
GROUPE DE BRAUER ET POINTS ENTIERS DE DEUX FAMILLES DE SURFACES CUBIQUES AFFINES

par

Jean-Louis Colliot-Thélène & Olivier Wittenberg

Résumé. — Soit a un entier non nul. Si a n'est pas de la forme $9n \pm 4$ pour un $n \in \mathbf{Z}$, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'une solution de l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = a$ en entiers $x, y, z \in \mathbf{Z}$. D'autre part, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'une solution de l'équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ en entiers $x, y, z \in \mathbf{Z}$.

1. Introduction

Il est connu depuis Ryley [Ryl25] que tout entier, et même tout nombre rationnel, peut s'écrire comme somme de trois cubes de nombres rationnels. La question de savoir quels entiers s'écrivent comme sommes de trois cubes d'entiers relatifs, en revanche, est toujours ouverte. Un tel entier ne peut être congru à 4 ou 5 modulo 9. Plusieurs auteurs ont conjecturé que réciproquement, tout entier non congru à 4 ou 5 modulo 9 est la somme de trois cubes d'entiers relatifs (cf. [HB92, p. 623], [CV94]).

Un problème apparenté, remontant semble-t-il à Mordell (cf. [Ko36]), consiste à déterminer quels entiers s'écrivent sous la forme $x^3 + y^3 + 2z^3$ avec $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Il se pourrait que tout entier, sans exception, possède cette propriété. La relation bien connue

$$(1.1) \quad (a+1)^3 + (a-1)^3 - 2a^3 = 6a$$

montre au moins que les entiers multiples de 6 admettent une telle écriture.

Il n'est pas exclu que des identités similaires à (1.1) puissent suffire à démontrer que tout entier non congru à 4 ou 5 modulo 9 est une somme de trois cubes. Toutefois, Vaserstein [Vas91] a établi que si $x(t), y(t), z(t) \in \mathbf{Q}[t]$ sont des polynômes tels que $x(t)^3 + y(t)^3 + z(t)^3 = t$, alors l'un de $x(t), y(t)$ et $z(t)$ est nécessairement de degré ≥ 5 .

La question de la résolubilité des équations $x^3 + y^3 + z^3 = a$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ en nombres entiers relatifs, pour a fixé, est signalée dans le recueil de Guy [Guy04, D5, p. 231] et a donné lieu à de nombreuses expériences sur ordinateur, qui jusqu'ici n'ont permis d'exhiber aucun triplet $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ tel que $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ ou $x^3 + y^3 + 2z^3 = 148$ (cf. [EJ09], [Koy00]).

Étant donné un schéma \mathcal{U} de type fini sur \mathbf{Z} , il résulte de la théorie du corps de classes global que l'image de l'application diagonale $\mathcal{U}(\mathbf{Z}) \rightarrow \prod \mathcal{U}(\mathbf{Z}_p)$, où p parcourt l'ensemble des places de \mathbf{Q} (en convenant que $\mathbf{Z}_\infty = \mathbf{R}$), est incluse dans le sous-ensemble des points adéliques orthogonaux au groupe de Brauer de $U = \mathcal{U} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ pour l'accouplement de Brauer–Manin (cf. [CTX09, §1]). La vacuité de ce sous-ensemble permet dans certains cas d'expliquer celle de $\mathcal{U}(\mathbf{Z})$ (cf. [CTX09], [KT08]). On parle alors d'obstruction de Brauer–Manin entière (ou simplement d'obstruction de Brauer–Manin) à l'existence d'un \mathbf{Z} -point de \mathcal{U} . C'est un cas particulier de l'obstruction de Brauer–Manin à l'approximation forte sur U .

Cassels [Cas85] s'était rendu compte que la loi de réciprocité cubique impose une contrainte non triviale aux solutions entières de l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ (à savoir, les entiers x , y et z sont nécessairement congrus entre eux modulo 9). Son argument revient en réalité à exhiber une obstruction de Brauer–Manin à l'approximation forte sur la surface affine d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ sur \mathbf{Q} . (Il s'agit même d'une obstruction à l'approximation faible ; voir la remarque 5.7 ci-dessous.) Il est naturel de se demander si de façon plus générale, il se pourrait qu'une obstruction de Brauer–Manin interdise, pour certains entiers a , l'existence de $x, y, z \in \mathbf{Z}$ tels que $x^3 + y^3 + z^3 = a$ ou $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ (sous l'hypothèse, pour la première équation, que a n'est pas congru à 4 ou 5 modulo 9). Le but de cet article est de démontrer qu'il n'en est rien : les diverses lois de réciprocité englobées dans l'obstruction de Brauer–Manin entière ne permettent d'exclure aucun entier a .

Le texte est organisé comme suit. Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à la détermination des groupes de Brauer des surfaces affines d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = a$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ sur \mathbf{Q} (propositions 2.1, 3.1 et 3.4). Les démonstrations des propositions 3.1 et 3.4 requièrent l'utilisation d'information arithmétique non triviale (classification des courbes elliptiques sur \mathbf{Q} isogènes à une courbe elliptique donnée) et ne s'étendraient pas telles à des équations plus générales ou à des corps de nombres autres que \mathbf{Q} . Au paragraphe 4, tirant parti de la structure de groupe des courbes elliptiques $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = 0$ sur \mathbf{F}_p , nous établissons le théorème principal de l'article (théorème 4.1). Finalement, le paragraphe 5 rassemble divers compléments à la démonstration du théorème 4.1, dont certains pourraient avoir un intérêt indépendant, discute quelques exemples et soulève la question de la densité de $U(k)$ dans l'ensemble des points adéliques de U orthogonaux à $\text{Br}(U)$ (pour la topologie adélique modifiée aux places infinies ; voir la question 5.8 (ii) pour un énoncé précis) lorsque U est le complémentaire d'une section hyperplane lisse dans une surface cubique lisse sur un corps de nombres.

Remerciements. Des calculs partiels sur les surfaces $x^3 + y^3 + z^3 = at^3$ avaient été réalisés par Venapally Suresh il y a quelques années. Nous savons gré à Samir Siksek d'avoir attiré notre attention sur l'équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$. Le premier auteur remercie l'Institut Alfréd Rényi (Budapest) et l'Institut Hausdorff (Bonn) pour leur hospitalité.

Notation. Si k est un corps et a un élément de k , on notera $k(\sqrt[3]{a})$ une extension minimale de k dans laquelle a soit un cube ; le symbole $\sqrt[3]{a}$ désignera une racine

cubique de a , fixée une fois pour toutes, dans cette extension. Selon cette convention, l'extension $k(\sqrt[3]{a})/k$ est toujours de degré 1 ou 3.

2. Sur un corps arbitraire

Dans ce paragraphe nous déterminons le groupe de Brauer des surfaces cubiques projectives d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = at^3$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = at^3$ et en exhibons des générateurs explicites (proposition 2.1). Le calcul, purement algébrique, vaut sur un corps arbitraire de caractéristique différente de 3 ne contenant pas de racine cubique primitive de l'unité.

Soient k un tel corps et X une variété géométriquement irréductible et lisse sur k . Notons $K = k[j]/(j^2 + j + 1)$ et $G = \text{Gal}(K/k) = \{1, \sigma\}$, où σ est défini par $\sigma(j) = j^2$. Notons $k(X)$ et $K(X)$ les corps de fonctions rationnelles de X et de $X \otimes_k K$.

Soit μ_3 le G -module $\{1, j, j^2\}$. Pour $f, g \in K(X)^*$, le cup-produit $\{f, g\}$ des classes de f et de g dans $K(X)^*/K(X)^{*3} = H^1(K(X), \mu_3)$ est un élément de $H^2(K(X), \mu_3^{\otimes 2})$. Nous noterons $(f, g)_j \in H^2(K(X), \mu_3)$ l'image de $\{f, g\} \otimes j$ par l'isomorphisme G -équivariant canonique

$$H^2(K(X), \mu_3^{\otimes 2}) \otimes \mu_3 \xrightarrow{\sim} H^2(K(X), \mu_3^{\otimes 3}) = H^2(K(X), \mu_3)$$

(en remarquant que $\mu_3^{\otimes 3} = \mu_3$ puisque $\mu_3^{\otimes 2} = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$); ce symbole est \mathbf{Z} -bilinéaire et antisymétrique en f et g . Il résulte des égalités

$$\sigma(\{a, b\} \otimes j) = \{\sigma(a), \sigma(b)\} \otimes \sigma(j) = \{\sigma(a), \sigma(b)\} \otimes j^2 = -\{\sigma(a), \sigma(b)\} \otimes j$$

que l'action de G sur $(a, b)_j$ est donnée par

$$(2.1) \quad \sigma((a, b)_j) = -(\sigma(a), \sigma(b))_j.$$

Rappelons enfin que le groupe $H^2(k(X), \mu_3)$ (resp. $H^2(K(X), \mu_3)$) s'identifie au sous-groupe de 3-torsion de $\text{Br}(k(X))$ (resp. de $\text{Br}(K(X))$) et que la lissité de X entraîne que les flèches naturelles $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(k(X))$ et $\text{Br}(X \otimes_k K) \rightarrow \text{Br}(K(X))$ sont des injections.

