisse et séparé sur Y et Y est de dimension 1 (cf. [30], III.4.3). Si X est un tel torseur, on note $X^{(n)}$ le produit contracté de X avec lui-même, n fois ($n \in \mathbb{Z}$) ; la classe de $X^{(n)}$ dans $H^1(Y, A)$ est obtenue en multipliant celle de X par n. Rappelons que le produit contracté de deux torseurs X_1 et X_2 est le quotient de $X_1 \times_Y X_2$ par l'action de A définie par $a + (x_1, x_2) = (x_1 + a, x_2 - a)$.

Soit X un torseur sous A. Comme A agit sur A' (théorème 5.2.2), on peut considérer le produit contracté de X par A', que l'on note X'. Le lemme 5.5.11 et le théorème 1.6.7 permettent de prouver que X' est un schéma. Il est localement isomorphe à A', pour la topologie étale sur Y. Étudions le foncteur de Picard relatif de X' sur Y. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n \colon X^{(n)} \times_Y X \to \mathbf{Pic}_{X'/Y}$ le morphisme de faisceaux d'ensembles sur $Y_{\text{ét}}$ défini par $\varphi_n(s, x) = [x + \alpha] + (n-1)[x]$, où s est une section de $X^{(n)}$ sur un ouvert étale U de Y, x une section de X sur U, α l'unique section de A telle que $s = (x, \ldots, x) + \alpha$, et $[z]$ désigne l'élément de $\mathrm{Pic}(X')$ défini par une section z de X (c'est un diviseur de Cartier d'après la proposition 5.2.4).

Proposition 5.3.2 — *φ_n est invariant par l'action de A sur le second facteur de $X^{(n)} \times_Y X$.*

Démonstration — Soit (s,x) une section de $X^{(n)} \times_Y X$ sur un ouvert étale U de Y et $t \in \Gamma(U,A)$. Notons respectivement α et α' les sections de A telles que $s = (x, \ldots, x) + \alpha$ et $s = (x+t, \ldots, x+t) + \alpha'$. La section x permet d'identifier X à A, et donc $\mathbf{Pic}_{X'/Y}$ à $\mathbf{Pic}_{A'/Y}$; on a alors $s = \alpha$ et $s = nt + \alpha'$. La proposition 5.2.7 montre que l'application $\varphi_0(\cdot, x) \colon \Gamma(U,A) \to \Gamma(U, \mathbf{Pic}_{X'/Y})$ est un morphisme de groupes, d'où $\varphi_n(s, x+t) = [x + \alpha - nt] + (n-1)[x+t] = [x+\alpha] + (n-1)[x] = \varphi_n(s,x)$. □

Comme $X^{(n)}$ est le quotient de $X^{(n)} \times_Y X$ par l'action de A sur le second facteur, on en déduit une flèche de faisceaux d'ensembles $X^{(n)} \to \mathbf{Pic}_{X'/Y}$; elle se factorise évidemment par $\mathbf{Pic}^n_{X'/Y}$. Notons $\psi_n \colon X^{(n)} \to \mathbf{Pic}^n_{X'/Y}$ la flèche ainsi obtenue. Comme $X^{(n)}$ est canoniquement A-isomorphe à $X^{(-n)}$, on peut définir une flèche $X^{(n)} \to \mathbf{Pic}_{X'/Y}$ pour $n < 0$ en demandant que le carré

$$\begin{tikzcd}
X^{(-n)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & X^{(n)} \arrow[d] \\
\mathbf{Pic}_{X'/Y} \arrow[r, "-\mathrm{Id}"] & \mathbf{Pic}_{X'/Y}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Proposition 5.3.3 — *Soit X un torseur sous A. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ψ_n est un isomorphisme et l'on a ainsi une décomposition*

$$\mathbf{Pic}_{X'/Y} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} X^{(n)}.$$

Démonstration — Le théorème 1.8.1 montre que $\mathbf{Pic}_{X'/Y} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{Pic}^n_{X'/Y}$. Il suffit donc de prouver que la flèche $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} X^{(n)} \to \mathbf{Pic}_{X'/Y}$ que l'on a construite est un isomorphisme. La question est locale sur Y pour la topologie étale, ce qui permet de supposer que $X = A$. On vérifie tout de suite que cette flèche coïncide avec l'isomorphisme $\mathbf{Pic}_{A'/Y} = A \oplus \mathbb{Z}$ de la proposition 5.2.10. □

Proposition 5.3.4 — *Soit $A' \to Y$ une fibration de Weierstrass. On dispose d'une suite exacte canonique :*

$$0 \longrightarrow H^2(Y, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \to H^0(Y, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)\right) \longrightarrow H^1(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow 0$$

La section θ de $A' \to Y$ induit une rétraction de la première flèche, d'où une inclusion canonique

$$H^1(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) \subset H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n).$$

Démonstration — On considère la suite spectrale de Leray pour $f \colon A' \to Y$ et le faisceau $\boldsymbol{\mu}_n$. Notons $H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) = M_0 \supset M_1 \supset M_2$ la filtration induite sur $H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n)$. Le quotient M_0/M_1 s'injecte dans $H^0(Y, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)$, d'où $M_1 = \mathrm{Ker}(H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \to H^0(Y, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n))$. Comme f possède une section, $H^i(Y, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^i(A', \boldsymbol{\mu}_n)$ est une injection pour tout i. De plus, $f_\star \boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu}_n$ (les fibres géométriques de f sont connexes) ; par conséquent les différentielles $H^1(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) \to H^3(Y, \boldsymbol{\mu}_n)$ et $H^0(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) \to H^2(Y, \boldsymbol{\mu}_n)$ sont nulles, de sorte que $M_2 = H^2(Y, \boldsymbol{\mu}_n)$ et $M_1/M_2 = H^1(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)$. □

Lemme 5.3.5 — *Soit $f \colon A' \to Y$ une fibration de Weierstrass. La flèche*

$$\mathrm{Ker}\left(H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \to H^0(Y, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)\right) \longrightarrow H^1(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)$$

est construite de la manière suivante. Soient $0 \to \boldsymbol{\mu}_n \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ une résolution injective de $\boldsymbol{\mu}_n$ sur A' et $0 \to R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n \to J^0 \to J^1 \to \cdots$ une résolution injective de $R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n$ sur Y. Comme J^0 et J^1 sont injectifs, il existe α et β faisant commuter le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f_\star I^1 \to f_\star I^2) \arrow[r] \arrow[d] & f_\star I^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & f_\star I^2 \arrow[d, "\beta"] & \\
0 \arrow[r] & R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2
\end{tikzcd}$$

Soit $a \in \operatorname{Ker}(H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \to H^0(Y, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n))$. Cet élément est représenté par une section globale de I^2, i.e. $b \in \Gamma(Y, f_\star I^2)$. La condition que a s'annule dans $H^0(Y, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)$ se traduit par le fait que b provient de $f_\star I^1$, localement sur Y pour la topologie étale. Par conséquent, $\beta(b)$ s'envoie sur 0 dans J^2 et définit donc un élément de $H^1(Y, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)$. On vérifie que celui-ci ne dépend d'aucun choix.

DÉMONSTRATION — Il s'agit d'un fait général sur la suite spectrale de Leray. Une preuve détaillée demanderait de reprendre précisément la construction de la suite spectrale ; admettons ce lemme. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème-clef de cette section. Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier inversible dans k, $f \colon A' \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration de Weierstrass avec A' normal et à singularités rationnelles. Soit $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_nA)$. D'après les propositions 5.3.4 et 5.2.10,

$$H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_nA) \subset H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n).$$

On peut donc considérer α comme un élément de $H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n)$ et calculer son cup-produit

$$\alpha \cup \alpha \in H^4(A', \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \to H^4(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) = \mathbb{Z}/n.$$

Par ailleurs, le lemme 5.3.1 fait correspondre à α un torseur X sous A et une section globale S de $X^{(n)} = \mathbf{Pic}^n_{X'/\mathbb{P}^1_k}$ (proposition 5.3.3). Comme $\operatorname{Br}(\mathbb{P}^1_k) = 0$ (théorème 1.3.1), la proposition 1.4.2 montre que

$$H^0(\mathbb{P}^1_k, \mathbf{Pic}_{X'/\mathbb{P}^1_k}) = \operatorname{Pic}(X')/\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1_k).$$

Finalement, S est représentée par un diviseur de Cartier D sur X', modulo $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1_k)$. Soit $d \in H^2(X', \boldsymbol{\mu}_n)$ l'image de D par l'application bord de la suite de Kummer ; l'élément $d \cup d \in H^4(X', \boldsymbol{\mu}_n) \to H^4(X'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = \mathbb{Z}/n$ ne dépend pas du diviseur D représentant S. En effet, si $f \in H^2(X', \boldsymbol{\mu}_n)$ est la classe d'une fibre de $X' \to \mathbb{P}^1_k$, on a $(d+f) \cup (d+f) = d \cup d + 2d \cup f$ (puisque l'auto-intersection d'une fibre est nulle), or $d \cup f = 0$ dans $\mathbb{Z}/n$ puisque D est de degré n sur les fibres.

THÉORÈME 5.3.6 — *Supposons qu'il existe un morphisme birationnel d'une surface $K3$ vers A'. Avec les notations qui précèdent, si k est de caractéristique 0 et que A' est régulier, ou si A' possède un relèvement A'_1 en caractéristique 0 avec A'_1 régulier, les images dans $\mathbb{Z}/n$ de $d \cup d$ et de $\alpha \cup \alpha$ coïncident.*

La signification précise de « A' possède un relèvement A'_1 en caractéristique 0 » est la suivante : il existe un anneau local hensélien intègre R de caractéristique 0, de corps résiduel isomorphe à k, et une fibration de Weierstrass $A'_R \to \mathbb{P}^1_R$ de fibre spéciale A'. On note A'_1 la fibre générique.

LEMME 5.3.7 — *Soit $A' \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration de Weierstrass, où k est un corps fini. Après une extension finie de k, A' possède un relèvement A'_1 en caractéristique 0 tel que A'_1 soit régulier.*

DÉMONSTRATION — D'après le théorème 5.2.6, on peut supposer que A' est définie par une équation de Weierstrass $y^2 = x^3 + ax + b$, avec $N \in \mathbb{N}$, $a \in \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(4N))$ et $b \in \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k}(6N))$. Soient K l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel k, B son anneau d'entiers, $a_B \in \Gamma(\mathbb{P}^1_B, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_B}(4N))$ et $b_B \in \Gamma(\mathbb{P}^1_B, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_B}(6N))$ des relèvements de a et b. Choisissons une origine sur $\mathbb{P}^1_B$ et représentons a et b (resp. a_B et b_B) comme des éléments de $k[t]$ (resp. $B[t]$) avec $\deg(a) \leqslant 4$, $\deg(a_B) \leqslant 4$, $\deg(b) \leqslant 6$, $\deg(b_B) \leqslant 6$. Quitte à remplacer k par un corps de décomposition de b, on peut supposer b scindé, ce qui permet de choisir b_B à racines simples et de degré 6 (on le voit comme polynôme dans $K[t]$). L'équation

$$y^2 = x^3 + u a_B x + b_B$$

définit une fibration de Weierstrass $f \colon A'_{B[u]} \to \mathbb{P}^1_{B[u]}$. Si M est une $B[u]$-algèbre, notons f_M la fibration de Weierstrass déduite de f par extension des scalaires. Soient R l'hensélisé du localisé de $B[u]$ en l'idéal premier $(u-1, p)$ et L le corps des fractions de R. Vérifions que la fibration de Weierstrass f_R convient. Sa fibre spéciale est clairement isomorphe à la fibration $A' \to \mathbb{P}^1_k$ de départ. Comme $A'_{K[u]} \to \operatorname{Spec}(K[u])$ est propre, l'ensemble des points de $\operatorname{Spec}(K[u])$ au-dessus desquels la fibre est lisse est un ouvert. Il est non vide, car il contient le point $u = 0$ (on vérifie tout de suite que l'équation $y^2 = x^3 + b_B$ définit une surface lisse sur K, grâce aux hypothèses faites sur b_B) ; par conséquent il contient aussi le point générique, ce qui montre bien que A'_L est régulier. □

5.4 Preuve du théorème 5.3.6

On reprend les notations précédant l'énoncé du théorème 5.3.6.

5.4.1 Réduction à la caractéristique 0

Supposons le théorème prouvé dans le cas où k est de caractéristique 0 et A' régulier. Soient R un anneau local hensélien intègre de caractéristique 0, k son corps résiduel, K son corps des fractions, $f_R \colon A'_R \to \mathbb{P}^1_R$ une fibration de Weierstrass, $f \colon A' \to \mathbb{P}^1_k$ et $f_K \colon A'_K \to \mathbb{P}^1_K$ les fibrations de Weierstrass qui s'en déduisent par changement de base. On suppose que A' est normal, à singularités rationnelles, qu'il existe un morphisme birationnel d'une surface $K3$ vers A', et que A'_K est régulier. Notons R^{sh} l'hensélisé strict de R et K^{sh} son corps des fractions.