Proposition 2.1. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 3 ne contenant pas de racine cubique primitive de l'unité. Soit $a \in k^*$. Notons $X \subset \mathbf{P}_k^3$ et $X' \subset \mathbf{P}_k^3$ les surfaces projectives et lisses d'équations homogènes respectives $x^3 + y^3 + z^3 = at^3$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = at^3$. Les classes*

$$A = \text{Cores}_{K(X)/k(X)}((x + jy)/(x + y), a)_j \in H^2(k(X), \mu_3) \subset \text{Br}(k(X)),$$

$$A' = \text{Cores}_{K(X')/k(X')}((x + jy)/(x + y), 4a)_j \in H^2(k(X'), \mu_3) \subset \text{Br}(k(X'))$$

appartiennent aux sous-groupes $\text{Br}(X) \subset \text{Br}(k(X))$ et $\text{Br}(X') \subset \text{Br}(k(X'))$. Si a n'est pas un cube dans k , le quotient $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ est d'ordre 3, engendré par l'image de A . Si aucun de $a, 2a, 4a$ n'est un cube dans k , le quotient $\text{Br}(X')/\text{Br}(k)$ est d'ordre 3, engendré par l'image de A' .

Démonstration. — On suppose que a n'est pas un cube. Il est connu (cf. [Man72, §45.3], [CTS87, p. 430]) que le quotient $\mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$, que les deux éléments

$$\alpha = ((x + jy)/(x + y), a)_j$$

et

$$\beta = ((x + z)/(x + y), a)_j$$

de $\mathrm{Br}(K(X))$ appartiennent au sous-groupe $\mathrm{Br}(X \otimes_k K)$, et que leurs images dans $\mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K)$ constituent une base de ce $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ -espace vectoriel. Ceci implique déjà que $A = \mathrm{Cores}_{K(X)/k(X)}(\alpha)$ appartient à $\mathrm{Br}(X)$.

La formule (2.1) montre que $\sigma(\beta) = -\beta$ et que

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \alpha - \sigma(\alpha) &= ((x + jy)(x + j^2y)/(x + y)^2, a)_j = ((x^3 + y^3)/(x + y)^3, a)_j \\ &= ((x^3 + y^3)/t^3, a)_j = (a - (z/t)^3, a)_j = ((z/t)^3 - a, a)_j = 0 \end{aligned}$$

(cf. [Ser62, Ch. XIV, §2, prop. 4]), d'où $\sigma(\alpha) = \alpha$. Ainsi le groupe des invariants $(\mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K))^G$ est-il isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, engendré par α .

Les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} &: \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \longrightarrow \mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K), \\ \mathrm{Cores} &: \mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \end{aligned}$$

de restriction et de corestriction satisfont $\mathrm{Cores} \circ \mathrm{Res} = 2$ et $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Cores} = 1 + \sigma$. Comme la surface $X \otimes_k k(\sqrt[3]{a})$ est $k(\sqrt[3]{a})$ -rationnelle (cf. [HW08, §13.7]), le quotient $\mathrm{Br}(X \otimes_k k(\sqrt[3]{a}))/\mathrm{Br}(k(\sqrt[3]{a}))$ est nul. L'extension $k(\sqrt[3]{a})/k$ étant en outre de degré impair, il s'ensuit que $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est d'ordre impair. L'application Res induit donc un isomorphisme

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K))^G$$

dont l'inverse est $-\mathrm{Cores}$. Compte tenu que la composée $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Cores}$ coïncide sur $(\mathrm{Br}(X \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K))^G$ avec la multiplication par 2, on conclut que $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est d'ordre 3 et est engendré par $\mathrm{Cores}(\alpha)$.

Supposons maintenant que ni a , ni $2a$, ni $4a$ ne soient des cubes dans k . Si 2 est un cube dans k , la surface X' est isomorphe à X et A' s'identifie à A , de sorte qu'il n'y a rien de plus à démontrer. Supposons donc que 2 ne soit pas un cube. D'après [CTKS87, §1, proposition 1], le quotient $\mathrm{Br}(X' \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K)$ est alors isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Comme d'autre part, notant ℓ l'extension de degré 9 de k donnée par $\ell = k(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{2})$, la surface $X' \otimes_k \ell$ est ℓ -rationnelle, le groupe $\mathrm{Br}(X')/\mathrm{Br}(k)$ est d'ordre impair et l'application de restriction induit à nouveau un isomorphisme

$$\mathrm{Br}(X')/\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Br}(X' \otimes_k K)/\mathrm{Br}(K))^G$$

dont l'inverse est l'opposé de la corestriction.

L'élément $\alpha' = ((x + jy)/(x + y), 4a)_j$ de $\mathrm{Br}(K(X'))$ appartient au sous-groupe $\mathrm{Br}(X' \otimes_k K) \subset \mathrm{Br}(K(X'))$ car le diviseur de la fonction rationnelle $(x + jy)/(x + y)$ sur $X' \otimes_k K$ est la norme d'un diviseur sur $X' \otimes_k K(\sqrt[3]{4a})$ (cf. [CTS87, Ex. 2.7.8 (c)]). Par conséquent $A' = \mathrm{Cores}_{K(X')/k(X')}(\alpha')$ appartient à $\mathrm{Br}(X')$.

Pour conclure il suffit de vérifier que l'image de α' dans $\text{Br}(X' \otimes_k K) / \text{Br}(K)$ est non nulle et est invariante par G . Qu'elle soit invariante par G résulte d'un calcul similaire à (2.2). Elle est non nulle parce que son image dans $\text{Br}(X' \otimes_k K(\sqrt[3]{2})) / \text{Br}(K(\sqrt[3]{2}))$ est non nulle : en effet, sur le corps $K(\sqrt[3]{2})$, les surfaces X et X' deviennent isomorphes et α' s'identifie à α , dont on a déjà vu que l'image dans $\text{Br}(X \otimes_k K(\sqrt[3]{2})) / \text{Br}(K(\sqrt[3]{2}))$ est non nulle. \square

3. Sur les rationnels

Le but de ce paragraphe est de déterminer les groupes de Brauer des surfaces cubiques affines d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = a$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ sur le corps \mathbf{Q} des rationnels (propositions 3.1 et 3.4).

Proposition 3.1. — Soit $a \in \mathbf{Q}^*$. Notons $X \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^3$ la surface projective et lisse d'équation homogène $x^3 + y^3 + z^3 = at^3$ et $U \subset \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^3$ la surface cubique affine d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = a$, de sorte que U est le complémentaire dans X de la section hyperplane d'équation $t = 0$. La flèche de restriction $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(U)$ est un isomorphisme.

Sous les hypothèses de la proposition 3.1, si a n'est pas un cube dans \mathbf{Q} , le quotient $\text{Br}(U) / \text{Br}(\mathbf{Q})$ est donc d'ordre 3, engendré par l'image de la classe A définie dans la proposition 2.1.

Démonstration. — Notons $D \subset X$ la section hyperplane d'équation $t = 0$. Comme D est lisse, il résulte du théorème de pureté pour le groupe de Brauer que la suite exacte de localisation s'écrit

$$(3.1) \quad 0 \longrightarrow \text{Br}(X) \longrightarrow \text{Br}(U) \xrightarrow{\partial_D} H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

(cf. [Gro68, §6]). Pour établir la proposition il suffit donc de montrer que l'application ∂_D est nulle. Soient $A \in \text{Br}(U)$ et $m = \partial_D(A) \in H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Notons $P_0, P_1, P_2 \in X(\mathbf{Q})$ les points de coordonnées homogènes $P_0 = [1 : -1 : 0 : 0]$, $P_1 = [-1 : 0 : 1 : 0]$, $P_2 = [0 : -1 : 1 : 0]$. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{a})$. Soient $L_0, L_1, L_2 \subset \mathbf{P}_k^3$ les droites d'équations

$$\begin{aligned} L_0 : x + y = 0, z &= \sqrt[3]{at}, \\ L_1 : x + z = 0, y &= \sqrt[3]{at}, \\ L_2 : y + z = 0, x &= \sqrt[3]{at}. \end{aligned}$$

Pour tout i , la droite L_i est contenue dans $X \otimes_{\mathbf{Q}} k$ et rencontre $D \otimes_{\mathbf{Q}} k$ en un unique point, le point $P_i \otimes_{\mathbf{Q}} k$. Notons $A_i \in \text{Br}(L_i \cap U)$ la restriction de A à $L_i \cap U$. Comme $L_i \cap U$ est isomorphe à \mathbf{A}_k^1 et que $\text{Br}(\mathbf{A}_k^1) = \text{Br}(k)$ (la caractéristique de k étant nulle), la classe A_i est constante ; son résidu au point $P_i \otimes_{\mathbf{Q}} k$ est donc nul. Comme d'autre part $D \otimes_{\mathbf{Q}} k$ et L_i se rencontrent transversalement en $P_i \otimes_{\mathbf{Q}} k$, le résidu de A_i en $P_i \otimes_{\mathbf{Q}} k$ n'est autre que l'image de m par l'application $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'évaluation en $P_i \otimes_{\mathbf{Q}} k$. Il s'ensuit que la classe $m(P_i) \in H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ appartient pour tout i au noyau de la flèche de restriction $H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Or cette flèche est injective puisque l'extension k/\mathbf{Q} est soit triviale, soit cubique et non cyclique.

D'où la nullité de $m(P_i)$ pour tout i . L'assertion (b) du lemme ci-dessous permet d'en déduire que $m = 0$, ce qui conclut la démonstration de la proposition 3.1. \square

Lemme 3.2. — Soient $D \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ la courbe plane d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ et $P_0, P_1, P_2 \in D(\mathbf{Q})$ les points de coordonnées $P_0 = [1 : -1 : 0]$, $P_1 = [-1 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : -1 : 1]$. Alors :

(a) Le noyau de la flèche $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'évaluation au point P_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

(b) Un élément de $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ nul en P_0 et en P_1 est nul.

Démonstration. — Munissons D de la structure de courbe elliptique sur \mathbf{Q} ayant pour élément neutre le point rationnel P_0 . Pour établir le lemme 3.2 il suffit de connaître toute la torsion rationnelle pouvant apparaître dans une courbe elliptique isogène sur \mathbf{Q} à D . En effet, un élément m de $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ nul au point P_0 s'identifie à une suite exacte

$$(3.2) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

où E est une courbe elliptique sur \mathbf{Q} et n est l'ordre de m . Pour $P \in D(\mathbf{Q})$, la classe $m(P)$ est alors égale à l'image de P par la flèche $D(\mathbf{Q}) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \subset H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ bord de (3.2).

Le changement de variables $x = -4 - 3\eta$, $y = -4 + 3\eta$, $z = 6\xi$, indiqué par Selmer dans [Sel51], permet de ramener l'équation de D sous la forme de Weierstrass $\eta^2 = \xi^3 - 16/27$. Cette courbe est notée 27A1 dans les tables de Cremona [Cre97]. Dans celles-ci, on lit de plus que la classe d'isogénie de D comprend trois autres courbes elliptiques sur \mathbf{Q} et que le sous-groupe de torsion du groupe de Mordell–Weil de chaque courbe elliptique sur \mathbf{Q} isogène à D est soit trivial soit d'ordre 3. Par conséquent une suite exacte de la forme (3.2) avec $n > 1$ ne peut exister que pour $n = 3$. Par dualité, elle équivaut alors à la donnée d'une injection $\mu_3 \hookrightarrow D$.

Les points de D annulés par 3 sont ceux qui vérifient l'équation $xyz = 0$. Comme l'intersection de D avec la droite $z = 0$ est un sous-groupe canoniquement isomorphe à μ_3 et comme le sous-groupe $\{P_0, P_1, P_2\}$ est quant à lui canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, le sous-groupe de 3-torsion de D se décompose en ${}_3D = \mu_3 \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Il s'ensuit que $\text{Hom}(\mu_3, D) = \text{Hom}(\mu_3, \mu_3) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ (où Hom désigne l'ensemble des homomorphismes de groupes algébriques sur \mathbf{Q}).

Le noyau de la flèche $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'évaluation en P_0 est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, un générateur étant donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \longrightarrow D/\mu_3 \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

obtenue par passage au quotient à partir de la multiplication par 3 sur D . Si ce générateur s'annulait en P_1 , autrement dit s'il existait un point rationnel de D/μ_3 s'envoyant sur P_1 , le groupe de Mordell–Weil de D/μ_3 contiendrait un sous-groupe d'ordre 9. Or tel n'est pas le cas (par exemple parce que, comme on l'a vu, le groupe de Mordell–Weil d'une courbe elliptique sur \mathbf{Q} isogène à D ne contient jamais de sous-groupe d'ordre 9), d'où le lemme. \square

Remarques 3.3. — (i) De façon générale, si D est une variété propre, lisse et géométriquement connexe sur un corps k , si \bar{D} est la variété obtenue par extension des scalaires à une clôture séparable de k et si G désigne le groupe de Galois absolu de k , la suite spectrale de Hochschild–Serre fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\bar{D}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G \rightarrow H^2(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^2(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Si $D(k) \neq \emptyset$, le choix d’un point rationnel induit pour chaque i une rétraction de l’application de restriction $H^i(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^i(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. En particulier la flèche de droite de la suite exacte ci-dessus est alors injective et l’on obtient une décomposition en somme directe $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(\bar{D}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G$. Si k est un corps de type fini sur son sous-corps premier, le groupe $H^1(\bar{D}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G$ est fini (cf. [KL81, Th. 1 (bis)]). C’est ce groupe fini que la première partie du lemme 3.2 détermine dans un cas particulier. Sous les hypothèses de ce lemme, l’assertion (a) équivaut à dire que le groupe $H^1(\bar{D}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G$ est d’ordre 3.

(ii) Dans la situation de la proposition 3.1, les groupes $\text{Br}(\bar{X})$ et $H^3(\bar{X}, \mathbf{G}_m)$ sont nuls puisque $\bar{X} = X \otimes_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}$ est une surface rationnelle. Le théorème de pureté pour le groupe de Brauer et la suite exacte de localisation fournissent donc un isomorphisme de modules galoisiens $\text{Br}(\bar{U}) \simeq H^1(\bar{D}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (cf. [Gro68, §6] ou la suite exacte (5.1) ci-dessous). Ce dernier groupe est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2$. Compte tenu de la remarque 3.3 (i) et du lemme 3.2, on a ici $\text{Br}(\bar{U})^G \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. En particulier $\text{Br}(\bar{U})^G$ n’est pas trivial. La proposition 3.1 entraîne pourtant que l’application naturelle $\text{Br}(U) \rightarrow \text{Br}(\bar{U})^G$ est nulle, puisque $\text{Br}(\bar{X}) = 0$.

Proposition 3.4. — Soit $a \in \mathbf{Q}^*$. Notons $X' \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^3$ la surface projective et lisse d’équation homogène $x^3 + y^3 + 2z^3 = at^3$ et $U' \subset \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^3$ la surface affine d’équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$, complémentaire dans X' de la section hyperplane $t = 0$. L’image de l’application de restriction $\text{Br}(X') \rightarrow \text{Br}(U')$ est d’indice 2 dans $\text{Br}(U')$. La classe de l’algèbre de quaternions

$$B' = (a(x + y + 2z), -3(x + y + 2z)(x + y)) \in \text{Br}(\mathbf{Q}(U'))$$

appartient au sous-groupe $\text{Br}(U') \subset \text{Br}(\mathbf{Q}(U'))$ et n’appartient pas à $\text{Br}(X')$, de sorte qu’elle induit une décomposition en somme directe $\text{Br}(U') = \text{Br}(X') \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Sous les hypothèses de la proposition 3.4, si aucun de a , $2a$, $4a$ n’est un cube dans \mathbf{Q} , le quotient $\text{Br}(U')/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est donc d’ordre 6, engendré par les images des classes A' et B' définies respectivement dans les propositions 2.1 et 3.4.

Démonstration. — Le lemme 3.5 ci-dessous jouera le même rôle ici que le lemme 3.2 dans la preuve de la proposition 3.1 :

Lemme 3.5. — Notons $D' \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ la courbe plane d’équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = 0$. Posons $P_0 = [1 : -1 : 0] \in D'(\mathbf{Q})$ et $P_1 = [1 : 0 : -1/\sqrt[3]{2}] \in D'(K)$, où $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$.

(a) Le noyau de la flèche $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d’évaluation en P_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

(b) Le noyau de la flèche $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \times H^1(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ produit des flèches d’évaluation aux points P_0 et P_1 est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Démonstration. — Munissons D' de la structure de courbe elliptique sur \mathbf{Q} ayant pour élément neutre le point P_0 . Une équation de Weierstrass pour D' est donnée par $\eta^2 = \xi^3 - 1/27$ (via $x = -1 - 3\eta$, $y = -1 + 3\eta$, $z = 3\xi$). Il s'agit de la courbe 36A3 dans les tables de Cremona [Cre97]. Celles-ci nous apprennent que le sous-groupe de torsion du groupe de Mordell-Weil de chaque courbe elliptique sur \mathbf{Q} isogène à D' est cyclique, d'ordre 2 ou 6. Par dualité, le noyau de la flèche $H^1(D', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'évaluation en P_0 s'identifie donc à $\text{Hom}(\mu_6, D')$.