Lemme 5.4.1 — *A'_K est une surface $K3$.*

Démonstration — Par hypothèse, il existe un morphisme birationnel $\pi \colon A^\star \to A'$, où $A^\star$ est une surface $K3$. D'après le théorème 1.6.6, une surface $K3$ étant minimale, π induit un isomorphisme sur l'ouvert des points réguliers de A', et $R^q\pi_\star\mathscr{O}_{A^\star} = 0$ pour tout $q > 0$. De plus, $\pi_\star\mathscr{O}_{A^\star} = \mathscr{O}_{A'}$. Par conséquent, d'après la suite spectrale de Leray, $H^n(A', \mathscr{O}_{A'}) = H^n(A^\star, \mathscr{O}_{A^\star})$ pour tout n, et donc $\chi(\mathscr{O}_{A'}) = \chi(\mathscr{O}_{A^\star})$. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une famille plate de faisceaux cohérents est localement constante sur la base ([21], 7.9.4), d'où $\chi(\mathscr{O}_{A'_K}) = \chi(\mathscr{O}_{A'})$. Enfin, $A^\star$ étant une surface $K3$, $\chi(\mathscr{O}_{A^\star}) = 2$, d'où finalement $\chi(\mathscr{O}_{A'_K}) = 2$. D'après la proposition 1.6.5, $\omega_{A'_K}$ est donc trivial. Il reste à prouver que $H^1(A'_K, \mathscr{O}_{A'_K}) = 0$, ce qui découle de $\chi(\mathscr{O}_{A'_K}) = 2$ par dualité de Serre. □

La proposition 5.3.4 fournit des inclusions canoniques

$$H^1(\mathbb{P}^1_R, R^1(f_R)_\star\boldsymbol{\mu}_n) \subset H^2(A'_R, \boldsymbol{\mu}_{n,R}),$$
$$H^1(\mathbb{P}^1_k, R^1f_\star\boldsymbol{\mu}_n) \subset H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n)$$

et

$$H^1(\mathbb{P}^1_K, R^1(f_K)_\star\boldsymbol{\mu}_n) \subset H^2(A'_K, \boldsymbol{\mu}_{n,K}).$$

Le théorème de changement de base propre montre que $H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) = H^2(A'_R, \boldsymbol{\mu}_n)$, et que $H^1(\mathbb{P}^1_k, R^1f_\star\boldsymbol{\mu}_n) = H^1(\mathbb{P}^1_R, R^1(f_R)_\star\boldsymbol{\mu}_n)$. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r, equal] & H^2(A'_R, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r] & H^2(A'_K, \boldsymbol{\mu}_n) \\
H^1(\mathbb{P}^1_k, R^1f_\star\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[u] \arrow[r, equal] & H^1(\mathbb{P}^1_R, R^1(f_R)_\star\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[u] \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1_K, R^1(f_K)_\star\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif, du fait que les flèches $A' \to A'_R$ et $\mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_R$ induisent un morphisme de suites spectrales de Leray (les flèches verticales du carré précédent sont fournies par de telles suites spectrales, voir la démonstration de la proposition 5.3.4). Soit $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^1_k, R^1f_\star\boldsymbol{\mu}_n)$. Notons α_R son image dans $H^1(\mathbb{P}^1_R, R^1(f_R)_\star\boldsymbol{\mu}_n)$ et $\alpha_K \in H^1(\mathbb{P}^1_K, R^1(f_K)_\star\boldsymbol{\mu}_n)$ la restriction de α_R. Par fonctorialité du cup-produit, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] & H^2(A'_R, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^2(A'_K, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] \\
H^4(A', \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) & H^4(A'_R, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \arrow[l] \arrow[r] & H^4(A'_K, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}),
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont $x \mapsto x \cup x$, est commutatif. Le carré

$$\begin{tikzcd}
H^4(A'_R, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^4(A'_K, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \arrow[d] \\
H^4(A', \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \arrow[r] & \mathbb{Z}/n
\end{tikzcd} \tag{4}$$

est commutatif (la flèche $H^4(A', \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \to \mathbb{Z}/n$ est la composée $H^4(A', \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \to H^4(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n$ où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k ; de même pour $H^4(A'_K, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \to \mathbb{Z}/n$). En effet, la flèche $H^4(A'_R, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \to H^4(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2})$ se factorise par $H^4(A'_{R^{\mathrm{sh}}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2})$ et la classe d'un R-point de A'_R se restreint en la classe d'un K-point (resp. k-point) de A'_K (resp. A'), qui est envoyé sur 1 par le morphisme trace. On déduit des deux diagrammes précédents que $\alpha \cup \alpha = \alpha_R \cup \alpha_R = \alpha_K \cup \alpha_K$.

Le lemme 5.3.1 fait correspondre à α_R un couple (X_R, S_R), où X_R est un torseur sous A_R sur $\mathbb{P}^1_R$ et S_R une section de $X_R^{(n)}$; X_R est représentable car $A_R \to \mathbb{P}^1_R$ est propre, lisse, à fibres géométriquement connexes et $\mathbb{P}^1_R$ est régulier (cf. [30], III.4.3). Notons respectivement (X_K, S_K) et (X, S) les couples associés à α_K et α. Clairement, $X_K = X_R \times_R K$, $X_k = X_R \times_R k$, et S et S_K se déduisent de S_R par changement de base. Soit X'_R le produit contracté de X_R par A_R ; c'est en tout cas un espace algébrique. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^1_K, X_K^{(n)}) \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^1_R, X_R^{(n)}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^1_k, X^{(n)}) \arrow[d] \\
H^0(\mathbb{P}^1_{K^{\mathrm{sh}}}, X_K^{(n)}) \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^1_{R^{\mathrm{sh}}}, X_R^{(n)}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, X^{(n)}) \arrow[d] \\
H^0(\mathbb{P}^1_{K^{\mathrm{sh}}}, \mathbf{Pic}_{X'_{K^{\mathrm{sh}}}/\mathbb{P}^1_{K^{\mathrm{sh}}}}) & H^0(\mathbb{P}^1_{R^{\mathrm{sh}}}, \mathbf{Pic}_{X'_{R^{\mathrm{sh}}}/\mathbb{P}^1_{R^{\mathrm{sh}}}}) \arrow[l] \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \mathbf{Pic}_{X'_{\overline{k}}/\mathbb{P}^1_{\overline{k}}}) \\
\mathrm{Pic}(X'_{K^{\mathrm{sh}}}) \arrow[u, "\alpha_{K^{\mathrm{sh}}}"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X'_{R^{\mathrm{sh}}}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_{R^{\mathrm{sh}}}"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X'_{\overline{k}}) \arrow[u, "\alpha_{\overline{k}}"] \arrow[d] \\
H^2(X'_{K^{\mathrm{sh}}}, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] & H^2(X'_{R^{\mathrm{sh}}}, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] \\
H^4(X'_{K^{\mathrm{sh}}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) & H^4(X'_{R^{\mathrm{sh}}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}) \arrow[l] \arrow[r] & H^4(X'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n^{\otimes 2}),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales des H^2 vers les H^4 sont $x \mapsto x \cup x$ et celles à valeurs dans les groupes de Picard sont les ψ_n de la proposition 5.3.2, est commutatif (fonctorialité de ψ_n, de l'application bord de la suite de Kummer et du cup-produit). Comme R^{sh} est strictement hensélien, $\mathrm{Br}(R^{\mathrm{sh}})$ est nul et $\alpha_{R^{\mathrm{sh}}}$ est donc surjectif. Ajouté à la commutativité du carré analogue au carré (4), ceci montre l'égalité $d \cup d = d_K \cup d_K$ (notations du théorème 5.3.6), ce qui conclut la réduction du théorème 5.3.6 au cas de la caractéristique 0 avec A' régulier.

5.4.2 Construction « $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$ »

Un *espace analytique complexe* est un espace topologique séparé et dénombrable à l'infini, muni d'un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres, localement isomorphe à un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^N$ pour un $N \in \mathbb{N}$ (voir [15] pour la théorie générale des espaces analytiques complexes). Par la suite, le terme « espace analytique réduit » désignera toujours un espace analytique complexe réduit. Si X est un espace analytique réduit, on note $\mathrm{An}(X)$ la catégorie des X-espaces analytiques réduits, i.e. des espaces analytiques réduits T munis d'un morphisme $T \to X$. Elle possède des produits fibrés ([15], 0.34). Le foncteur d'oubli de $\mathrm{An}(X)$ vers la catégorie des espaces topologiques au-dessus de X est fidèle et commute au produit fibré. Fixons une fois pour toutes une application analytique $S \to S_0$ entre espaces analytiques réduits.

Une S-variété analytique X définit un faisceau sur S (topologie usuelle), par le plongement de Yoneda : si U est un ouvert de S, $X(U)$ est l'ensemble des sections analytiques de X sur U. Si l'on considère X dans la catégorie des S-variétés différentielles, le plongement de Yoneda fournit le faisceau des sections différentiables. Le but de cette partie est de décrire une construction purement faisceautique (et possédant de bonnes propriétés, d'exactitude notamment) pour obtenir le faisceau des sections différentiables à partir de celui des sections analytiques, quitte à se placer sur un « grand site ». En réalité, on s'intéressera aux S-applications $\mathscr{C}^\infty$ qui sont de plus analytiques sur les fibres de $S \to S_0$, ce qui est plus général (on peut prendre $S = S_0$). Lorsque X et Y sont des fermés analytiques réduits d'ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^m$, une application $X \to Y$ sera dite $\mathscr{C}^\infty$ si elle se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dans des voisinages de X et Y. Cette notion ne dépend pas des plongements $X \subset U$ et $Y \subset V$, d'où une notion d'application $\mathscr{C}^\infty$ entre espaces analytiques réduits.

Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau (d'ensembles ou de $\mathscr{G}$-modules où $\mathscr{G}$ est un préfaisceau d'anneaux) sur $\mathrm{An}(S)$. Nous allons définir un nouveau préfaisceau $p\mathscr{F}$. Si T est un S-espace analytique, notons $\mathscr{J}_T$ la catégorie définie par :

- un objet de $\mathscr{J}_T$ est un $X \in \mathrm{An}(S)$ muni d'une S-application $T \to X$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, dont les restrictions aux fibres de $S \to S_0$ soient analytiques ;
- une flèche de $T \to X$ vers $T \to X'$ est une S-application analytique *de* X' *vers* X faisant commuter le triangle formé par T, X, X'.

Pour alléger les notations, on écrira $T \xrightarrow{\infty} X$ pour désigner une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, analytique sur les fibres de $S \to S_0$. Pour $T \in \mathrm{An}(S)$, on pose :

$$(p\mathscr{F})(T) = \varinjlim_{(T \xrightarrow{\infty} X) \in \mathscr{J}_T} \mathscr{F}(X)$$

Cette limite inductive est filtrante ; en effet, $\mathscr{J}_T$ admet des limites inductives finies, du fait que $\mathrm{An}(S)$ admet des produits fibrés. On pourra donc dire qu'une section de $p\mathscr{F}$ sur T est représentée par une section de $\mathscr{F}$ sur un certain S-espace analytique X.

Explicitons la fonctorialité de $p\mathscr{F}$. Soient $T_1 \to T_2$ une S-application analytique, $s \in (p\mathscr{F})(T_2)$ représentée par $t \in \mathscr{F}(X)$ avec $(T_2 \xrightarrow{\infty} X) \in \mathscr{J}_{T_2}$. L'image de s par $\mathscr{F}'(T_2) \to (p\mathscr{F})(T_1)$ est $t \in \mathscr{F}(X)$ où l'on voit X dans $\mathscr{J}_{T_1}$ à l'aide de la composée $T_1 \to T_2 \xrightarrow{\infty} X$.

Une famille de flèches $(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}$ de $\mathrm{An}(S)$ sera dite couvrante si les u_i sont des immersions ouvertes et si leurs images recouvrent X. Munissons $\mathrm{An}(S)$ de la topologie de Grothendieck engendrée par la prétopologie ainsi définie. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau sur $\mathrm{An}(S)$, on notera aF le faisceau associé.

Définition 5.4.2 — *Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur* $\mathrm{An}(S)$*. On pose $\overline{\mathscr{F}} = ap\mathscr{F}$.*

Remarque — Pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{An}(S)$, on dispose de flèches canoniques évidentes $\mathscr{F} \to p\mathscr{F}$ et $\mathscr{F} \to \overline{\mathscr{F}}$. De plus, p est un foncteur, et donc $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$ aussi.

Proposition 5.4.3 — *Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur* $\mathrm{An}(S)$*. Si $\mathscr{F}$ est représentable par un $X \in \mathrm{An}(S)$, $\overline{\mathscr{F}}(U)$ est l'ensemble des S-applications $\mathscr{C}^\infty$ de U vers X dont les restrictions aux fibres de $S \to S_0$ sont analytiques, pour $U \in \mathrm{An}(S)$.*

Démonstration — C'est une simple vérification, laissée au lecteur. □

Proposition 5.4.4 — *Pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur* $\mathrm{An}(S)$*, la flèche canonique $\overline{\mathscr{F}} \to \overline{a\mathscr{F}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration — Nous allons définir une flèche $pa\mathscr{F} \to ap\mathscr{F}$ et laisser au lecteur le soin de vérifier qu'en passant aux faisceaux associés on obtient l'isomorphisme réciproque de $\overline{\mathscr{F}} \to \overline{a\mathscr{F}}$. Soient $T \in \mathrm{An}(S)$ et $s \in (pa\mathscr{F})(T)$ représentée par $t \in (a\mathscr{F})(W)$ avec $(T \xrightarrow{\infty} W) \in \mathscr{J}_T$. Notons u l'application $T \to W$. Il existe une famille $(W_i)_{i \in I}$ d'ouverts de W telle que $t|_{W_i} \in \mathscr{F}(W_i)$ pour tout i. Soit $T_i = u^{-1}(W_i)$, et notons t'_i la section de $p\mathscr{F}$ sur T_i définie par $T_i \xrightarrow{\infty} W_i$ et $t|_{W_i}$. Les t'_i se recollent, d'où une section de $ap\mathscr{F}$ sur T. □

Proposition 5.4.5 — *Le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$, de la catégorie des faisceaux en groupes abéliens (ou en $\mathscr{G}$-modules où $\mathscr{G}$ est un faisceau d'anneaux) sur* $\mathrm{An}(S)$ *dans elle-même, est exact.*

Démonstration — On ne détaille pas la preuve, qui est facile. Il faut simplement remarquer que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto p\mathscr{F}$, des préfaisceaux vers les préfaisceaux, est exact, puisque la limite inductive intervenant dans la définition de $p\mathscr{F}$ est filtrante. □

Proposition 5.4.6 — *Pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur* $\mathrm{An}(S)$*, $pp\mathscr{F} = p\mathscr{F}$ et $\overline{\overline{\mathscr{F}}} = \overline{\mathscr{F}}$ canoniquement.*

Démonstration — D'après la proposition 5.4.4, il suffit de prouver que $pp\mathscr{F} = p\mathscr{F}$, ce qui est évident sur la définition. □

Proposition 5.4.7 — *Soit $\mathscr{D}$ la catégorie ayant mêmes objets que* $\mathrm{An}(S)$ *mais dans laquelle les flèches de X vers Y sont les S-applications $\mathscr{C}^\infty$ analytiques sur les fibres de $S \to S_0$. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau sur* $\mathrm{An}(S)$ *se prolongeant en un foncteur défini sur $\mathscr{D}$, la flèche canonique $\mathscr{F} \to p\mathscr{F}$ possède une rétraction.*

Démonstration — Fixons un prolongement de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{D}$. Pour $T \in \mathrm{An}(S)$ et $(T \xrightarrow{\infty} W) \in \mathscr{J}_T$, la fonctorialité de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{D}$ fournit une flèche $\mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(T)$. Il est immédiat que ces flèches, pour différents W, sont compatibles entre elles, d'où une flèche $(p\mathscr{F})(T) \to \mathscr{F}(T)$, fonctorielle en T, qui est une rétraction de $\mathscr{F}(T) \to (p\mathscr{F})(T)$. □

Remarque (autre point de vue) — Munissons $\mathscr{D}$ de la topologie de Grothendieck engendrée par la prétopologie définie par la condition « $(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$ est couvrante si les u_i sont injectives et ouvertes ». Notons S_{an} le topos associé à $\mathrm{An}(S)$ et $(S/S_0)_{\mathrm{diff}}$ celui associé à $\mathscr{D}$. Il semblerait que le foncteur évident $\mathrm{An}(S) \to \mathscr{D}$ soit un morphisme de sites, et que, si l'on note $\alpha\colon (S/S_0)_{\mathrm{diff}} \to S_{\mathrm{an}}$ le morphisme de topos qu'il induit, on ait $\overline{\mathscr{F}} = \alpha_\star\alpha^\star\mathscr{F}$ pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{An}(S)$.

5.4.3 Preuve lorsque $k = \mathbb{C}$

Pour le reste de cette section, supposons k de caractéristique 0 et A' régulier. Comme toutes les schémas considérés sont de type fini sur k, le principe de Lefschetz permet de supposer que $k = \mathbb{C}$. Dans cette situation, $A'(\mathbb{C})$ est une variété analytique compacte connexe. Dorénavant, f désignera l'application analytique $A'(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et non plus le morphisme de schémas $A' \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Lorsqu'on utilisera l'opération $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$, les espaces analytiques réduits S et S_0 implicitement fixés seront $S = S_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau sur $\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ et $S = A'(\mathbb{C})$, $S_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$.

Lemme 5.4.8 — $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1f_\star\mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration — Considérons la suite spectrale de Leray pour f et le faisceau $\mathbb{Z}$. Par connexité des fibres de f, $f_\star\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Comme A' est une surface $K3$, $A'(\mathbb{C})$ est simplement connexe ([6], VIII.3), d'où $H_1(A'(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = 0$ (homologie singulière) et donc $H^3(A'(C),\mathbb{Z}) = 0$ (dualité de Poincaré). Pour conclure, il suffit donc de prouver que les différentielles $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^2f_\star\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1f_\star\mathbb{Z})$ et $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1f_\star\mathbb{Z}) \to H^4(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ sont nulles. La seconde l'est évidemment : $H^4(\mathbb{P}^1(C),\mathbb{Z})$ est nul. Comme $H^3(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = 0$, le terme $E_\infty^{0,2}$ de la suite spectrale est $\mathrm{Ker}(H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^2f_\star\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1f_\star\mathbb{Z}))$, d'où la suite exacte

$$H^2(A'(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^2f_\star\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1f_\star\mathbb{Z}).$$

Il reste à montrer la surjectivité de la première flèche ; pour cela il suffit de voir que le morphisme de faisceaux $\mathbb{Z} \to R^2f_\star\mathbb{Z}$ défini par la classe de θ dans $H^2(A'(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Cela équivaut, par le théorème de changement de base propre topologique, à ce que $H^2(f^{-1}(x),\mathbb{Z})$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que la classe du point $\theta_x\colon \{x\} \to f^{-1}(x)$ en soit un générateur ; ceci est évident. □

Si X est un espace analytique réduit, notons $\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}$ son faisceau structural, i.e. le faisceau des fonctions analytiques à valeurs complexes. Rappelons l'existence de la suite exacte exponentielle :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathscr{O}_{X,\mathrm{an}} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^\star_{X,\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

Lorsque X est un espace analytique réduit, notons $\mathscr{O}_{\mathrm{An}(X),\mathrm{an}}$ le faisceau sur $\mathrm{An}(X)$ défini par $\mathscr{O}_{\mathrm{An}(X),\mathrm{an}}(T) = \mathscr{O}_{T,\mathrm{an}}(T)$; il est représenté par le X-espace $X \times \mathbb{C}$. La suite de faisceaux sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

est évidemment exacte. Notons encore $f_\star$ le foncteur image directe de la catégorie des faisceaux sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$ vers celle des faisceaux sur $\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. On vérifie tout de suite qu'il est exact à gauche.

Remarque — Les foncteurs dérivés droits de ce $f_\star$ calculent la « même » cohomologie que le foncteur image directe entre faisceaux sur les espaces topologiques $A'(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, au sens où $(R^q f_\star \mathscr{F})|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} = R^q f_\star(\mathscr{F}|_{A'(\mathbb{C})})$ pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$. En effet, le foncteur de restriction de la catégorie des faisceaux sur $\mathrm{An}(X)$ vers celle des faisceaux sur X est exact, pour tout espace analytique réduit X.

Lemme 5.4.9 — *Le morphisme $f_\star \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}} \to f_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}$ est surjectif.*

Démonstration — Soient $T \in \mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ et $\alpha \in \Gamma(T, f_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}) = \Gamma(A'(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T, \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}})$. Notons g la projection $A'(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T \to T$ et θ_T la section de g déduite de θ par changement de base. On veut voir que, localement pour la topologie usuelle sur T, α provient de $\Gamma(A'(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T, \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}})$; comme g est propre, ses fibres sont compactes et α est constante sur les fibres de g. Par conséquent, α se factorise par θ_T, et la surjectivité de $\mathscr{O}_{T,\mathrm{an}} \to \mathscr{O}^\star_{T,\mathrm{an}}$ permet de conclure. □

Soit X un torseur sous A (éventuellement $X = A$). Notons X_{an} (resp. X_{diff}) le faisceau d'ensembles sur $\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ des sections analytiques (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de $X(\mathbb{C})$, i.e. $\Gamma(T, X_{\mathrm{an}})$ (resp. $\Gamma(T, X_{\mathrm{diff}})$) est l'ensemble des $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-applications analytiques (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de T dans $A(\mathbb{C})$. La loi de groupe $A \times_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} A \to A$ munit A_{an} d'une structure de faisceau en groupes, et X_{an} est un torseur sous A_{an}. Notons $g\colon X'(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le morphisme structural. On peut construire une flèche $X^{(n)}_{\mathrm{an}} \to R^1 g_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(X'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}$ analogue à la flèche ψ_n de la proposition 5.3.3, pour $n \in \mathbb{Z}$, en suivant le même procédé. Explicitons par exemple le cas où $X = A$ (on s'y ramène par changement de base). Soient $T \in \mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ et $s \in \Gamma(T, A_{\mathrm{an}})$, i.e. s est une section de la projection $A(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T \to T$. C'est une immersion fermée et elle définit un diviseur sur $M = A'(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T$, dont on note $[s]$ la classe dans $H^1(M, \mathscr{O}^\star_{M,\mathrm{an}})$. On associe à s l'image de $[s] + (n-1)[\theta_T]$ dans $\Gamma(T, R^1 g_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}})$, où θ_T est la section déduite de θ par changement de base.

Théorème 5.4.10 — *Pour tout torseur X sous A, on a canoniquement*

$$\coprod_{n \in \mathbb{Z}} X^{(n)}_{\mathrm{an}} = R^1 g_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(X'(C)),\mathrm{an}}.$$

Démonstration — Il suffit de le vérifier localement, auquel cas $X = A$; voir alors [6], prop. V.9.1. □

Appliquons $f_\star$ à la suite exacte (5). Notons $\mathscr{L} = R^1 f_\star \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}$. On obtient, grâce au lemme 5.4.9 et au théorème 5.4.10, la suite exacte de faisceaux sur $\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ suivante :

$$0 \longrightarrow R^1 f_\star \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow A_{\mathrm{an}} \longrightarrow 0 \tag{6}$$

Lorsque X est un espace analytique réduit, notons $\mathscr{O}_{\mathrm{An}(X),\mathrm{diff}}$ le faisceau sur $\mathrm{An}(X)$ dont l'anneau des sections sur T est $\mathscr{O}_{T,\mathrm{diff}}(T)$, où $\mathscr{O}_{T,\mathrm{diff}}$ est le faisceau sur T des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes. Nous allons appliquer l'opération $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$ à la suite exacte (6).

Lemme 5.4.11 — *On a $\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})),\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})),\mathrm{diff}}$.*

Avant de prouver ce lemme, rappelons un théorème important de cohomologie cohérente analytique.

Théorème 5.4.12 — *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques réduits, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}$-module cohérent plat sur Y (i.e. pour tout $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_{Y,\mathrm{an},f(x)}$-module plat), et q un entier. Pour $y \in Y$, notons $X_y = f^{-1}(y)$ et $\mathscr{F}_y$ la fibre du faisceau $\mathscr{F}$, i.e. le $\mathscr{O}_{X_y,\mathrm{an}}$-module cohérent déduit de $\mathscr{F}$. La fonction $y \mapsto \dim H^q(X_y, \mathscr{F}_y)$ est semi-continue supérieurement ; de plus, si elle est localement constante, $R^q f_\star \mathscr{F}$ est localement libre et sa formation commute à tout changement de base.*

Démonstration — Voir [5], III.4.10 et III.4.12. □

Démonstration du lemme — Les fibres de f vérifient $\dim H^1(f^{-1}(y), \mathscr{O}_{f^{-1}(y),\mathrm{an}}) = 1$ puisque ce sont des courbes connexes de genre arithmétique 1. Cela entraîne, grâce au théorème 5.4.12, que $R^1 f_\star \mathscr{O}_{A'(\mathbb{C}),\mathrm{an}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{an}}$-module inversible ; il en va de même de $\mathscr{L}|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$, d'après la remarque 5.4.3. Notons $L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le fibré vectoriel analytique associé.

Sous-lemme 5.4.13 — *$\mathscr{L}$ est représenté par* $(L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \in \mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.

Démonstration — Soit $(T \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \in \mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Appliquons le théorème de changement de base propre en cohomologie cohérente analytique (théorème 5.4.12) au carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} A'(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_T"] & A'(\mathbb{C}) \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "g"] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

On obtient, en utilisant de plus la remarque 5.4.3 :

$$g^\star\left(\mathscr{L}|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}\right) = g^\star R^1 f_\star \mathscr{O}_{A'(\mathbb{C}),\mathrm{an}} = R^1 f_{T,\star}\mathscr{O}_{A'(\mathbb{C})\times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}T,\mathrm{an}} = \mathscr{L}|_T.$$

Par conséquent, $\Gamma(T,\mathscr{L}) = \Gamma\left(T, g^\star\left(\mathscr{L}|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}\right)\right)$. Le faisceau inversible $g^\star\left(\mathscr{L}|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}\right)$ correspond au fibré vectoriel $L \times_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} T \to T$; comme de plus se donner une section analytique de ce fibré revient à se donner une $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-application analytique $T \to L$, on a prouvé le sous-lemme. □

La proposition 5.4.3 permet maintenant de conclure, car le faisceau sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des sections $\mathscr{C}^\infty$ de L est le $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{diff}}$-module inversible $\mathscr{L}|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{diff}}$ (cela se voit localement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), et de même après tout changement de base. □

Lemme 5.4.14 — *On a* $\overline{R^1 f_\star \mathbb{Z}} = R^1 f_\star \mathbb{Z}$.

Démonstration — Le foncteur de Yoneda étant pleinement fidèle, il existe une $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-application analytique $m\colon L \to A(\mathbb{C})$ induisant la flèche $\mathscr{L} \to A_{\mathrm{an}}$ de la suite exacte (6). Par conséquent, $R^1 f_\star\mathbb{Z}$ est représentable (nommément, par le $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-espace analytique réduit M produit fibré de L et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de $A(\mathbb{C})$, les flèches implicites étant m et la section nulle). Il est bien connu que sur chaque fibre de la projection vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, m est localement un isomorphisme ; comme $L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $A(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont submersives, cela implique que m est localement un isomorphisme. Il en va donc de même de la projection $M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ainsi, toute $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-application $\mathscr{C}^\infty$ de but M est analytique, d'où le résultat grâce à la proposition 5.4.3. □

Enfin, la proposition 5.4.3 montre que $\overline{A_{\mathrm{an}}} = A_{\mathrm{diff}}$. D'après la proposition 5.4.5 et les lemmes 5.4.14 et 5.4.11, l'application de l'opération $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$ à la suite (6) fournit la suite exacte de faisceaux sur $\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$:

$$0 \longrightarrow R^1 f_\star \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})),\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{\mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})),\mathrm{diff}} \longrightarrow A_{\mathrm{diff}} \longrightarrow 0$$

Restreignons-la à l'espace topologique $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et passons en cohomologie :

$$H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{diff}}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), A_{\mathrm{diff}}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1 f_\star \mathbb{Z})$$

Le dernier terme est nul (lemme 5.4.8). Un $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{diff}}$-module est un faisceau mou (grâce à l'existence de partitions de l'unité) et donc acyclique. Par conséquent le premier terme est nul aussi. On a ainsi prouvé :

Proposition 5.4.15 — $H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), A_{\mathrm{diff}}) = 0$.

Le faisceau ${}_nA$ est constructible, puisque représenté par un schéma étale ; d'après le théorème de comparaison entre cohomologie étale d'une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ et cohomologie de l'espace analytique associé, on a donc un isomorphisme canonique $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, {}_nA) = H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), {}_nA_{\mathrm{an}})$.

Lemme 5.4.16 — *Les suites*

$$0 \longrightarrow {}_nA_{\mathrm{an}} \longrightarrow A_{\mathrm{an}} \xrightarrow{n} A_{\mathrm{an}} \longrightarrow 0 \qquad (7)$$

et

$$0 \longrightarrow {}_nA_{\mathrm{diff}} \longrightarrow A_{\mathrm{diff}} \xrightarrow{n} A_{\mathrm{diff}} \longrightarrow 0 \qquad (8)$$

sont exactes et ${}_nA_{\mathrm{diff}} = {}_nA_{\mathrm{an}}$.