On vérifie sans peine que le groupe algébrique ${}_3D'$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_3 \longrightarrow {}_3D' \longrightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

où $\mu_3 \subset {}_3D'$ désigne l'intersection de D' avec l'hyperplan d'équation $z = 0$ dans $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^3$. Il s'ensuit que $\text{Hom}(\mu_3, D') = \text{Hom}(\mu_3, \mu_3) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Par ailleurs, le groupe ${}_2D'(\mathbf{Q})$ est d'ordre 2, de sorte que $\text{Hom}(\mu_2, D') = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et donc $\text{Hom}(\mu_6, D') = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$. Ainsi l'évaluation en P_0 induit-elle une décomposition $H^1(D', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, le facteur $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ étant engendré par les classes $m_2, m_3 \in H^1(D', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ des suites exactes

$$(3.3) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow D'/\mu_2 \longrightarrow D' \longrightarrow 0$$

et

$$(3.4) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \longrightarrow D'/\mu_3 \longrightarrow D' \longrightarrow 0$$

induites respectivement par la multiplication par 2 et par 3 sur D' , où $\mu_2 \subset D'$ désigne le sous-groupe ${}_2D'(\mathbf{Q})$ de ${}_2D'$. Ceci établit l'assertion (a) du lemme.

À l'aide des formules de Vêlu [Vêl71], qui fournissent des équations pour la courbe elliptique D'/μ_3 et pour l'isogénie $D'/\mu_3 \rightarrow D'$ apparaissant dans (3.4), on vérifie que la fibre de $D'/\mu_3 \rightarrow D'$ en P_1 est irréductible. L'image de P_1 par l'application $D'(K) \rightarrow H^1(K, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ bord de (3.4) est donc non nulle. En revanche l'image de P_1 par l'application $D'(K) \rightarrow H^1(K, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ bord de (3.3) est nulle puisque le point P_1 est d'ordre 3 sur D' . En d'autres termes, nous constatons que $m_3(P_1) \neq 0$ mais $m_2(P_1) = 0$. L'assertion (b) du lemme s'ensuit. \square

Établissons maintenant la proposition 3.4. Comme dans la preuve de la proposition 3.1, la section hyperplane $D' \subset X'$ d'équation $t = 0$ est lisse et l'on dispose donc, par pureté, d'une application résidu $\partial_{D'} : \text{Br}(U') \rightarrow H^1(D', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ dont le noyau est $\text{Br}(X')$. Soient $A \in \text{Br}(U')$ et $m = \partial_{D'}(A)$. Notons $k = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{4a})$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $K' = K(\sqrt[3]{a})$. La droite $L'_0 \subset \mathbf{P}_k^3$ d'équations $x + y = 0$, $z = (\sqrt[3]{a}/\sqrt[3]{2})t$ est contenue dans $X' \otimes_{\mathbf{Q}} k$ et rencontre $D' \otimes_{\mathbf{Q}} k$ au seul point $P_0 \otimes_{\mathbf{Q}} k$, avec intersection transverse en ce point. Le même raisonnement que celui employé dans la preuve de la proposition 3.1 permet d'en déduire que $m(P_0) = 0$, compte tenu de l'injectivité de la flèche de restriction $H^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. La droite $L_1 \subset \mathbf{P}_{K'}^3$ d'équations $x + \sqrt[3]{2}z = 0$, $y = \sqrt[3]{at}$ est contenue dans $X' \otimes_{\mathbf{Q}} K'$ et rencontre $D' \otimes_{\mathbf{Q}} K'$ au seul point $P_1 \otimes_K K'$, avec intersection transverse en ce point. L'extension K'/K étant soit triviale, soit cubique et non cyclique, la flèche de restriction $H^1(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(K', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est injective. Comme précédemment il s'ensuit que $m(P_1) = 0$. Le lemme 3.5 (b) montre

maintenant que si $m \neq 0$, alors m est l'unique élément de $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ vérifiant $m(P_0) = 0$ et $m(P_1) = 0$. Le quotient $\text{Br}(U')/\text{Br}(X')$ est donc d'ordre au plus 2.

Pour conclure la preuve de la proposition 3.4 il reste seulement à vérifier que $B' \in \text{Br}(U')$ et $B' \notin \text{Br}(X')$. De façon évidente, la classe B' est non ramifiée sur U' en dehors des courbes irréductibles $x + y = 0$ et $x + y + 2z = 0$. Que le résidu de B' au point générique de chacune de ces deux courbes soit nul résulte de la formule du symbole modéré (cf. [GS06, Ex. 7.1.5, Prop. 7.5.1]) et de l'identité polynomiale

$$(3.5) \quad 4(x^3 + y^3 + 2z^3) \equiv 3(x + y)(x - y)^2 \pmod{x + y + 2z}.$$

Quant au résidu de B' au point générique de D' , il est égal à la classe de la fonction rationnelle $-3(x + y + 2z)/(x + y)$ dans $\mathbf{Q}(D')^*/\mathbf{Q}(D')^{*2} = H^1(\mathbf{Q}(D'), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Le diviseur de cette fonction est $2P - 2P_0$ où $P \in D'(\mathbf{Q})$ a pour coordonnées homogènes $[1 : 1 : -1]$. Comme $P - P_0$ n'est pas un diviseur principal sur D' , cette fonction n'est pas un carré et la proposition 3.4 est établie. \square

Remarque 3.6. — La fin de la démonstration de la proposition 3.4 montre que le résidu de B' au point générique de D' reste non nul même après extension des scalaires de \mathbf{Q} à un corps algébriquement clos. Par conséquent B' est une classe « transcendante » du groupe de Brauer de U' , contrairement à A' .

4. Sur les entiers

Nous sommes à présent en position d'établir le

Théorème 4.1. — *Soit $a \in \mathbf{Z}$ un entier non nul.*

(a) *Si a n'est pas de la forme $9n \pm 4$ pour un $n \in \mathbf{Z}$, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'une solution de l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = a$ en entiers $x, y, z \in \mathbf{Z}$.*

(b) *Il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'une solution de l'équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ en entiers $x, y, z \in \mathbf{Z}$.*

Rappelons que lorsque $a = 9n \pm 4$ pour un $n \in \mathbf{Z}$, l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = a$ n'admet pas de solution entière (elle n'admet même pas de solution modulo 9).

Les résultats des paragraphes 2 et 3 fournissent des générateurs explicites du groupe de Brauer des surfaces affines intervenant dans le théorème. Afin de déterminer l'obstruction de Brauer–Manin entière associée à ces générateurs, nous nous servirons d'un lemme général permettant de relier le calcul des invariants locaux à la géométrie modulo p des surfaces considérées, aux places de mauvaise réduction. Nous énonçons et démontrons ce lemme (lemme 4.2) ainsi que deux compléments (lemmes 4.3 et 4.4) avant d'entamer la preuve du théorème 4.1. Ces trois lemmes seront utilisés dans les preuves des propositions 4.6 et 4.8 pour calculer l'image de l'application qui à un \mathbf{Z}_p -point M de la surface affine d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = a$ (resp. $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$) associe l'invariant p -adique de $A(M)$ (resp. de $A'(M)$ ou de $B'(M)$) lorsque p divise a , où A, A' et B' sont les classes données par les propositions 2.1 et 3.4.

Lemme 4.2. — *Soit K un corps p -adique, d'anneau des entiers R et de corps résiduel k . Soient $n \geq 1$ et $V \subset \mathbf{P}_K^n$ une variété projective et lisse. Fixons un hyperplan*

$H \subset \mathbf{P}_K^n$ et posons $D = V \cap H$ et $U = V \setminus D$. Notons \mathcal{V} et \mathcal{H} les adhérences de V et de H dans \mathbf{P}_R^n . Supposons le schéma $\mathcal{D} = \mathcal{V} \cap \mathcal{H}$ lisse sur R et supposons qu'il existe $s \in \mathcal{V}(k)$ n'appartenant pas à \mathcal{H} , tel que $\mathcal{V} \otimes_R k$ soit le cône dans \mathbf{P}_k^n de sommet s et de base $\mathcal{D} \otimes_R k$. Notons $\pi : \mathcal{V}^0 \otimes_R k \rightarrow \mathcal{D} \otimes_R k$ le morphisme de projection depuis s , où $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V} \setminus \{s\}$. Soient enfin $N \geq 1$ un entier inversible dans R et $B \in \text{Br}(U)$ une classe annihilée par N , telle que la condition (*) soit satisfaite :

(*) Le résidu de B au point générique de D appartient à l'image de la flèche de restriction $H^1(\mathcal{D}, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(D, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$.