Démonstration — Le morphisme $n_A\colon A \to A$ étant étale (proposition 5.2.8), la multiplication par n de $A(\mathbb{C})$ est localement un isomorphisme de variétés analytiques. Ceci prouve l'exactitude de la première suite. Appliquons-lui l'opération $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$; d'après les propositions 5.4.5 et 5.4.3, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{{}_nA_{\mathrm{an}}} \longrightarrow A_{\mathrm{diff}} \xrightarrow{n} A_{\mathrm{diff}} \longrightarrow 0$$

Il reste à prouver que $\overline{{}_nA_{\mathrm{an}}} = {}_nA_{\mathrm{an}}$. Le faisceau ${}_nA_{\mathrm{an}}$ est représenté par la variété analytique $({}_nA)(\mathbb{C}) = A(\mathbb{C}) \times_{A(\mathbb{C})} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les flèches implicites étant la multiplication par n et la section nulle. D'après la proposition 5.4.3, il suffit donc de montrer que pour $T \in \mathrm{An}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, toute $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-application $\mathscr{C}^\infty$ $g\colon T \to ({}_nA)(\mathbb{C})$ est analytique. Ceci est clair puisque la projection $({}_nA)(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est localement un isomorphisme, étant déduite de la multiplication par n sur $A(\mathbb{C})$ par changement de base. □

Ce lemme montre que l'on a même $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, {}_nA) = H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), {}_nA_{\mathrm{diff}})$. La suite exacte (8) fournit une flèche $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), A_{\mathrm{diff}}) \to H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), {}_nA_{\mathrm{diff}})$, dont la proposition 5.4.15 montre qu'elle est surjective. Ainsi, tout $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, {}_nA)$ est induit par un $S \in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), A_{\mathrm{diff}})$. Nous allons maintenant exprimer les entiers associés à α apparaissant dans l'énoncé du théorème 5.3.6 en fonction de S. Pour $T \in \mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$, notons $\mathscr{O}_{T,\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ le faisceau sur T des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes dont les restrictions aux fibres de la composée $T \to A'(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont analytiques. Notons $\mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ le faisceau sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$ défini par $\mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}}(T) = \mathscr{O}_{T,\mathrm{diff},\mathrm{an}}(T)$. Par la suite, afin d'alléger les notations, on écrira souvent $\mathscr{O}_{A',\mathrm{an}}$, $\mathscr{O}_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}$, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}$ au lieu de $\mathscr{O}_{A'(\mathbb{C}),\mathrm{an}}$, $\mathscr{O}_{A'(\mathbb{C}),\mathrm{diff},\mathrm{an}}$, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathrm{diff}}$.

Soit $g\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ un torseur sous A. Comme les fibres de g sont compactes, $g_\star\mathscr{O}_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}$. De plus, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}$ étant mou, le groupe $H^i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}})$ est nul pour tout $i > 0$; la suite exacte exponentielle montre donc que

$$H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}) = H^3(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0.$$

Elle montre aussi que $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{\mathbb{P}^1,\mathrm{an}}) = 0$. Ainsi, les suites spectrales de Leray pour g et les faisceaux $\mathscr{O}_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ et $\mathscr{O}_{X',\mathrm{an}}$ fournissent le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{\mathbb{P}^1,\mathrm{an}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X'(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{an}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1g_\star\mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{an}}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}) \arrow[r] & H^1(X'(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1g_\star\mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (9)$$

Proposition 5.4.17 — *Le morphisme canonique* $(\overline{\mathscr{L}})|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \longrightarrow R^1f_\star\mathscr{O}_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration — La fonction rationnelle x sur $A'(\mathbb{C})$ permet de factoriser f en $A'(\mathbb{C}) \xrightarrow{g} P \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, où p est un fibré projectif et g un revêtement ramifié double, et l'on a alors $g_\star\mathscr{O}_{A',\mathrm{an}} \approx \mathscr{O}_{P,\mathrm{an}} \oplus \mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}(-2)$ localement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ pour la topologie de Zariski (voir [32], III.2). Admettons que $g_\star\mathscr{O}_{A',\mathrm{an}} \otimes_{\mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{P,\mathrm{diff},\mathrm{an}} = g_\star\mathscr{O}_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ (on peut le vérifier à l'aide d'équations locales). Comme g est fini, $g_\star$ est exact, et il suffit donc de prouver que $R^1p_\star(\mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}(m)) \otimes_{\mathscr{O}_{Y,\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{Y,\mathrm{diff}} = R^1p_\star(\mathscr{O}_{P,\mathrm{diff},\mathrm{an}}(m))$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, si Y est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, en notant $\mathscr{O}_{P,\mathrm{diff},\mathrm{an}}(m) = \mathscr{O}_{P,\mathrm{diff},\mathrm{an}} \otimes_{\mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}} \mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}(m)$ (lemme 5.4.11). Soit i une section de p sur Y. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}(m-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{P,\mathrm{an}}(m) \longrightarrow i_\star\mathscr{O}_{Y,\mathrm{an}}(m) \longrightarrow 0$$

et le lemme des cinq permettent de se ramener à la proposition suivante. □

Proposition 5.4.18 — *Soient* Y *un ouvert de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $P = Y \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *et* $p\colon P \to Y$ *la première projection. On note* $\mathscr{F}$ *le faisceau sur* P *des fonctions* $\mathscr{C}^\infty$ *à valeurs complexes, analytiques sur les fibres de* p. *Alors* $R^1p_\star\mathscr{F} = 0$.

Démonstration — Soient $U = \{(t,z) \in Y \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\,;\, |z| < 2\}$ et $V = \{(t,z) \in Y \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\,;\, |z| > 1\}$, étant entendu que l'on a choisi un point $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et que l'on identifie son complémentaire à $\mathbb{C}$, ce qui donne un sens à $|z|$ pour $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, en convenant que $|\infty| = +\infty$. La suite exacte de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert (U,V) de P s'écrit :

$$(p|_U)_\star \mathscr{F}|_U \oplus (p|_V)_\star \mathscr{F}|_V \xrightarrow{\alpha} (p|_{U\cap V})_\star \mathscr{F}|_{U\cap V} \longrightarrow R^1 p_\star \mathscr{F} \longrightarrow R^1(p|_U)_\star \mathscr{F}|_U \oplus R^1(p|_V)_\star \mathscr{F}|_V$$

Il suffit donc de montrer que α est surjective et que $R^1(p|_U)_\star \mathscr{F}|_U = 0$ (en effet, U et V étant Y-isomorphes, $R^1(p|_V)_\star \mathscr{F}|_V = 0$ s'en déduit).

Soient $Y_0 \subset Y$ un ouvert et $g\colon Y_0 \times (U \cap V) \to \mathbb{C}$ une application $\mathscr{C}^\infty$, analytique sur les fibres de p. Soient $g_U\colon Y_0 \times U \to \mathbb{C}$ et $g_V\colon Y_0 \times V \to \mathbb{C}$ les applications définies par

$$g_U(t,z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_U(z)} \frac{g(t,w)}{w-z} dw \qquad \text{et} \qquad g_V(t,z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_V(z)} \frac{g(t,w)}{w-z} dw,$$

où $\gamma_U(z)$ (resp. $\gamma_V(z)$) est un cercle dans U (resp. V) parcouru dans le sens direct et entourant z (resp. n'entourant pas z). Ces intégrales ne dépendent pas des cercles choisis. Les fonctions g_U et g_V sont $\mathscr{C}^\infty$ et analytiques sur les fibres de p, et l'on vérifie sans peine que $g_U - g_V = g$ sur $Y_0 \times (U \cap V)$ (intégrer selon un contour parcourant les deux cercles). Par conséquent, α est bien surjective.

Lorsque g est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un produit $A \times B$ où B est un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une variété différentielle, on notera $\overline{\partial} g$ la fonction sur $A \times B$ obtenue en appliquant l'opérateur $\overline{\partial}$ usuel sur chaque fibre de la première projection, c'est-à-dire :

$$\left(\overline{\partial} g\right)(t,z) = \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(t,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t,z) + i\frac{\partial g}{\partial y}(t,z)\right)$$

Lemme 5.4.19 — *Pour $a > 0$, notons $\Delta(a) \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert centré en 0, de rayon a. Soient M un ouvert de $\mathbb{R}^q$, r et R deux réels avec $0 < r < R$, $g\colon M \times \Delta(R) \to \mathbb{C}$ une application $\mathscr{C}^\infty$. Il existe une application $h\colon M \times \Delta(r) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que $\overline{\partial} h = g|_{M\times\Delta(r)}$.*

Démonstration — Lorsque M est un point, ce lemme est bien connu (lemme de Dolbeault, cf. [24], E.2). La preuve habituelle s'applique sans aucune modification à la situation présente. □

Le lemme précédent montre que la suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow \mathscr{O}_{U,\mathrm{diff}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathscr{O}_{U,\mathrm{diff}} \longrightarrow 0$$

est exacte. Comme $\mathscr{O}_{U,\mathrm{diff}}$ est un faisceau mou, cette suite est une résolution acyclique de $\mathscr{F}|_U$. Pour montrer que $R^1(p|_U)_\star \mathscr{F}|_U = 0$, il suffit donc de montrer que la suite reste exacte après application de $(p|_U)_\star$, ce qui découle du lemme suivant.

Lemme 5.4.20 — *Reprenons les notations du lemme 5.4.19. Soit $M_0 \subset M$ un ouvert tel que $\overline{M_0} \subset M$ et que $\overline{M_0}$ soit compact. Alors il existe $h\colon M_0 \times \Delta(R) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tel que $\overline{\partial} h = g|_{M_0\times\Delta(R)}$.*

Si f est une fonction à valeurs complexes sur un ensemble T et que $T_0 \subset T$, on note $\|f\|_{T_0} = \sup_{t\in T_0} |f(t)|$.

Démonstration — Soit $r_n = (1-2^{-n})R$. Nous allons construire une suite de fonctions $h_n\colon M \times \Delta(r_n) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, vérifiant :

1. $\overline{\partial} h_n = g|_{M\times\Delta(r_n)}$;
2. pour $n \geqslant 2$, $\|h_{n+1} - h_n\|_{M_0\times\Delta(r_{n-1})} \leqslant 2^{-n}$;
3. pour $n \geqslant 2$ et $t \in M_0$, la fonction analytique $(h_{n+1} - h_n)(t,\cdot)$ admet un zéro d'ordre au moins n en 0 (elle est analytique car $\overline{\partial} h_{n+1} = \overline{\partial} h_n$ au voisinage de $(t,0)$).

Le lemme 5.4.19 assure l'existence de h_1 et h_2 vérifiant la condition 1. Pour $n \geqslant 3$, supposons $h_1, \ldots, h_{n-1}$ construites telles que les conditions 1 à 3 soient vérifiées. Soit $\varphi\colon M \times \Delta(r_n) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\overline{\partial}\varphi = g|_{M\times\Delta(r_n)}$ (lemme 5.4.19). Comme $\overline{\partial}(\varphi - h_{n-1}) = 0$ sur $M \times \Delta(r_{n-1})$, il existe des $a_k(t) \in \mathbb{C}$ tels que

$$(\varphi - h_{n-1})(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) z^k \qquad \text{pour } z \in \Delta(r_{n-1}).$$

Les fonctions a_k sont $\mathscr{C}^\infty$ (il est clair que a_0 l'est ; on s'y ramène en dérivant k fois par rapport à z). Posons $v_N(t) = \sum_{k=N}^{\infty} |a_k(t)|\, r_{n-2}^k$. Les v_N forment une suite décroissante de fonctions continues sur M, convergeant simplement vers 0. Le théorème de Dini assure que la convergence est uniforme sur tout compact, en particulier sur $\overline{M_0}$. Fixons un $N \geqslant n$ tel que $\|v_N\|_{\overline{M_0}} \leqslant 2^{-n}$. On pose alors :

$$h_n(t,z) = \varphi(z,t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) z^k$$

On vérifie tout de suite que h_n satisfait bien aux conditions 1 à 3.

Soit $j \geqslant 2$. Notons $H_j = \sum_{n=j}^{\infty}(h_{n+1} - h_n)$ (cette série converge normalement sur $M_0 \times \Delta(r_j)$). On pose $h = h_j + H_j$. Pour différents j, ces fonctions coïncident sur leur domaine de définition ; h est donc bien définie sur $M_0 \times \Delta(R)$. Comme les $h_{n+1} - h_n$ pour $n \geqslant j$ sont analytiques par rapport à z sur $M_0 \times \Delta(r_j)$, il en va de même de H_j. Il existe donc des $b_k(t) \in \mathbb{C}$ tels que

$$H_j(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) z^k \qquad \text{pour } z \in \Delta(r_j), t \in M_0.$$

Puisque H_j est analytique par rapport à z, il suffit pour conclure de prouver que b_k est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de t. Pour cela, on dérive k fois $H_j(t,z)$ par rapport à z, et l'on se ramène à une somme finie grâce à l'hypothèse sur l'ordre du zéro de $(h_{n+1} - h_n)(t,\cdot)$ en 0. □

Remarque — Un argument cohomologique simple permet de déduire des lemmes 5.4.19 et 5.4.20 l'existence d'une fonction $h\colon M \times \Delta(R) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\overline{\partial}h = g$. □

Proposition 5.4.21 — *Si X est un torseur sous A et g la projection $X'(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $R^1 g_\star \mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ est canoniquement isomorphe à la restriction de $\overline{R^1 g_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(X'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}}$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Par conséquent*

$$R^1 g_\star \mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} X^{(n)}_{\mathrm{diff}}$$

et en particulier $R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} = A_{\mathrm{diff}} \oplus \mathbb{Z}$.

Démonstration — La question étant locale, on peut supposer que $X = A$. Le diagramme suivant de faisceaux sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$ est commutatif et ses lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2i\pi"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d] & \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2i\pi"] & \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}} \arrow[r, "\exp"] & \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Appliquons-lui le foncteur $f_\star$; on peut ensuite appliquer $\mathscr{F} \mapsto \overline{\mathscr{F}}$ à la première ligne seulement du diagramme obtenu, car si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur $\mathrm{An}(A'(\mathbb{C}))$, on dispose d'un morphisme canonique $\overline{R^i f_\star \mathscr{F}} \to R^i f_\star \overline{\mathscr{F}}$ (notons que l'on a bien $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ et $\overline{\mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}} = \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ grâce à la proposition 5.4.3, car $\mathbb{Z}$, $\mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}$ et $\mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}$ sont représentés respectivement par $A'(\mathbb{C}) \times \mathbb{Z}$, $A'(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$, $A'(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\star$). D'où le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{R^1 f_\star \mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{R^1 f_\star \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{an}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^1 f_\star \mathbb{Z} \arrow[r] & R^1 f_\star \mathscr{O}_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}} \arrow[r] & R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{\mathrm{An}(A'(\mathbb{C})),\mathrm{diff},\mathrm{an}} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(La surjectivité sur $\mathbb{Z}$ provient de l'existence de la section nulle.) Le lemme 5.4.14, la proposition 5.4.17 et le lemme des cinq permettent de conclure. La seconde assertion découle de la première grâce au théorème 5.4.10. □

Si T est un espace analytique réduit, notons encore $\boldsymbol{\mu}_n$ le faisceau sur T des racines n-èmes de l'unité. La suite

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} \xrightarrow{n} \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

est exacte. Elle reste exacte après application de $f_\star$ puisque $f_\star \mathscr{O}_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}$, d'où un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] \\
H^1(A'(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}) \arrow[r, "\delta_2"] & H^2(A'(\mathbb{C}), \boldsymbol{\mu}_n)
\end{tikzcd}$$

En rassemblant les informations données par la proposition 5.4.21, la suite exacte (9), le carré précédent et la suite exacte fournie par la proposition 5.3.4, on obtient le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes (δ_3 est l'unique flèche telle que le diagramme commute) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r, "i_1"] & \mathrm{Ker}\left(H^2(A'(\mathbb{C}), \boldsymbol{\mu}_n) \to \mathbb{Z}/n\right) \arrow[r, "p_1"] & H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), {}_nA_{\mathrm{diff}}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{\mathbb{P}^1,\mathrm{diff}}) \arrow[r, "i_2"] \arrow[u, "\delta_1"'] & \mathrm{Ker}\left(H^1(A'(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}) \to \mathbb{Z}\right) \arrow[r, "p_2"] \arrow[u, "\delta_2"'] & H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), A_{\mathrm{diff}}) \arrow[r] \arrow[u, "\delta_3"'] & 0
\end{tikzcd}$$

(La flèche $H^1(A'(\mathbb{C}), \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}) \to \mathbb{Z}$ est celle induite par le bord $R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} \to R^2 f_\star \mathbb{Z}$ de la suite exponentielle ; on a déjà vu que $R^2 f_\star \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ (cf. preuve du lemme 5.4.8).) La section nulle $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to A'(\mathbb{C})$ fournit des rétractions r_1 et r_2 aux flèches i_1 et i_2, et donc des sections s_1 et s_2 à p_1 et p_2. Le carré formé par r_1, r_2, δ_1 et δ_2 commute (fonctorialité de l'application bord), il en va donc de même de celui formé par s_1, s_2, δ_2 et δ_3.

Proposition 5.4.22 — *δ_3 est le bord de la suite exacte (8).*

Démonstration — Soit $I^\bullet$ (resp. $J^\bullet$) une résolution injective de $\mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}}$ (resp. A_{diff}) dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $A'(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Notons d_I^m la différentielle $I^{m-1} \to I^m$, de même pour J. On obtient des résolutions injectives de $\boldsymbol{\mu}_n$ et de ${}_nA_{\mathrm{diff}}$ comme dans le lemme 5.3.1. Par la suite, on utilisera implicitement l'isomorphisme canonique $A_{\mathrm{diff}} = \mathrm{Ker}(R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} \to \mathbb{Z})$ de la proposition 5.4.21. La section nulle de A fournit une section de $R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} \to \mathbb{Z}$, d'où une rétraction $R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} \to A_{\mathrm{diff}}$ et donc une flèche $\mathrm{Ker}(f_\star I^1 \to f_\star I^2) \to A_{\mathrm{diff}}$. Par injectivité de J^0 et J^1, il existe des flèches γ_0 et γ_1 faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f_\star I^1 \to f_\star I^2) \arrow[r] \arrow[d] & f_\star I^1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"'] & f_\star I^2 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
0 \arrow[r] & A_{\mathrm{diff}} \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & J^1
\end{tikzcd}$$

Soient $\alpha\colon f_\star(I^1\oplus I^0)\to J^0$ et $\beta\colon f_\star(I^2\oplus I^1)\to J^1\oplus J^0$ définis par $\alpha(x,y)=\gamma_0(x)$, $\beta(x,y)=(\gamma_1(x),-\gamma_0(y))$. Fixons un $x\in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),A_{\mathrm{diff}})$. Son image par δ_3 est représentée par $(d_J^1(x'),0)\in\Gamma(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),J^1\oplus J^0)$, où $x'\in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),J^0)$ est tel que $nx'=x$. Soit $y\in\mathrm{Ker}(\Gamma(A'(\mathbb{C}),I^1)\to\Gamma(A'(\mathbb{C}),I^2))$ dont la classe dans $H^1(A'(\mathbb{C}),\mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$ s'envoie sur x par p_2, i.e. $\gamma_0(y)=x$. Son image z par δ_2 est représentée par $(d_I^2(y'),0)\in\Gamma(A'(\mathbb{C}),I^2\oplus I^1)$ où $y'\in\Gamma(A'(\mathbb{C}),I^1)$ est tel que $ny'=y$. Le lemme 5.3.5 montre enfin que $p_1(z)$ est représenté par $\beta(d_I^2(y'),0)=(\gamma_1(d_I^2(y')),0)=(d_J^1(\gamma_0(y')),0)=(d_J^1(x'),0)$ si $x'=\gamma_0(y')$, ce que l'on peut supposer. □

Fixons un $\alpha\in H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},{}_nA)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},{}_nA) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^2(A',\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d, "\wr"] \\
H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),{}_nA_{\mathrm{diff}}) \arrow[r, "s_1"] & H^2(A'(\mathbb{C}),\boldsymbol{\mu}_n),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes par le théorème de comparaison et dont les flèches horizontales sont les inclusions données par la proposition 5.3.4, est commutatif (en effet, les flèches horizontales se déduisent de suites spectrales de Leray et l'on dispose d'un morphisme de suites spectrales). Par conséquent, si l'on note $\alpha_{\mathrm{diff}}\in H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),{}_nA_{\mathrm{diff}})$ l'image de α, l'élément $\alpha\cup\alpha$ de $\mathbb{Z}/n$ apparaissant dans l'énoncé du théorème est égal à $s_1(\alpha_{\mathrm{diff}})\cup s_1(\alpha_{\mathrm{diff}})$, par fonctorialité du cup-produit. On a vu que α_{diff} provient d'une section $S\in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),A_{\mathrm{diff}})$, et l'on obtient finalement, grâce à la proposition 5.4.22 :

$$\alpha\cup\alpha=\delta_2(s_2(S))\cup\delta_2(s_2(S))\quad\text{dans }\mathbb{Z}/n \tag{10}$$

Soit (X,T) le couple associé à α par le lemme 5.3.1 ; X est un torseur sous A et $T\in H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},X^{(n)})$. Notons $g\colon X'(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'élément $d\cup d$ de l'énoncé du théorème 5.3.6 se calcule à partir de T de la manière suivante : on considère l'image de T dans $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),R^1g_\star\mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{an}})$ (par la flèche du théorème 5.4.10), puis un relèvement quelconque dans $H^1(X'(\mathbb{C}),\mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{an}})$ (voir (9)), que l'on envoie dans $H^2(X'(\mathbb{C}),\boldsymbol{\mu}_n)$ par le bord de la multiplication par n, et l'on forme le cup-produit de cet élément avec lui-même. On vérifie tout de suite, à l'aide de la proposition 5.4.21 et de la commutativité du diagramme (9), qu'il revient au même de considérer l'image de T dans $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),X^{(n)}_{\mathrm{diff}})$, puis dans $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),R^1g_\star\mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$ (par la flèche de la proposition 5.4.21), puis un relèvement quelconque dans $H^1(X'(\mathbb{C}),\mathscr{O}^\star_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$, que l'on envoie dans $H^2(X'(\mathbb{C}),\boldsymbol{\mu}_n)$ pour enfin former le cup-produit de cet élément avec lui-même. Rappelons que α provient d'une section $S\in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),A_{\mathrm{diff}})$. Ainsi, les torseurs X_{diff} et $X^{(n)}_{\mathrm{diff}}$ sont canoniquement isomorphes à A_{diff}. Notons $\lambda\colon X_{\mathrm{diff}}\to A_{\mathrm{diff}}$ et $\lambda^{(n)}\colon X^{(n)}_{\mathrm{diff}}\to A_{\mathrm{diff}}$ ces isomorphismes canoniques et

$$m_2\colon H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),A_{\mathrm{diff}})\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),R^1f_\star\mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$$

l'application déduite de $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),X^{(n)}_{\mathrm{diff}})\to H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),R^1g_\star\mathscr{O}_{X',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$ par transport par λ et $\lambda^{(n)}$. D'après ce que l'on vient d'expliquer, on a :

$$d\cup d=\delta_2(m_2(\lambda^{(n)}(T)))\cup\delta_2(m_2(\lambda^{(n)}(T)))\quad\text{dans }\mathbb{Z}/n \tag{11}$$

Les deux lemmes suivants permettent donc de conclure la preuve du théorème.

Lemme 5.4.23 — $\lambda^{(n)}(T)=-S$.

Démonstration — Soit $I^\bullet$ une résolution injective de A_{diff} dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Reprenons les notations du lemme 5.3.1 ; α est l'image de $S\in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),A_{\mathrm{diff}})$ dans $H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),{}_nA_{\mathrm{diff}})$ et est donc représenté par l'élément $(d_I^1S',0)\in\Gamma(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),I^1\oplus I^0)$, où $S'\in\Gamma(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),I^0)$ est tel que $nS'=S$. Le torseur X_{diff} (resp. $X^{(n)}_{\mathrm{diff}}$) s'identifie au sous-faisceau d'ensembles de I^0 dont les sections sur U sont les $s\in\Gamma(U,I^0)$ tels que $d_I^1s=d_I^1S'$ (resp. $d_I^1s=d_I^1S$), et T est la section $0\in\Gamma(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),I^0)$. Les isomorphismes canoniques λ et $\lambda^{(n)}$ sont respectivement donnés par $s\mapsto s-S'\in H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),A_{\mathrm{diff}})$ et $s\mapsto s-S$, d'où le résultat. □

Lemme 5.4.24 — *Pour tout x, $m_2(x) - s_2(x)$ est divisible par n dans $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$.*

Démonstration — D'après la proposition 5.4.21, $R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}} = A_{\mathrm{diff}} \oplus \mathbb{Z}$; s_2 et m_2 sont les applications $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), A_{\mathrm{diff}}) \to H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), R^1 f_\star \mathscr{O}^\star_{A',\mathrm{diff},\mathrm{an}})$ induites par les flèches $A_{\mathrm{diff}} \to A_{\mathrm{diff}} \oplus \mathbb{Z}$ envoyant respectivement x sur $(x, 0)$ et sur (x, n), d'où le résultat. □

5.5 Preuve du théorème 5.1.5

On reprend les notations précédant l'énoncé du théorème 5.1.5 ; en particulier A' est normal, à singularités rationnelles, et est dominé par une surface $K3$.

5.5.1 Début

Proposition 5.5.1 — *Pour n premier à p, $H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_nA)$ s'identifie canoniquement au sous-groupe de $H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n)$ constitué des éléments dont l'image dans $H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)$ est orthogonale, pour le cup-produit, à la classe d'une fibre et à celle de la section nulle.*

Démonstration — Les propositions 5.3.4 et 5.2.10 montrent que l'on a canoniquement le diagramme commutatif suivant, et que ses lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_nA) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & H^2(\mathbb{P}^1_k, \boldsymbol{\mu}_n) \times H^0(\mathbb{P}^1_k, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, {}_nA)^G \arrow[r] & H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)^G \arrow[r] & H^2(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)^G \times H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)^G
\end{tikzcd}$$

Comme $H^2(G, H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, {}_nA))$ est nul (k étant fini et $H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, {}_nA)$ de torsion), la suite spectrale de Hochschild-Serre montre que u est surjectif. De la suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée à $A'_{\overline{k}}$ et $\boldsymbol{\mu}_n$, on tire la suite exacte :

$$H^2(k, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(H^2(A', \boldsymbol{\mu}_n) \to H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)^G\right) \longrightarrow H^1(k, H^1(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n))$$

Comme k est fini, $H^2(k, \boldsymbol{\mu}_n) = 0$. De plus, $H^1(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \subset H^1(A^\star_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = {}_n\mathrm{Pic}(A^\star_{\overline{k}}) = 0$ d'après la suite spectrale de Leray pour $\pi_{\overline{k}}\colon A^\star_{\overline{k}} \to A'_{\overline{k}}$ et le fait que le groupe de Picard d'une surface $K3$ est sans torsion (conséquence immédiate du lemme 1.6.9). Par conséquent, la flèche v est injective.