Il existe alors un unique $\gamma \in H^1(\mathcal{D} \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ tel que pour tout point générique η d'une composante irréductible de $\mathcal{V} \otimes_R k$, le résidu de B en η soit égal à $(\pi^*\gamma)(\eta) \in H^1(\eta, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. En outre, si l'on pose $\mathcal{U}^0 = \mathcal{V}^0 \setminus \mathcal{D}$, alors pour tout $M \in U(K)$ qui se spécialise en un point $m \in \mathcal{V}(k)$ appartenant à $\mathcal{U}^0(k)$, l'image de $\gamma(\pi(m))$ par l'isomorphisme canonique $H^1(k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ coïncide avec l'invariant associé à $B(M)$ par la théorie du corps de classes local.

Démonstration. — Notons $\mathcal{Z} = \mathcal{V}^0 \setminus U$ et $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{D} \otimes_R k)$, de sorte que \mathcal{Z}^0 est la réunion disjointe de D et de $\mathcal{U}^0 \otimes_R k$. Les schémas \mathcal{Z}^0 , \mathcal{V}^0 et $\mathcal{D} \otimes_R k$ étant tous trois réguliers, la suite exacte longue du triple [Mil80, Ch. III, Rem. 1.26]

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathcal{Z}}^3(\mathcal{V}^0, \mu_N) \longrightarrow H_{\mathcal{Z}^0}^3(\mathcal{V}^0 \setminus (\mathcal{D} \otimes_R k), \mu_N) \longrightarrow H_{\mathcal{D} \otimes_R k}^4(\mathcal{V}^0, \mu_N) \longrightarrow \cdots$$

se réécrit, par pureté [Fuj02], en

$$(4.1) \quad H_{\mathcal{Z}}^3(\mathcal{V}^0, \Lambda(1)) \longrightarrow H^1(D, \Lambda) \oplus H^1(\mathcal{U}^0 \otimes_R k, \Lambda) \xrightarrow{f \oplus g} H^0(\mathcal{D} \otimes_R k, \Lambda(-1)),$$

où $\Lambda(r)$ désigne le faisceau $\Lambda = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ tordu r fois à la Tate. De plus, toujours par pureté, les flèches f et g s'inscrivent dans des suites exactes

$$(4.2) \quad 0 \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \Lambda) \longrightarrow H^1(D, \Lambda) \xrightarrow{f} H^0(\mathcal{D} \otimes_R k, \Lambda(-1))$$

et

$$(4.3) \quad 0 \longrightarrow H^1(\mathcal{V}^0 \otimes_R k, \Lambda) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}^0 \otimes_R k, \Lambda) \xrightarrow{g} H^0(\mathcal{D} \otimes_R k, \Lambda(-1)).$$

Notons $\alpha \oplus \beta \in H^1(D, \Lambda) \oplus H^1(\mathcal{U}^0 \otimes_R k, \Lambda)$ l'image, par la composée de l'application naturelle $H^2(U, \Lambda(1)) \rightarrow H_{\mathcal{Z}}^3(\mathcal{V}^0, \Lambda(1))$ et de la flèche de gauche de (4.1), d'un relèvement de B dans $H^2(U, \Lambda(1))$. Cette image ne dépend pas du relèvement choisi ; plus précisément, les restrictions de α et de β aux points génériques de D et des composantes irréductibles de $\mathcal{V} \otimes_R k$ ne sont autres que les résidus de B en ces points. Au vu de la suite (4.2), la condition (*) entraîne que $f(\alpha) = 0$. D'autre part, comme (4.1) est un complexe, on a $f(\alpha) + g(\beta) = 0$. Ainsi $g(\beta) = 0$, ce qui, d'après la suite exacte (4.3), signifie que $\beta \in H^1(\mathcal{V}^0 \otimes_R k, \Lambda)$.

La flèche $\pi^* : H^1(\mathcal{D} \otimes_R k, \Lambda) \rightarrow H^1(\mathcal{V}^0 \otimes_R k, \Lambda)$ est un isomorphisme puisque π est le morphisme structural d'un fibré en droites (cf. [Mil80, Ch. VI, Cor. 4.20]). Il existe donc un unique $\gamma \in H^1(\mathcal{D} \otimes_R k, \Lambda)$ tel que $\beta = \pi^*\gamma$.

Soit maintenant $M \in U(K)$ se spécialisant en un point $m \in \mathcal{U}^0(k)$. Notons $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}^0$ l'adhérence de M dans \mathcal{V} , de sorte que $\mathcal{M} \otimes_R k = m$. Comme \mathcal{U}^0 et \mathcal{M} sont lisses

sur R , on dispose par pureté d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(U, \mu_N) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U}^0 \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow e \\ H^2(M, \mu_N) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M} \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}), \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les applications de restriction et dont les flèches horizontales sont les applications résidu. La commutativité de ce carré implique que l'image de $e(\beta)$ par l'isomorphisme canonique $H^1(\mathcal{M} \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) = H^1(k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est égale à l'invariant de $B(M)$ (cf. [Gro68, p. 94]). Comme par ailleurs $e(\beta) = \beta(m) = (\pi^*\gamma)(m) = \gamma(\pi(m))$, ceci termine la démonstration du lemme. \square

Lemme 4.3. — *Sous les hypothèses du lemme 4.2, si la classe B appartient au sous-groupe $\text{Br}(V) \subset \text{Br}(U)$ (de sorte que la condition $(*)$ est trivialement satisfaite) et si $B|_D \in \text{Br}(D)$ désigne la restriction de B à D , alors γ est égal au résidu de $B|_D$ au point générique de $\mathcal{D} \otimes_R k$.*

Démonstration. — Les schémas \mathcal{V}^0 et \mathcal{D} étant lisses sur R , le théorème de pureté absolu [Fuj02] fournit les flèches horizontales du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(V, \mu_N) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{V}^0 \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \begin{array}{c} i^* \\ \pi^* \end{array} \\ H^2(D, \mu_N) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{D} \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}), \end{array}$$

où i désigne l'immersion fermée $\mathcal{D} \otimes_R k \rightarrow \mathcal{V}^0 \otimes_R k$. De la commutativité de ce carré s'ensuit que le résidu de $B|_D$ au point générique de $\mathcal{D} \otimes_R k$ est égal à $i^*\beta$. Or $i^*\beta = i^*\pi^*\gamma = (\pi \circ i)^*\gamma = \gamma$, d'où le lemme. \square

Lemme 4.4. — *Plaçons-nous dans la situation du lemme 4.2 et fixons une famille finie $B_1, \dots, B_\ell \in \text{Br}(U)$ de classes annulées par N , vérifiant chacune la condition $(*)$. Pour tout i , notons γ_i la classe associée à B_i par le lemme 4.2 et N_i l'ordre de γ_i . Supposons que D soit une courbe elliptique sur K , que les entiers N_i soient premiers entre eux deux à deux et que pour tout i , l'image de γ_i dans $H^1(\mathcal{D} \otimes_R \bar{k}, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ soit d'ordre N_i , où \bar{k} désigne une clôture algébrique de k . Alors l'application*

$$\mathcal{U}^0(R) \longrightarrow (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\ell$$

qui envoie $M \in \mathcal{U}^0(R) \subset U(K)$ sur la famille des invariants associés aux $B_i(M)$ par la théorie du corps de classes local a pour image $\prod_{i=1}^\ell \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}$.

Démonstration. — Pour tout i , la classe $\gamma_i \in H^1(\mathcal{D} \otimes_R k, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ est représentée par un revêtement cyclique $E_i \rightarrow \mathcal{D} \otimes_R k$ de degré N_i . Ce revêtement est géométriquement connexe sur k puisque l'image de γ_i dans $H^1(\mathcal{D} \otimes_R \bar{k}, \mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ est encore d'ordre N_i . De plus, comme le corps k est fini, il possède un point rationnel, d'après un théorème

de F. K. Schmidt (cf. [Ser94, Ch. III, §2.3]). Il s'agit donc d'une courbe elliptique s'inscrivant dans une suite exacte

$$(4.4) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z} \longrightarrow E_i \longrightarrow \mathcal{D} \otimes_R k \longrightarrow 0.$$

De ce point de vue, l'application $\mathcal{D}(k) \rightarrow H^1(k, \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z})$, $m_0 \mapsto \gamma_i(m_0)$ n'est autre que le bord de (4.4); c'est donc un morphisme de groupes. Celui-ci est surjectif puisque l'on a $H^1(k, E_i) = 0$ d'après le théorème de F. K. Schmidt. Comme les N_i sont premiers entre eux deux à deux, il s'ensuit que l'application $\mathcal{D}(k) \rightarrow \prod_{i=1}^{\ell} H^1(k, \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z})$, $m_0 \mapsto (\gamma_i(m_0))_{1 \leq i \leq \ell}$ est elle aussi surjective. D'autre part la flèche de spécialisation $\mathcal{U}^0(R) \rightarrow \mathcal{U}^0(k)$ est surjective (lemme de Hensel) et le morphisme $\mathcal{U}^0 \otimes_R k \rightarrow \mathcal{D} \otimes_R k$ induit par π est surjectif sur les k -points (ses fibres étant isomorphes à \mathbf{G}_m). La composée de ces trois surjections, de l'isomorphisme canonique $\prod_{i=1}^{\ell} H^1(k, \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{\ell} \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}$ et de l'inclusion $\prod_{i=1}^{\ell} \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z} \subset (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{\ell}$ est une application $\mathcal{U}^0(R) \rightarrow (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{\ell}$ dont le lemme 4.2 montre qu'elle coïncide avec celle apparaissant dans l'énoncé du lemme 4.4, ce qui conclut la démonstration. \square

Démonstration du théorème 4.1. — Si $a \in \mathbf{Z}$, posons $\mathcal{U}_a = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x, y, z]/(x^3 + y^3 + z^3 - a))$ et $\mathcal{U}'_a = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x, y, z]/(x^3 + y^3 + 2z^3 - a))$.