L'application $H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^2(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) = \mathbb{Z}/n$ s'identifie au cup-produit par la classe de la section nulle (proposition 1.1.1, en remarquant qu'il n'est pas gênant que $A'_{\overline{k}}$ ne soit pas lisse sur $\overline{k}$ puisque l'on peut calculer le cup-produit dans $H^2(A^\star_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n)$). De même, l'application $H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) = \mathbb{Z}/n$ (proposition 5.2.10) s'identifie au cup-produit par la classe d'une fibre lisse $F_{\overline{k}}$ d'après la proposition 1.1.1 et la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd}
H^2(A'_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] \\
H^2(F_{\overline{k}}, \boldsymbol{\mu}_n) & (R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n)_{\overline{y}}, \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

dont la flèche horizontale du bas est un isomorphisme par le théorème de changement de base propre. Une simple chasse au diagramme permet de conclure. □

Lemme 5.5.2 — *Il existe un isomorphisme canonique ${}_{\ell^n}\mathrm{Br}(A') = {}_{\ell^n}H^1(\mathbb{P}^1_k, A)$.*

Démonstration — Considérons la suite spectrale de Leray pour le morphisme $f\colon A' \to \mathbb{P}^1_k$. L'existence d'une section à f et l'égalité $f_\star \mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ entraînent que la différentielle $E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$ est nulle. Comme de plus $\mathrm{Br}(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}) = 0$ (théorème 1.3.1) et $R^1 f_\star \mathbb{G}_\mathrm{m} = A \oplus \mathbb{Z}$ (proposition 5.2.10), on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}, A \oplus \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Br}(A') \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}, R^2 f_\star \mathbb{G}_\mathrm{m})$$

On a ${}_{\ell^n} H^1(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}, \mathbb{Z}) = 0$ (d'après la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n \longrightarrow 0$) ; il suffit donc de montrer que ${}_{\ell^n}(R^2 f_\star \mathbb{G}_\mathrm{m}) = 0$. Cela équivaut à la surjectivité de la flèche $\mathbf{Pic}_{A'/\mathbb{P}^1_{\bar{k}}} \to R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_{\ell^n}$. On a $R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_n = \mathbb{Z}/n$ (proposition 5.2.10), et la classe de la section nulle dans $\mathbf{Pic}_{A'/\mathbb{P}^1_{\bar{k}}}$ s'envoie sur 1 par cette flèche, d'où le résultat. □

Lemme 5.5.3 — *On a une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(A') \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^2(A', \mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow T_\ell(H^1(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}, A)) \longrightarrow 0. \tag{12}$$

Démonstration — On applique les lemmes 2.3.4 et 5.5.2. □

Théorème 5.5.4 — *Le cup-produit $H^2(A', \mathbb{Q}_\ell(1))^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}_\ell$ est non dégénéré.*

Démonstration — D'après le lemme 5.1.9, il suffit de prouver que le cup-produit $H^2(A^\star, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}_\ell$ est non dégénéré. Notons $H = H^2(A^\star_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ et $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(H)$ le Frobenius.

Lemme 5.5.5 — *L'action du Frobenius sur H est semi-simple.*

Démonstration — Soit $s \in H$ la classe d'une section hyperplane ; son auto-intersection est non nulle, donc $H = \mathbb{Q}_\ell s \oplus P$, en notant $P = s^\perp$. Cette décomposition est stable par φ car $\varphi(s) = s$ (deux hyperplans de $\mathbb{P}^n$ sont linéairement équivalents). Il suffit donc de montrer que φ agit semi-simplement sur P.

Lemme 5.5.6 — *L'action de φ sur $\Lambda^2_{\mathbb{Q}_\ell} P$ est semi-simple.*

Démonstration — Ce lemme apparaît dans la preuve de Deligne des conjectures de Weil pour les surfaces $K3$; sa démonstration est trop longue pour être reproduite ici. Voir [11]. Le résultat provient de la semi-simplicité de l'action du Frobenius sur le module de Tate d'une variété abélienne B, ce qui vient du fait que la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathrm{End}^0_k(B)$ engendrée par le Frobenius est séparable. Une des hypothèses à vérifier pour appliquer le résultat de Deligne est que la surface $K3$ $A^\star$ se relève en caractéristique 0, ce qui découle de l'existence de la résolution de Brieskorn ([3]) et du lemme 5.3.7. □

Comme $A^\star_{\bar{k}}$ est une surface $K3$, H est de dimension 22 et donc $\dim(P) = 21$. On considère les espaces vectoriels comme des $\mathbb{Q}_\ell[X]$-modules par l'action de φ. L'accouplement $\left(\Lambda^{20}_{\mathbb{Q}_\ell} P\right) \times P \to \det(P)$ est non dégénéré et compatible à l'action de φ, d'où un isomorphisme $\check{P} \xrightarrow{\sim} \det(P)^{-1} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Lambda^{20}_{\mathbb{Q}_\ell} P$ $\mathbb{Q}_\ell[X]$-linéaire, où $\det(P)^{-1}$ est l'espace vectoriel $\det(P)$ muni de l'action par multiplication par $\det(\varphi)^{-1}$. Pour montrer que φ agit semi-simplement sur P ou sur $\check{P}$, il suffit donc de montrer qu'il agit semi-simplement sur $\Lambda^{20}_{\mathbb{Q}_\ell} P$, ce qui est le cas d'après le lemme et l'existence d'une surjection $\mathbb{Q}_\ell[X]$-linéaire $\left(\Lambda^2_{\mathbb{Q}_\ell} P\right)^{\otimes 10} \to \Lambda^{20}_{\mathbb{Q}_\ell} P$. □

Notons $\overline{H} = H \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$, où $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. On a alors $\overline{H} = \bigoplus_{\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}} \overline{H}_\lambda$, en notant $\overline{H}_\lambda$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ. Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_\ell} \backslash \{1\}$, $\overline{H}_1$ est orthogonal à $\overline{H}_\lambda$ (on étend le cup-produit à $\overline{H}$ de la manière évidente), car le cup-produit est équivariant : $x \cup y = \varphi(x) \cup \varphi(y) = \lambda x \cup y$. Ainsi, $\overline{H}_1$ possède un supplémentaire dans $\overline{H}$ qui lui est orthogonal ; comme le cup-produit est non dégénéré sur $\overline{H}$ (dualité de Poincaré), on en déduit qu'il l'est aussi sur $\overline{H}_1$, donc sur H^G, donc sur $H^2(A^\star, \mathbb{Q}_\ell(1))$ (lemme 2.3.3). □

Lemme 5.5.7 — *L'accouplement induit $(\mathrm{Pic}(A') \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}_\ell$ est non dégénéré.*

Démonstration — Un diviseur numériquement équivalent à 0 sur une surface propre et lisse sur un corps algébriquement clos possède un multiple non nul algébriquement équivalent à 0 ([19] exp. XIII th. 4.6). Par conséquent l'accouplement $(\mathrm{NS}(A^\star_{\bar{k}}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}_\ell$ donné par la forme d'intersection est non dégénéré.

Comme $\mathrm{Pic}^0(A^\star_{\overline{k}})$ est le groupe des $\overline{k}$-points d'une variété abélienne sur k, il est divisible par ℓ et donc $\mathrm{NS}(A^\star_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell = \mathrm{Pic}(A^\star_{\overline{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$. La considération d'une somme galoisienne permet d'en conclure que l'accouplement $(\mathrm{Pic}(A^\star) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}_\ell$ déduit de la forme d'intersection est non dégénéré. Il induit, grâce à la flèche $\pi\colon A^\star \to A'$, un accouplement sur $\mathrm{Pic}(A') \otimes_Z \mathbb{Q}_\ell$; la proposition 1.2.2 montre qu'il s'agit de celui dont il est question dans l'énoncé. Vérifions qu'il est non dégénéré. Soit une classe d'équivalence linéaire de diviseurs de Cartier sur A', orthogonale à $\mathrm{Pic}(A')$. Le sous-lemme suivant montre que l'on peut en choisir un représentant D à support dans A.

Sous-lemme 5.5.8 — *Soient S une variété quasi-projective sur un corps k, $S_{\mathrm{reg}} \subset S$ l'ouvert des points réguliers, D un diviseur de Cartier sur S. Si $S \backslash S_{\mathrm{reg}}$ est fini, D est linéairement équivalent à un diviseur de Cartier à support dans S_{reg}.*

Démonstration — Comme S est quasi-projective, il existe un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}\, A$ de S contenant $S \backslash S_{\mathrm{reg}}$. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}\, A$ les points de $S \backslash S_{\mathrm{reg}}$. Le localisé de A en la partie multiplicative $A \backslash \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ est un anneau semi-local, son groupe de Picard est donc nul. Par conséquent, il existe un ouvert V de U contenant $S \backslash S_{\mathrm{reg}}$ tel que la restriction de D à V soit le diviseur d'une fonction rationnelle f. Le diviseur $D - (f)$ convient. □

Il est alors évident que D est orthogonal (pour la forme d'intersection) aux composantes des fibres géométriques de π, et donc finalement à tout $\mathrm{Pic}(A^\star)$. Ainsi, D est principal, vu comme diviseur sur $A^\star$; il l'est donc aussi comme diviseur sur A', d'où le résultat. □

Prouvons maintenant le théorème 5.1.5. Notons $H = H^2(A', \mathbb{Q}_\ell(1))$ et $V = \mathrm{Pic}(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$. Le lemme 5.5.3 montre que la flèche $V \to H$ est injective : V est un sous-espace vectoriel de H, qui est lui-même un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire non dégénérée (théorème 5.5.4). On voudrait montrer que $V = H$. Supposons que cela ne soit pas le cas et notons $V^\perp$ l'orthogonal de V dans H. Comme la forme est non dégénérée sur H, $V^\perp$ est non nul. De plus, la forme est non dégénérée sur $V^\perp$ (lemme 5.5.7), et comme elle est symétrique, on en déduit qu'il existe $\alpha \in V^\perp$ tel que $\alpha \cup \alpha \neq 0$. On peut bien sûr supposer que $\alpha \in H^2(A', \mathbb{Z}_\ell(1))$. Soit $\beta \in T_\ell(H^1(\mathbb{P}^1_k, A))$ l'image de α par la flèche de la suite exacte (12). Puisque l'accouplement est non dégénéré sur V, $V \cap V^\perp = 0$, d'où $\beta \neq 0$.

Comme $\alpha \cup \alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ est non nul, le lemme de Hensel montre l'existence d'un $a \in \mathbb{N}^\star$ arbitrairement grand et pair et de $\rho \in 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$ tels que $\alpha \cup \alpha = a\rho^2$ (rappelons que l'on a pris $\ell \neq 2$). Quitte à remplacer α par $\frac{1}{\rho}\alpha$, on peut supposer $\alpha \cup \alpha = a$. Notons $\beta = (\beta_\nu)_{\nu \geqslant 0}$, avec $\beta_\nu \in H^1(\mathbb{P}^1_k, A)$ d'ordre divisant ℓ^ν et $\ell\beta_{\nu+1} = \beta_\nu$. De même, $\alpha = (\alpha_\nu)_{\nu \geqslant 0}$, avec $\alpha_\nu \in H^2(A', \boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu})$. Comme $\beta \neq 0$, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_c \neq 0$. On a alors $\ell^{\nu-c}\beta_\nu = \beta_c$ pour tout $\nu \geqslant c$, d'où :

Lemme 5.5.9 — *L'ordre de β_ν est supérieur à $\ell^{\nu-c}$ pour tout ν.*

Comme α est orthogonal à $\mathrm{Pic}(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$, la proposition 5.5.1 montre que α_ν est dans $H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_{\ell^\nu}A)$. Ainsi, il est représenté par un couple (X_ν, S_ν), où X_ν est un torseur sous A et $S_\nu \in \mathrm{Pic}(X'_\nu)$ (déterminé modulo $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k)$) est de degré ℓ^ν sur les fibres.

Lemme 5.5.10 — *L'image de α_ν par la flèche évidente $H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_{\ell^\nu}A) \to H^1(\mathbb{P}^1_k, A)$ est β_ν.*

Démonstration — D'après les démonstrations des lemmes 5.3.4 et 5.5.2, les suites spectrales de Leray pour $A' \to \mathbb{P}^1_k$ et les faisceaux $\boldsymbol{\mu}_n$ et $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ fournissent le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes (les flèches verticales et la commutativité viennent des morphismes de suites spectrales induits par les flèches $\boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ de la suite de Kummer) :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & {}_{\ell^\nu}\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(A') \to H^0(\mathbb{P}^1_k, R^2 f_\star \mathbb{G}_{\mathrm{m}})\right) \arrow[r] & {}_{\ell^\nu}H^1(\mathbb{P}^1_k, A \oplus \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^2(\mathbb{P}^1_k, \boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu}) \arrow[r] & \mathrm{Ker}\left(H^2(A', \boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu}) \to H^0(\mathbb{P}^1_k, R^2 f_\star \boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu})\right) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(\mathbb{P}^1_k, R^1 f_\star \boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu}) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

La section nulle permet de scinder ces deux suites exactes, d'où le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} {}_{\ell^\nu}H^1(\mathbb{P}^1_k, A) \arrow[r, "\sim"] & {}_{\ell^\nu}\mathrm{Br}(A') \\ H^1(\mathbb{P}^1_k, {}_{\ell^\nu}A) \arrow[r] \arrow[u] & H^2(A', \boldsymbol{\mu}_{\ell^\nu}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

La commutativité de ce carré entraîne le résultat voulu. □

La classe de X_ν dans $H^1(\mathbb{P}^1_k, A)$ est donc β_ν. Soit $X^\star_\nu \to \mathbb{P}^1_k$ un modèle propre et régulier minimal de la fibre générique de $X_\nu \to \mathbb{P}^1_k$. Rappelons que cela sous-entend que l'on a fixé un isomorphisme entre les fibres génériques, et donc une application birationnelle $X^\star_\nu \dashrightarrow X'_\nu$.

Lemme 5.5.11 — *$X^\star_\nu$ est localement isomorphe à $A^\star$ pour la topologie étale sur $\mathbb{P}^1_k$, compatiblement aux projections sur $\mathbb{P}^1_k$, et l'application birationnelle $X^\star_\nu \dashrightarrow X'_\nu$ est un morphisme.*

Démonstration — Soient x un point fermé de $\mathbb{P}^1_k$, R l'hensélisé strict de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_k,x}$ et K son corps des fractions. Le torseur X_ν étant localement trivial pour la topologie étale, $(X_\nu)_R$ est R-isomorphe à A_R et donc $A^\star_R$ est un modèle propre et régulier minimal de $(X_\nu)_K$ sur R (la minimalité provient de ce que $A^\star$ est une surface $K3$). Une courbe de genre non nul sur K ne peut avoir qu'un modèle propre et régulier minimal sur R, à R-isomorphisme près (cf. par exemple [39], p. 155) ; par conséquent $(X^\star_\nu)_R$ et $A^\star_R$ sont R-isomorphes. Prouvons que l'application rationnelle $g\colon X^\star_\nu \dashrightarrow X'_\nu$ est un morphisme. C'est en tout cas vrai après le changement de base $\mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{P}^1_k$, puisque g_R s'identifie à $\pi_R\colon A^\star_R \to A'_R$, qui est bien un morphisme. L'assertion sur $\mathbb{P}^1_k$ en résulte par descente fpqc. □

Lemme 5.5.12 — *$X^\star_\nu$ est une surface $K3$.*

Démonstration — Notons K un diviseur canonique sur $X^\star_\nu$. D'après le lemme 5.5.11, $X^\star_\nu \to \mathbb{P}^1_k$ ne possède pas de fibre multiple ; la proposition 1.6.5 montre donc que $(K^2) = 0$. Écrivons la formule de Noether (proposition 1.6.4) :

$$\chi(\mathscr{O}_{X^\star_\nu}) = \frac{1}{12}\mathrm{EP}(X^\star_\nu)$$

Admettons que l'analogue de la proposition III.11.4 de [6] soit valide en caractéristique p, i.e. la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une fibration s'exprime en fonction de celles des fibres géométriques et de celle de la base. Le lemme 5.5.11 montre alors que $\mathrm{EP}(X^\star_\nu) = \mathrm{EP}(A^\star)$, d'où finalement, à l'aide de la formule de Noether pour $A^\star$, $\chi(\mathscr{O}_{X^\star_\nu}) = \chi(\mathscr{O}_{A^\star}) = 2$. La proposition 1.6.5 et la dualité de Serre permettent d'en déduire que K est linéairement équivalent à 0 et que $H^1(X^\star_\nu, \mathscr{O}_{X^\star_\nu}) = 0$. □

Soit D_ν un diviseur de Cartier sur X'_ν représentant S_ν ; on peut le choisir à support dans X_ν (sous-lemme 5.5.8), et ainsi le considérer comme un diviseur sur $X^\star_\nu$. En appliquant le théorème 5.3.6, on trouve que $(D^2_\nu) = \alpha_\nu \cup \alpha_\nu = a$ dans $\mathbb{Z}/\ell^\nu$, i.e. $(D^2_\nu) \equiv a \pmod{\ell^\nu}$. De plus, comme $X^\star_\nu$ est une surface $K3$, (D^2_ν) est pair ; a l'est aussi, par hypothèse ; et enfin, ℓ est impair. Par conséquent, $(D^2_\nu) \equiv a \pmod{2\ell^\nu}$, et donc on peut supposer que $(D^2_\nu) = a$ quitte à ajouter un multiple d'une fibre à D_ν (et à S_ν).

5.5.2 Suite

Dans cette partie, on se place implicitement sur $\overline{k}$; les questions de rationalité seront étudiées à la fin. D'après le lemme 5.5.11, les fibres dégénérées de $X^\star_\nu$ sur $\mathbb{P}^1$ sont les mêmes que celles de $A^\star$. Elles possèdent une unique composante irréductible qui n'est pas contractée dans X'_ν ; appelons-la *la composante distinguée*. Notons $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant t}$ la famille des composantes irréductibles non distinguées des fibres dégénérées de $X^\star_\nu$. L'entier t ne dépend pas de ν, puisqu'il se calcule sur les fibres de $A^\star$. L'ouvert $X_\nu \subset X^\star_\nu$ est simplement le complémentaire de la réunion des C_j, et la composante distinguée d'une fibre dégénérée est la seule dont le point générique soit dans X_ν.

Tout ce qu'il faut retenir pour le moment est que l'on dispose d'un diviseur D_ν sur la surface $K3$ $X_\nu^\star$, à support dans X_ν, d'auto-intersection a (qui est un entier pair choisi arbitrairement grand indépendamment de ν), et tel que $(D_\nu.F) = \ell^\nu$ si F est une fibre de $X_\nu^\star \to \mathbb{P}^1_k$.

Le théorème de Riemann-Roch appliqué à $X_\nu^\star$ (lemme 1.6.8) montre que $\chi(\mathscr{O}(D_\nu)) = 2 + \frac{1}{2}a$. Par dualité de Serre, on a donc $\dim H^0(X_\nu^\star, \mathscr{O}(D_\nu)) + \dim H^0(X_\nu^\star, \mathscr{O}(-D_\nu)) \geqslant 2$, d'où $|D_\nu| \neq \varnothing$ ou $|-D_\nu| \neq \varnothing$. Comme $(D_\nu.F) > 0$ si F est une fibre, la seconde possibilité est exclue ; ainsi $|D_\nu| \neq \varnothing$.

Considérons la partie fixe du système linéaire complet $|D_\nu|$ sur $X_\nu^\star$. Soit $s_j \in \mathbb{N}$ le coefficient de C_j dans ce diviseur effectif. On appelle $B_1, \ldots, B_u$ les autres composantes fixes (pas nécessairement deux à deux distinctes), avec $u \in \mathbb{N}$.

Soit E_ν un diviseur effectif tel que

$$D_\nu \sim E_\nu + \sum_{i=1}^{u} B_i + \sum_{j=1}^{t} s_j C_j.$$

(« $\sim$ » désigne l'équivalence linéaire.)

Le but de cette partie est de prouver la proposition suivante.

Proposition 5.5.13 — *Quitte à choisir a assez grand juste avant le lemme 5.5.9, on a $(E_\nu^2) > 0$, et (E_ν^2) est borné indépendamment de ν.*

Commençons par quelques lemmes.

Lemme 5.5.14 — *Les B_i et les C_j sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ et sont d'auto-intersection -2.*

Démonstration — Les C_j sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ d'après la classification de Kodaira-Néron (proposition 1.7.4). Les B_i sont des composantes fixes de $|D_\nu|$, donc $\dim |B_i| = 0$, d'où $(B_i^2) = 0$ par la proposition 1.6.13. Les assertions manquantes sont fournies par la proposition 1.6.11. □

Lemme 5.5.15 — *Les B_i dominent $\mathbb{P}^1$. (Autrement dit, la composante distinguée d'une fibre dégénérée ne peut pas être fixe dans $|D_\nu|$.)*

Démonstration — Supposons que B_i ne domine pas $\mathbb{P}^1$. Il est alors inclus dans une fibre F, mais comme ce n'est pas un C_j, B_i la composante distinguée de la fibre. Soit f une fonction rationnelle sur $X_\nu^\star$ telle que $D_\nu + (f)$ soit effectif et telle que le coefficient de B_i dans $D_\nu + (f)$ soit minimal. Soit g une fonction rationnelle dont le diviseur est : une fibre lisse moins F. Le diviseur $D_\nu + (fg)$ est « effectif sur X_ν » (i.e. les composantes irréductibles de ce diviseur dont le point générique est dans X_ν ont un coefficient positif) mais ne peut pas être effectif, car il contient un B_i de moins que $D_\nu + (f)$. Il suffit donc de montrer le lemme suivant.

Lemme 5.5.16 — *Notons J l'ensemble des j tels que C_j soit inclus dans F. Soit D un diviseur sur $X_\nu^\star$, linéairement équivalent à D_ν, et tel qu'il existe des α_j pour $j \in J$ tels que $D + \sum_{j\in J} \alpha_j C_j$ soit effectif. Alors D est effectif.*

Pour $j \in J$, on a $(D.C_j) = (D_\nu.C_j) = 0$ car D_ν et C_j sont à supports disjoints. Notons α_j l'opposé du coefficient de C_j dans D, pour $j \in J$. Le diviseur $D + \sum_{j\in J} \alpha_j C_j$ est donc effectif et n'a pas de composante selon C_j, d'où :

$$(D + \sum_{i\in J} \alpha_i C_i.C_j) \geqslant 0$$

d'où

$$\sum_{i\in J} \alpha_i (C_i.C_j) \geqslant 0$$

Admettons un instant que la matrice $((C_i.C_j))_{i,j\in J}$ soit inversible et que son inverse soit à coefficients négatifs. Alors les α_i sont tous négatifs, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 5.5.17 — *La matrice $A = ((C_i.C_j))_{i,j\in J}$ est inversible et son inverse est à coefficients négatifs.*

Cette matrice est de la forme $M - 2I$ (I est la matrice identité), où M est la matrice d'adjacence[2] d'un certain graphe, dont on constate qu'il est connexe sur la classification de Kodaira-Néron (proposition 1.7.4). De plus, A est définie-négative (proposition 1.7.4) ; ainsi, la plus grande valeur propre de M est < 2. Le théorème de Perron-Frobenius affirme que le rayon spectral de la matrice d'adjacence d'un graphe connexe est égal à sa plus grande valeur propre (ceci est une borne inférieure sur les valeurs propres possibles). Par conséquent, si l'on note $\rho(T)$ le rayon spectral d'une matrice T, $\rho(M) < 2$, ou encore $\rho(\frac{1}{2}M) < 1$. Fixons une norme d'algèbre sur l'algèbre des matrices du format convenable, $\|\cdot\|$. Il est bien connu que pour toute matrice T, $\|T^n\|^{1/n} \to \rho(T)$ lorsque $n \to \infty$. Prenons $T = \frac{1}{2}M$: il existe donc un entier $n > 0$ tel que $\|M^n\| < 2^n$, ce qui permet d'écrire le développement en série entière suivant :

$$A^{-1} = (M - 2I)^{-1} = -\frac{1}{2}(I - \frac{1}{2}M)^{-1} = -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}(\frac{1}{2}M)^s$$

Il est alors évident que A^{-1} est à coefficients négatifs. □

Lemme 5.5.18 — *Il existe $\alpha \in \mathbb{N}$, indépendant de ν, tel que pour tout diviseur D sur $X_\nu^\star$ tel que $(D.F) \geqslant 1$, on ait $(D.F) \geqslant \ell^{\nu-c-\alpha}$ où F est une fibre.*

Démonstration — On a une suite exacte de faisceaux en groupes abéliens sur $\mathbb{P}^1$ pour la topologie étale

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \bigoplus i_{x\star}(\text{groupe fini}) \longrightarrow 0$$

où la somme directe est indexée par un nombre fini de points fermés x, et où $i_x \colon \{x\} \to \mathbb{P}^1$ est l'inclusion (cf. [9], 9.6). D'où une suite exacte :

$$(\text{groupe fini}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, A) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{A})$$

Sous-lemme 5.5.19 — *La flèche $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{A}) \to H^1(\kappa(\mathbb{P}^1), A_{\kappa(\mathbb{P}^1)})$ est injective.*

Démonstration — C'est le début de la suite exacte de bas degrés déduite de la suite spectrale de Leray pour l'inclusion j du point générique de $\mathbb{P}^1$ et le faisceau étale $A_{\kappa(\mathbb{P}^1)}$. En effet, sur le petit site étale, la propriété universelle du modèle de Néron se traduit par le fait que $\mathscr{A}$ est l'image directe de $A_{\kappa(\mathbb{P}^1)}$ par j. □

On a ainsi une suite exacte :

$$(\text{groupe fini}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, A) \longrightarrow H^1(\kappa(\mathbb{P}^1), A_{\kappa(\mathbb{P}^1)})$$

Soit α tel que le cardinal du groupe fini qui apparaît ici soit $\leqslant \ell^\alpha$. Pour montrer que α convient, il suffit de montrer que l'ordre de $(X_\nu)_{\kappa(\mathbb{P}^1)}$ dans $H^1(\kappa(\mathbb{P}^1), A_{\kappa(\mathbb{P}^1)})$ divise $(D.F)$ (lemme 5.5.9). La proposition 5.3.3 montre que $(X_\nu)_{\kappa(\mathbb{P}^1)}^{(D.F)}$ s'identifie (comme faisceau d'ensembles pour la topologie étale sur $\mathrm{Spec}(\kappa(\mathbb{P}^1))$) à la partie de degré $(D.F)$ de $\mathrm{Pic}_{(X_\nu)_{\kappa(\mathbb{P}^1)}/\kappa(\mathbb{P}^1)}$; il suffit donc de voir qu'il existe une section globale, mais D en fournit une, par restriction. □

Démonstration de la proposition 5.5.13 — Commençons par prouver que $(E_\nu^2) > 0$, si l'on choisit a assez grand. Supposons que cela ne soit pas le cas. D'après la proposition 1.6.12, on a alors $(E_\nu^2) = 0$, et il existe alors une courbe intègre L sur $X_\nu^\star$, de genre arithmétique 1, et $m \in \mathbb{N}^\star$, tels que $E_\nu \sim mL$.

Montrons d'abord que L domine $\mathbb{P}^1$. Supposons le contraire ; L est alors inclus dans une fibre, mais comme $p_a(L) = 1$, L est égal à une fibre, étant donnée la classification de Kodaira-Néron (les fibres réductibles ont des composantes irréductibles isomorphes à $\mathbb{P}^1$, cf. proposition 1.7.4). Deux cas se présentent alors.

[2]La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté dont les sommets sont numérotés possède un 1 aux coordonnées (i, j) si les sommets i et j sont connectés par une arête, 0 sinon ; elle est donc symétrique réelle à coefficients positifs.

1. Si $u = 0$. Alors, en notant F une fibre,

$$\ell^\nu = (D_\nu.F) = \left(mL + \sum_{j=1}^{t} s_j(C_j.F) \right) = m(L.F),$$

d'où $(L.F) \neq 0$, ce qui contredit que L soit une fibre.

2. Si $u \neq 0$. D'après le lemme 5.5.15, B_1 domine $\mathbb{P}^1$. Par conséquent, $(B_1.L) \geqslant \ell^{\nu-c-\alpha} \geqslant 2$ (lemme 5.5.18) ; la proposition 1.6.14 montre alors que B_1 n'est pas une composante fixe de $|B_1 + L|$, ce qui est impossible car $B_1 + L \leqslant E_\nu + \sum_{i=1}^{u} B_i + \sum_{j=1}^{t} s_j C_j$.

Ainsi, L domine bien $\mathbb{P}^1$. On a donc $(L.F) \geqslant \ell^{\nu-c-\alpha}$ (lemme 5.5.18). Par ailleurs $m(L.F) = (E_\nu.F) \leqslant (D_\nu.F) = \ell^\nu$, d'où $m \leqslant \ell^{c+\alpha}$. D'après les lemmes 5.5.15 et 5.5.18, $(B_i.F) \geqslant \ell^{\nu-c-\alpha}$. Comme $(C_j.F) = 0$ et $(D_\nu.F) = \ell^\nu$, on a $\ell^\nu \geqslant u\ell^{\nu-c-\alpha}$, d'où $u \leqslant \ell^{c+\alpha}$.