Lemme 4.5. — *Les ensembles $\mathcal{U}_a(\mathbf{R})$, $\mathcal{U}'_a(\mathbf{R})$, $\mathcal{U}_a(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathcal{U}'_a(\mathbf{Z}_p)$ sont non vides pour tout a et tout p , à l'exception de $\mathcal{U}_a(\mathbf{Z}_3)$ dans le cas où $a \equiv \pm 4 \pmod{9}$.*

Démonstration. — Pour tout $p \neq 3$, le schéma \mathcal{U}_a admet un \mathbf{F}_p -point lisse. En effet, si p divise a , le point $(1, -1, 0)$ convient; dans le cas contraire, tout \mathbf{F}_p -point est lisse et il est bien connu que $\mathcal{U}_a(\mathbf{F}_p) \neq \emptyset$ (cf. [Tor38, Th. 1]). Il s'ensuit que $\mathcal{U}_a(\mathbf{Z}_p) \neq \emptyset$ pour tout $p \neq 3$. Pour $p \notin \{2, 3\}$, l'ensemble $\mathcal{U}'_a(\mathbf{Z}_p)$ est non vide en vertu de l'identité (1.1) appliquée à $a/6$. Que $\mathcal{U}_a(\mathbf{R})$ et $\mathcal{U}'_a(\mathbf{R})$ soient non vides est évident. Enfin, la non vacuité de $\mathcal{U}_a(\mathbf{Z}_3)$ lorsque $a \not\equiv \pm 4 \pmod{9}$ et celle de $\mathcal{U}'_a(\mathbf{Z}_2)$ et de $\mathcal{U}'_a(\mathbf{Z}_3)$ en toute généralité se ramènent *via* le lemme de Hensel à un calcul fini que nous ne détaillons pas ici. \square

Quels que soient les entiers a et n , il résulte de l'existence d'un morphisme $\mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U}_{an^3}$ (resp. $\mathcal{U}'_a \rightarrow \mathcal{U}'_{an^3}$) que s'il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'une solution de l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = a$ (resp. $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$) en entiers $x, y, z \in \mathbf{Z}$, il n'y a pas davantage d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'une solution de l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = an^3$ (resp. $x^3 + y^3 + 2z^3 = an^3$) en entiers $x, y, z \in \mathbf{Z}$. En vue d'établir le théorème, et compte tenu que $a \equiv \pm 4 \pmod{9}$ entraîne $an^3 \equiv \pm 4 \pmod{9}$ si n est premier à 3, il est donc loisible de supposer que pour tout nombre premier $p \neq 3$, la valuation p -adique de a vérifie $v_p(a) \in \{0, 1, 2\}$. Nous fixons dorénavant un entier $a > 0$ satisfaisant cette hypothèse, et posons $\mathcal{U} = \mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_a$. Nous reprenons les notations $U, U', X, X', D, D', A, A', B'$ introduites dans les paragraphes précédents et notons de plus $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ les sous-schémas fermés de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^3$ d'équations homogènes respectives $x^3 + y^3 + z^3 = at^3$ et $x^3 + y^3 + 2z^3 = at^3$, et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ les sous-schémas fermés de \mathcal{X} et de \mathcal{X}' définis par l'équation $t = 0$. Ainsi $U = \mathcal{U} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, $U' = \mathcal{U}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, $U = \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$ et $U' = \mathcal{X}' \setminus \mathcal{D}'$.

Considérons d'abord l'obstruction de Brauer–Manin entière sur \mathcal{U} . Si a est une puissance de 3 alors $\mathcal{U}(\mathbf{Z}) \neq \emptyset$ de manière évidente et il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe un nombre premier $q \neq 3$ tel que $v_q(a) \in \{1, 2\}$. Dans ce cas a n'est pas un cube et les propositions 2.1 et 3.1 entraînent que le quotient $\text{Br}(U)/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est d'ordre 3, engendré par la classe de A . Soit alors $(M_p)_{p \in \Omega} \in \prod_{p \in \Omega} \mathcal{U}(\mathbf{Z}_p)$ une famille de points locaux, où Ω désigne l'ensemble des places de \mathbf{Q} (on convient que $\mathbf{Z}_\infty = \mathbf{R}$) ; l'existence de $(M_p)_{p \in \Omega}$ est assurée par le lemme 4.5. D'après la proposition 4.6 ci-dessous, il existe $M'_q \in \mathcal{U}(\mathbf{Z}_q)$ tel que $\text{inv}_q A(M'_q) = -\sum_{p \in \Omega \setminus \{q\}} \text{inv}_p A(M_p)$. Ainsi, en posant $M'_p = M_p$ pour $p \neq q$ on obtient une famille $(M'_p)_{p \in \Omega} \in \prod_{p \in \Omega} \mathcal{U}(\mathbf{Z}_p)$ orthogonale à $\text{Br}(U)$ pour l'accouplement de Brauer–Manin, ce qui établit l'assertion (a) du théorème.

Proposition 4.6. — *Pour $p \neq 3$ tel que $v_p(a) \in \{1, 2\}$, l'application $\mathcal{U}(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ qui à $M \in \mathcal{U}(\mathbf{Z}_p) \subset U(\mathbf{Q}_p)$ associe l'invariant p -adique de $A(M) \in \text{Br}(\mathbf{Q}_p)$ est surjective.*

Démonstration. — Comme $p \neq 3$, le schéma $\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ est lisse sur \mathbf{Z}_p . Par pureté on dispose donc d'une flèche résidu ${}_3\text{Br}(D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p) \rightarrow H^1(\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. Soit γ l'image, par cette flèche, de la restriction de $A \in \text{Br}(X)$ à $D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$.

Lemme 4.7. — *L'image de γ dans $H^1(\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est non nulle (où $\overline{\mathbf{F}}_p$ désigne une clôture algébrique de \mathbf{F}_p).*

Démonstration. — Après extension des scalaires de \mathbf{Q} à $\mathbf{Q}(j)$, la classe A s'écrit $(1 + \sigma) \left(\frac{(x + jy)}{(x + y)}, a \right)_j = \left(\frac{(x + jy)}{(x + y)}, a \right)_j - \left(\frac{(x + j^2y)}{(x + y)}, a \right)_j = \left(\frac{(x + jy)}{(x + j^2y)}, a \right)_j$ d'après l'égalité (2.1). Fixons un plongement de $\mathbf{Q}(j)$ dans \mathbf{Q}_p^{nr} et notons L le corps des fonctions de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$. La fonction rationnelle $f = \frac{(x + jy)}{(x + j^2y)}$ sur $\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p^{\text{nr}}$ est inversible au point générique de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$. Par conséquent le résidu, en ce point, de la restriction de A à $D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ est égal à la classe de $f^{v_p(a)}$ dans $L^*/L^{*3} = H^1(L, \mu_3) = H^1(L, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ (où $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est identifié à μ_3 au-dessus de $\overline{\mathbf{F}}_p$ à l'aide du choix précédemment fixé de j dans \mathbf{Q}_p^{nr}). Il suffit donc, pour conclure, de vérifier que f n'est pas un cube dans L . Or le diviseur de f sur $\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$ s'écrit $3P - 3Q$ avec $P, Q \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{F}}_p)$ distincts, et deux points distincts sur une courbe elliptique ne sont jamais linéairement équivalents. \square

Compte tenu du lemme 4.7, il suffit à présent d'appliquer les lemmes 4.3 et 4.4 (avec $\ell = 1$) pour conclure la preuve de la proposition 4.6. \square

Passons maintenant à la démonstration de l'assertion (b) du théorème 4.1. Si a est une puissance de 2 ou une puissance de 3, alors $\mathcal{U}(\mathbf{Z}) \neq \emptyset$. Il en va de même si a est divisible par 6, compte tenu de (1.1). On peut donc supposer que a ne s'écrit pas sous la forme $\pm 2^r 3^s$ avec $r, s \in \mathbf{N}$. Dans ce cas ni a , ni $2a$, ni $4a$ ne sont des cubes. D'après les propositions 2.1 et 3.4, le quotient $\text{Br}(U')/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est donc d'ordre 6 et est engendré par les classes de A' et de B' .