On a $(D_\nu.C_j) = 0$ car D_ν est à support dans X_ν, et donc :

$$m(L.C_j) + \sum_{i=1}^{u}(B_i.C_j) + \sum_{i=1}^{t} s_i(C_i.C_j) = 0$$

Quitte a réordonner les s_j, supposons que $s_i \neq 0$ si et seulement si $1 \leqslant i \leqslant t_0$, pour un $t_0 \in \{0, \dots, t\}$. Le lemme 1.6.14 montre que pour $j \leqslant t_0$, $(L.C_j) \in \{0;1\}$ et $(B_i.C_j) \in \{0;1\}$. Comme de plus $m \leqslant \ell^{c+\alpha}$ et $u \leqslant \ell^{c+\alpha}$, on obtient :

$$\forall j \leqslant t_0,\ \sum_{i=1}^{t_0} s_i(C_i.C_j) = (\text{borné indépendamment de } \nu)$$

La matrice $((C_i.C_j))_{1\leqslant i,j\leqslant t_0}$ est inversible (proposition 1.7.4) et ne dépend pas de ν, par conséquent les s_j sont bornés indépendamment de ν.

Pour terminer, calculons l'auto-intersection de $D_\nu \sim mL + \sum_{i=1}^{u} B_i + \sum_{j=1}^{t} s_j C_j$ en développant tout. En utilisant ce que l'on a déjà établi, le lemme 5.5.14, et le fait que $(B_i.B_j) \leqslant 1$ pour tous i et j (d'après les lemmes 1.6.14 et 5.5.14), on voit que l'on obtient un entier borné indépendamment de ν. D'où une contradiction si l'on choisit a suffisamment grand au départ.

Il reste à montrer que (E_ν^2) est borné indépendamment de ν. En calculant l'auto-intersection de $D_\nu \sim E_\nu + \sum_{i=1}^{u} B_i + \sum_{j=1}^{t} s_j C_j$, on trouve, exactement de la même manière que précédemment, que $a = (E_\nu^2) + r$ où r est borné indépendamment de ν, d'où le résultat. □

5.5.3 Fin de la preuve

Reprenons les notations habituelles : le corps de base est implicitement le corps fini k et non plus $\overline{k}$.

Lemme 5.5.20 — *Pour tout ν, il existe un faisceau inversible $\mathscr{L}_\nu$ sur $X_\nu^\star$, d'auto-intersection strictement positive mais bornée indépendamment de ν, et tel qu'il existe une courbe intègre Z_ν sur $(X_\nu^\star)_{\overline{k}}$ dont la classe d'équivalence linéaire est $(\mathscr{L}_\nu)_{\overline{k}}$.*

Démonstration — Le diviseur D_ν est défini sur k, par conséquent le faisceau inversible $\mathscr{O}_{(X_\nu^\star)_{\overline{k}}}(E_\nu)$ l'est aussi (E_ν est un diviseur dans la partie mobile du système linéaire D_ν, comme précédemment), et la proposition 1.6.10 montre qu'il existe une courbe intègre Z_ν sur $(X_\nu^\star)_{\overline{k}}$, linéairement équivalente à E_ν (mais non nécessairement définie sur k). La proposition 5.5.13 permet de conclure. □

La proposition 1.6.15 montre que l'application rationnelle définie par le système linéaire complet $|2Z_\nu|$ ou $|3Z_\nu|$, selon les cas, est un morphisme birationnel sur une surface de degré $4(Z_\nu^2)$ ou $9(Z_\nu^2)$ dans $\mathbb{P}^{2(Z_\nu^2)+1}$ ou $\mathbb{P}^{\frac{9}{2}(Z_\nu^2)+1}$. Ce morphisme est défini sur k puisque $\mathscr{O}(Z_\nu)$ l'est. La théorie des formes de Chow (voir par exemple [29], §14) montre que pour tous d et n, il existe un nombre fini de surfaces sur k, plongées dans $\mathbb{P}_k^n$ avec le degré d ; par conséquent une infinité des $X_\nu^\star$ sont birationnellement équivalentes, et donc isomorphes puisque ce sont des surfaces minimales, étant des surfaces $K3$. Soit $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que les

$X_\nu^\star$ pour $\nu \in I$ soient isomorphes. Posons $\nu_0 = \min I$ et $X^\star = X_{\nu_0}^\star$, et fixons un isomorphisme entre $X^\star$ et $X_\nu^\star$, pour tout $\nu \in I$. Notons $f_\nu \colon X^\star \to \mathbb{P}_k^1$ le morphisme obtenu en transportant la fibration de $X_\nu^\star$. Soit Q la forme d'intersection $\mathrm{Pic}(X^\star) \times \mathrm{Pic}(X^\star) \to \mathbb{Z}$. Elle est non dégénérée (lemme 1.6.9). Soient $N = \{v \in \mathrm{Pic}(X^\star)\,;\, Q(v,v) = 0 \text{ et } v \text{ primitif}\}$ (« primitif » signifie que si $v = mw$ avec $m \in \mathbb{N}^\star$ et $w \in N$, $w \neq 0$, alors $m = 1$) et Γ le groupe orthogonal de $\mathrm{Pic}(X^\star)$ pour Q. D'après le lemme suivant, Γ a un nombre fini d'orbites sur N.

Lemme 5.5.21 — *Soit f une forme quadratique entière sur $\mathbb{Q}^n$, $O(f)$ le groupe orthogonal de f, $O(f)_\mathbb{Z} = O(f) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $X \subset \mathbb{Q}^n$ le cône isotrope rationnel de f et $N = \{x \in X \cap \mathbb{Z}^n\,;\, x \text{ primitif}\}$. Alors $O(f)_\mathbb{Z}$ n'a qu'un nombre fini d'orbites sur N.*

Démonstration — On pose $G = O(f)$ et $\Gamma = O(f)_\mathbb{Z}$. Le théorème de Witt (cf. [14], p. 18, prop. 6) montre que l'ensemble $X\backslash\{0\}/\mathbb{Q}^\star$ des droites isotropes de $\mathbb{Q}^n$ est une orbite sous $G(\mathbb{Q})$. Notons P son stabilisateur ; il s'agit d'un sous-groupe parabolique de G. Comme $X\backslash\{0\}/\mathbb{Q}^\star = G(\mathbb{Q})/P(\mathbb{Q})$, la proposition suivante montre que Γ n'a qu'un nombre fini d'orbites sur $X\backslash\{0\}/\mathbb{Q}^\star$, donc sur N. □

Proposition 5.5.22 — *Soient G un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique réductif, Γ un sous-groupe arithmétique de G et P un sous-groupe parabolique de G. Alors $G(\mathbb{Q})$ est réunion d'un nombre fini de doubles classes $P(\mathbb{Q})z\Gamma$.*

Démonstration — Voir [8], prop. 15.6, p. 104. □

Soient $v_1, \ldots, v_m \in N$ des représentants des orbites de Γ, autres que l'orbite de 0. Comme Q est non dégénérée sur $\mathrm{Pic}(X^\star)$, pour tout i il existe un $w_i \in \mathrm{Pic}(X^\star)$ tel que $Q(v_i, w_i) \neq 0$. Quitte à remplacer w_i par son opposé, on peut supposer $Q(v_i, w_i) > 0$. Notons M le maximum des $Q(v_i, w_i)$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Lemme 5.5.23 — *La classe d'une fibre de $X_\nu^\star \to \mathbb{P}^1$ au-dessus d'un point rationnel est primitive dans $\mathrm{Pic}(X_\nu^\star)$.*

Démonstration — On se place implicitement sur $\overline{k}$. Notons F une fibre, et supposons que $F \sim mG$ où G est un diviseur sur $X_\nu^\star$ et $m \geqslant 1$. On a alors $(G^2) = 0$, de sorte que l'on peut supposer G effectif ou $-G$ effectif, d'après le théorème de Riemann-Roch ; comme $(G.F) = 0$, cela montre que les composantes de G sont toutes incluses dans des fibres. Ainsi $mG = F + (f)$ où f est une fonction rationnelle dont le diviseur n'a que des composantes verticales. En particulier f est une fonction régulière inversible sur la fibre générique, elle y est donc constante : f provient d'une fonction rationnelle sur $\mathbb{P}^1$, ce qui montre que mG est une combinaison linéaire de fibres. Comme chaque fibre possède une composante irréductible de multiplicité 1, G est lui aussi une combinaison linéaire de fibres, d'où le résultat (la classe d'un point est primitive dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_k^1)$). □

Soit $\nu \in I$. Soit v la classe dans $\mathrm{Pic}(X^\star)$ d'une fibre de f_ν. Comme $Q(v,v) = 0$, v est dans N d'après le lemme précédent ; il existe donc i et $\gamma \in \Gamma$ tels que $v = \gamma(v_i)$. Soit D un diviseur sur $X^\star$ de classe $\gamma(w_i)$. Considérons-le comme un diviseur sur $X_\nu^\star$; en notant F une fibre de $X_\nu^\star$, on a alors $(D.F) = Q(\gamma(w_i), v) = Q(w_i, v_i)$, donc $1 \leqslant (D.F) \leqslant M$, d'où, par le lemme 5.5.18, $M \geqslant \ell^{\nu - c - \alpha}$. En prenant ν assez grand dans I, on obtient une contradiction.

Bibliographie

[1] Abhyankar, S. S., Resolution of singularities of arithmetical surfaces, *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row, New York.*

[2] Artin, M., Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, *Am. J. Math.* **84** (1962), 485–496.

[3] Artin, M., Algebraic construction of Brieskorn's resolution, *J. Algebra* **29** (1974), 330–348.

[4] Artin, M., Swinnerton-Dyer, H. P. F., The Shafarevich-Tate conjecture for pencils of elliptic curves on $K3$ surfaces, *Invent. Math.* **20** (1973), 249–266.

[5] Bănică, C., Stănăşilă, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, *John Wiley & Sons, New York*, 1976.

[6] Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A., Compact complex surfaces, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 4, Springer-Verlag, Berlin*, 1984.

[7] Bombieri, E., Mumford, D., Enriques' classification of surfaces in char. p, II, in *Complex analysis and algebraic geometry, Cambridge Univ. Press*, 1977.

[8] Borel, A., Introduction aux groupes arithmétiques, *Act. Sci. Ind.*, 1341, Paris, Hermann, 1969.

[9] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., Néron models, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 21, Springer-Verlag, Berlin*, 1990.

[10] Colliot-Thélène, J.-L., Ojanguren, M., Parimala, R., Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian rings and Brauer groups of related schemes, *à paraître dans « Algebra, Arithmetic and Geometry », Proceedings of the Bombay colloquium* 2000.

[11] Deligne, P., La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$, *Invent. Math.* **15** (1972), 206–226.

[12] Deligne, P., Cohomologie étale, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA $4\frac{1}{2}$), Lecture Notes in Math., Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1977.

[13] Deligne, P., Rapoport, M., Les schémas de modules des courbes elliptiques, in *Modular functions of one variable, II, Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin*, 1973.

[14] Dieudonné, J., Sur les groupes classiques, *Act. Sci. Ind.*, 1040, Paris, Hermann, 1958.

[15] Fischer, G., Complex analytic geometry, *Lecture Notes in Math., Vol. 538, Springer, Berlin*, 1976.

[16] Grothendieck, A., Revêtements étales et groupe fondamental, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 1), Lecture Notes in Math., Vol. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1971.

[17] Grothendieck, A., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 4), Lecture Notes in Math., Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1973.

[18] Grothendieck, A., Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 5), Lecture Notes in Math., Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1977.

[19] Grothendieck, A., Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 6), Lecture Notes in Math., Vol. 225, Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1971.

[20] Grothendieck, A., Le groupe de Brauer III, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam*, 88-188, 1968.

[21] Grothendieck, A., Éléments de géométrie algébrique, III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 11 et 17, 1963.

[22] Grothendieck, A., Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 20, 24, 28 et 32, 1964.

[23] Grothendieck, A., Fondements de la géométrie algébrique, *Sém. Bourbaki, exp. no. 149, 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236*, 1966.

[24] Gunning, R. C., Introduction to holomorphic functions of several variables, Volume I : Function Theory, *Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series*, 1990.

[25] HARTSHORNE, R., Algebraic geometry, *Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1977.

[26] KATZ, N., MAZUR, B., Arithmetic moduli of elliptic curves, *Annals of Mathematics Studies, 108, Princeton University Press, Princeton, NJ*, 1985.

[27] LIPMAN, J., Desingularization of two-dimensional schemes, *Ann. of Math.* **107** (1978), 151–207.

[28] LIPMAN, J., Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Publ. Math. IHES* 36, 195–279, 1964.

[29] MILNE, J., Abelian varieties, *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, 103–150, *Springer, New York*, 1986.

[30] MILNE, J., Étale cohomology, *Princeton Mathematical Series, 33, Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1980.

[31] MILNE, J., On a conjecture of Artin and Tate, *Ann. of Math. (2)* **102** (1975), 517–533.

[32] MIRANDA, R., The basic theory of elliptic surfaces, Dottorato di Ricerca in Matematica, *ETS Editrice, Pisa*, 1989.

[33] MUMFORD, D., Abelian varieties, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, *Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Oxford University Press, London,* 1970.

[34] MURRE, J. P., On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, *Publ. Math. IHES* 23, 5–43, 1964.

[35] NÉRON, A., Modèles minimaux des variétés abéliennes, *Publ. Math. IHES* 21, 1964.

[36] NEUKIRCH, J., SCHMIDT, A., WINGBERG, K., Cohomology of number fields, *Grundl. Math. Wiss. 323, Springer, Heidelberg*, 1999.

[37] OORT, F., Sur le schéma de Picard, *Bull. Soc. Math. Fr.* **90** (1962), 1–14.

[38] SAINT-DONAT, B., Projective models of $K3$ surfaces, *Am. J. Math.* **96** (1974), 602–639.

[39] SHAFARÉVITCH, I. R., Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 37, *Tata Institute of Fundamental Research, Bombay*, 1966.

[40] SILVERMAN, Joseph H., Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves, *Graduate Texts in Mathematics, No. 151, Springer-Verlag, New York*, 1999.

[41] TATE, J., Algebraic cycles and poles of zeta functions, *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, 93–110, *Harper & Row, New York.*

[42] TATE, J., Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, *Invent. Math.* **2** (1966), 134.

[43] TATE, J., On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, *Sém. Bourbaki, exp. no. 306*, 1966.

[44] TATE, J., Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology, *Motives (Seattle, WA, 1991), 71–83, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.*