Proposition 4.8. — Soit $p \neq 2, 3$. L'application $\mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui à $M \in \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p) \subset U(\mathbf{Q}_p)$ associe le couple formé des invariants p -adiques de $A'(M)$ et de $B'(M)$ est surjective si $v_p(a) = 1$. Si $v_p(a) = 2$, son image est égale à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \{0\}$.

Démonstration. — Notons $\gamma_{A'} \in H^1(\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ le résidu, le long de $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$, de la restriction de $A' \in \text{Br}(X')$ à $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$. Il résulte du lemme 4.7, moyennant un changement de variables évident, que l'image de $\gamma_{A'}$ dans $H^1(\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est non nulle.

Le résidu de B' au point générique de \mathcal{D}' est la classe de la fonction rationnelle $g = -3(x+y+2z)/(x+y)$ dans $\mathbf{Q}(D')^*/\mathbf{Q}(D')^{*2}$. On voit grâce à (3.5) que le diviseur de g sur le schéma $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ est un double. Par conséquent, le revêtement double de $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ obtenu en extrayant une racine carrée de g est étale sur $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$; la classe B' vérifie donc la condition (*) du lemme 4.2. Notons $\gamma_{B'}$, l'élément de $H^1(\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ que celui-ci associe à B' .

Supposons d'abord que $v_p(a) = 1$. Soient K le corps des fonctions de $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$ et L celui de $\mathcal{X}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$, de sorte que L est isomorphe à $K(t)$. Compte tenu que $v_p(a) = 1$, le résidu de B' au point générique η de $\mathcal{X}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$ est la classe dans L^*/L^{*2} de la fonction rationnelle $-3(x+y+2z)/(x+y) \in K^*$. Le diviseur de cette fonction sur $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$ est $2P - 2P_0$ où $P, P_0 \in \mathcal{D}'(\overline{\mathbf{F}}_p)$ ont pour coordonnées homogènes respectives $[1 : 1 : -1]$ et $[1 : -1 : 0]$. Comme $P - P_0$ n'est pas un diviseur principal sur $\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p$, il s'ensuit que $-3(x+y+2z)/(x+y)$ n'est pas un carré dans K , ni *a fortiori* dans L . En conclusion, le résidu de B' en η n'est pas nul et l'image de $\gamma_{B'}$ dans $H^1(\mathcal{D}' \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{F}}_p, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est donc non nulle également. Le lemme 4.4 appliqué à $\gamma_{A'}$ et $\gamma_{B'}$ (avec $\ell = 2$ et $N = 6$) entraîne maintenant la surjectivité de l'application apparaissant dans l'énoncé de la proposition 4.8.

Supposons maintenant que $v_p(a) = 2$. Dans ce cas le résidu de B' en η est nul. Par conséquent $\gamma_{B'} = 0$ et le lemme 4.2 entraîne donc que l'application $\mathcal{U}^0(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui à M associe l'invariant p -adique de $B'(M)$ est nulle, où \mathcal{U}^0 désigne le complémentaire, dans \mathcal{U}' , du point de coordonnées $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ dans $\mathcal{U}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$. Or on constate tout de suite que $\mathcal{U}^0(\mathbf{Z}_p) = \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p)$ puisque $v_p(a) < 3$. Il suffit donc pour conclure de vérifier que l'application $\mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ d'évaluation de A' est surjective; mais ceci résulte du lemme 4.3. \square

Proposition 4.9. — L'application $\mathcal{U}'(\mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui à M associe l'invariant dyadique de $B'(M)$ est surjective.

Démonstration. — Toute unité dyadique étant un cube, il existe $v \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{Z}_2^*$ tels que $a = 2^v r^3$. On a même $v \in \{0, 1, 2\}$ d'après les réductions effectuées au début de la démonstration du théorème 4.1.

Comme le morphisme canonique $\mathcal{U}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathcal{U}'_{2^v} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$ consistant à diviser x, y et z par r induit une bijection $\mathcal{U}'(\mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathcal{U}'_{2^v}(\mathbf{Z}_2)$ et comme l'image réciproque de la classe $B'_{2^v} = (2^v(x+y+2z), -3(x+y+2z)(x+y)) \in \text{Br}(\mathcal{U}'_{2^v} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_2)$ par ce morphisme est égale à B' , on peut supposer, quitte à remplacer a par 2^v , que $a \in \{1, 2, 4\}$.

Notons t la racine cubique de 3 dans \mathbf{Z}_2^* et ev l'application apparaissant dans l'énoncé du lemme. Remarquant que $t \equiv 27 \pmod{32}$, il est aisé de vérifier les trois

assertions suivantes, qui terminent la démonstration : si $a = 1$, alors $\text{ev}(1, 0, 0) = 0$ et $\text{ev}(2, -1, -t) = 1$; si $a = 2$, alors $\text{ev}(1, 1, 1) = 0$ et $\text{ev}(t, 1, -1) = 1$; si $a = 4$, alors $\text{ev}(0, 0, 1) = 0$ et $\text{ev}(t, -1, 1) = 1$. \square

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème 4.1. Rappelons que nous avons supposé d'une part que $v_p(a) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $p \neq 3$ et d'autre part que a ne s'écrit pas sous la forme $\pm 2^r 3^s$. Il existe donc un nombre premier $q \neq 2, 3$ tel que $v_q(a) \in \{1, 2\}$. Fixons alors, avec l'aide du lemme 4.5, une famille de points locaux $(M_p)_{p \in \Omega} \in \prod_{p \in \Omega} \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p)$. Si $v_q(a) = 1$, il existe, d'après la proposition 4.8, un point $M'_q \in \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_q)$ tel que $\text{inv}_q A'(M'_q) = -\sum_{p \in \Omega \setminus \{q\}} \text{inv}_p A'(M_p)$ et $\text{inv}_q B'(M'_q) = -\sum_{p \in \Omega \setminus \{q\}} \text{inv}_p B'(M_p)$. En posant $M'_p = M_p$ pour $p \neq q$ on obtient ainsi une famille $(M'_p)_{p \in \Omega} \in \prod_{p \in \Omega} \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p)$ orthogonale à la fois à A' et à B' , et donc à $\text{Br}(U')$, pour l'accouplement de Brauer–Manin. Si $v_q(a) = 2$, il existe, d'après la proposition 4.9, un point $M'_2 \in \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_2)$ tel que $\text{inv}_2 B'(M'_2) = -\sum_{p \in \Omega \setminus \{2, q\}} \text{inv}_p B'(M_p)$. La proposition 4.8 fournit ensuite un point $M'_q \in \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_q)$ tel que $\text{inv}_q A'(M'_q) = -\text{inv}_2 A'(M'_2) - \sum_{p \in \Omega \setminus \{2, q\}} \text{inv}_p A'(M_p)$ et $\text{inv}_q B'(M'_q) = 0$. Posant $M'_p = M_p$ pour $p \in \Omega \setminus \{2, q\}$, la famille $(M'_p)_{p \in \Omega}$ est alors orthogonale à $\text{Br}(U')$ pour l'accouplement de Brauer–Manin. \square

Remarque 4.10. — Nous avons vu avec la proposition 4.8 que pour $p \geq 5$ premier, l'application $\mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui à M associe l'invariant p -adique de $B'(M)$ est nulle si $v_p(a)$ est pair et est surjective dans le cas contraire. On peut vérifier que pour $p = 3$ cette application est nulle si $v_3(a) \leq 1$, surjective sinon, et que pour $p = \infty$, elle est toujours nulle⁽¹⁾. Ainsi, dans le cas où a est un carré premier à 3, la démonstration du théorème 4.1 passe-t-elle nécessairement par des considérations dyadiques.

5. Remarques, exemples et questions

5.1. Groupes de Brauer. — Au paragraphe 3 nous avons déterminé, dans deux cas particuliers, le conoyau de l'application de restriction $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(U)$ où $X \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^3$ est une surface cubique lisse et U est le complémentaire d'une section hyperplane lisse $D \subset X$ (propositions 3.1 et 3.4). Les démonstrations s'appuyaient sur des informations de nature arithmétique (étude des courbes elliptiques sur \mathbf{Q} isogènes à D) et sur l'observation algébrique suivante : si $L \subset \mathbf{P}_k^3$ est une droite contenue dans X , définie sur une extension k/\mathbf{Q} , alors le résidu de toute classe de $\text{Br}(U)$ le long de D s'annule au point d'intersection de L avec D puisque $L \cap U$ est isomorphe à \mathbf{A}_k^1 et que $\text{Br}(\mathbf{A}_k^1) = \text{Br}(k)$. Nous expliquons et généralisons cette observation dans le lemme 5.1 ci-dessous ; nous appliquons ensuite ce lemme dans diverses situations.

Soit X une variété propre et lisse sur un corps k de caractéristique 0 et $D \subset X$ une sous-variété fermée, lisse, purement de codimension 1. Notons $U = X \setminus D$. D'après le théorème de pureté pour le groupe de Brauer, la suite exacte de localisation en

⁽¹⁾Pour $p = 3$ dans le cas où $v_3(a) = 0$ et pour $p = \infty$, ces deux assertions résultent immédiatement de l'identité $4(x^3 + y^3 + 2z^3) = 3(x + y)(x - y)^2 + (x + y + 2z)((x + y + 2z)^2 - 6(x + y)z)$.

cohomologie étale s'écrit

$$(5.1) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(U) \longrightarrow H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\theta} H^3(X, \mathbf{G}_m).$$

(cf. [Gro68, §6]). Afin de déterminer le groupe $\mathrm{Br}(U)$ il est nécessaire de contrôler le noyau de l'application θ apparaissant dans (5.1). Pour ce faire, nous considérerons des courbes auxiliaires $C \subset X$ propres et lisses telles que le schéma $C \cap D$ soit étale sur k . Si C est une telle courbe, notons $\sigma_C : H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ l'application définie par $\sigma_C(m) = \sum_{P \in C \cap D} \mathrm{Cores}_{k(P)/k}(m(P))$.

Lemme 5.1. — *On a $\mathrm{Ker}(\theta) \subset \mathrm{Ker}(\sigma_C)$ pour toute courbe irréductible $C \subset X$ propre et lisse telle que le schéma $C \cap D$ soit étale sur k .*

Dans le cas où C et D se rencontrent en un unique point, on retrouve l'observation signalée précédemment.

Pour prouver le lemme 5.1, nous allons établir l'énoncé plus fort suivant :

Lemme 5.2. — *Soit $C \subset X$ une courbe irréductible, propre et lisse sur k , telle que le schéma $C \cap D$ soit étale sur k . Notant \bar{C} la courbe obtenue par extension des scalaires à une clôture algébrique de k , on dispose d'un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\theta} & H^3(X, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & H^3(C, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & H^2(k, \mathrm{Pic}(\bar{C})) \\ \downarrow \sigma_C & & & & & & \downarrow \\ H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim} & & \longrightarrow & & \longrightarrow & H^2(k, \mathbf{Z}), \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est induite par l'application degré $\mathrm{Pic}(\bar{C}) \rightarrow \mathbf{Z}$ et les flèches horizontales du haut sont la restriction $H^3(X, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^3(C, \mathbf{G}_m)$ et la flèche $H^3(C, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^2(k, \mathrm{Pic}(\bar{C}))$ issue de la suite spectrale de Hochschild–Serre (compte tenu que $H^q(\bar{C}, \mathbf{G}_m) = 0$ pour $q \geq 2$).

Démonstration. — Quitte à remplacer X par C et D par $C \cap D$, on peut supposer que X est une courbe et que $C = X$. Notons $i : D \hookrightarrow C$ et $j : U \hookrightarrow C$ les injections canoniques. Par construction, l'application θ est la composée de l'isomorphisme $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(D, \mathbf{Z})$ et de l'application $H^2(D, \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(C, \mathbf{G}_m)$ bord de la suite exacte de faisceaux étales sur C

$$(5.2) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow j_* \mathbf{G}_m \longrightarrow i_* \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Notant $b : i_* \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$ le morphisme défini par (5.2) dans la catégorie dérivée des faisceaux étales en groupes abéliens sur C , le morphisme θ est donc obtenu, modulo l'identification $H^2(D, \mathbf{Z}) \simeq H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, en appliquant successivement les foncteurs $\mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, -)$ et $H^2(k, -)$ à b .

Comme $\mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, i_* \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{\bar{D}}$, la composée de $\mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, b) : \mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, i_* \mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, \mathbf{G}_m)[1]$, du morphisme de troncation

$$\mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, \mathbf{G}_m)[1] \rightarrow (\tau_{\geq 1} \mathrm{R}\Gamma(\bar{C}, \mathbf{G}_m)) [1] = \mathrm{Pic}(\bar{C})$$

et du degré $\mathrm{Pic}(\bar{C}) \rightarrow \mathbf{Z}$ est une flèche $t : \mathbf{Z}^{\bar{D}} \rightarrow \mathbf{Z}$ entre complexes concentrés en degré 0. Elle provient donc d'une unique application entre modules galoisiens.

Celle-ci n'est autre que l'application induite par t entre les objets de cohomologie de degré 0 des complexes considérés. Autrement dit t est égale à la composée de l'application $\Gamma(\bar{C}, b) : \mathbf{Z}^{\bar{D}} \rightarrow \text{Pic}(\bar{C})$ bord de (5.2) et du degré $\text{Pic}(\bar{C}) \rightarrow \mathbf{Z}$. Par conséquent t est l'application $m \mapsto \sum_{P \in \bar{D}} m(P)$ et $H^2(k, t) : H^2(D, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(k, \mathbf{Z})$ coïncide donc avec σ_C modulo les isomorphismes canoniques $H^2(D, \mathbf{Z}) \simeq H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et $H^2(k, \mathbf{Z}) \simeq H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Ceci achève la démonstration puisque $H^2(k, t)$ est la composée de θ avec les flèches indiquées dans l'énoncé du lemme. \square

L'intérêt du lemme 5.2 ne se résume pas au cas où C et D se rencontrent en un unique point. Notamment, une conséquence immédiate de ce lemme est la description du groupe de Brauer du complémentaire d'une courbe plane lisse sur un corps de caractéristique 0 arbitraire :

Proposition 5.3. — Soient $D \subset \mathbf{P}_k^2$ une courbe plane lisse sur un corps k de caractéristique 0. Notons $U = \mathbf{P}_k^2 \setminus D$. Le groupe $\text{Br}(U)$ s'inscrit dans une suite exacte canonique

$$(5.3) \quad 0 \longrightarrow \text{Br}(k) \longrightarrow \text{Br}(U) \longrightarrow H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sigma} H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où l'application σ vérifie $\sigma(m) = \sum_{P \in L \cap D} \text{Cores}_{k(P)/k}(m(P))$ pour tout m et toute droite $L \subset \mathbf{P}_k^2$ rencontrant D transversalement en chaque point d'intersection. (En particulier le membre de droite de cette égalité ne dépend-il pas du choix de L .)

Démonstration. — Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . Comme $H^q(\mathbf{P}_{\bar{k}}^2, \mathbf{G}_m)$ s'annule pour $q \geq 2$ et comme $H^2(k, \text{Pic}(\mathbf{P}_{\bar{k}}^2)) \simeq H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, la suite spectrale de Hochschild–Serre induit une suite exacte

$$(5.4) \quad H^3(k, \mathbf{G}_m) \longrightarrow H^3(\mathbf{P}_k^2, \mathbf{G}_m) \longrightarrow H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Par ailleurs, la suite (5.1) se prolonge à droite en une suite exacte

$$(5.5) \quad H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\theta} H^3(\mathbf{P}_k^2, \mathbf{G}_m) \longrightarrow H^3(U, \mathbf{G}_m).$$

La composée de la flèche de gauche de (5.4) et de la flèche de droite de (5.5) est injective (tout point rationnel de U en fournit une rétraction). Par conséquent la flèche de droite de (5.4) est injective sur l'image de θ . La suite (5.1) reste donc exacte si l'on remplace son dernier terme par $H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$; grâce au lemme 5.2, la proposition 5.3 s'ensuit. \square

Lorsque D est une conique, cette description se simplifie encore : on obtient une suite exacte

$$(5.6) \quad 0 \longrightarrow \text{Br}(k) \longrightarrow \text{Br}(U) \longrightarrow k^*/k^{*2} \longrightarrow 0.$$

Si $f \in k[x, y, z]$ est une forme quadratique s'annulant sur D et si $\ell \in k[x, y, z]$ désigne une forme linéaire arbitraire, l'algèbre de quaternions $(f/\ell^2, a)$ est non ramifiée sur U et définit un relèvement dans $\text{Br}(U)$ de la classe de a dans k^*/k^{*2} .

Il serait souhaitable de disposer d'une description aussi complète du groupe de Brauer de U dans la situation où U est le complémentaire d'une section hyperplane lisse dans une surface cubique lisse que dans la situation où U est le complémentaire

d'une courbe lisse dans le plan projectif. Malheureusement le lemme 5.1 ne fournit qu'une majoration du groupe $\text{Ker}(\theta)$. Il s'avère néanmoins que la proposition 5.3 permet dans certains cas de pallier cette difficulté, comme nous allons tout de suite le constater sur l'exemple des revêtements cycliques de degré n du plan projectif ramifiés le long d'une courbe lisse de degré n .

Supposons, pour simplifier, que $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$ (cette hypothèse est notamment satisfaite si k est un corps de nombres). Soient $D \subset \mathbf{P}_k^2$ une courbe plane lisse, de degré $n \geq 1$, et $f \in k[x, y, z]$ un polynôme homogène de degré n s'annulant sur D . Soit $X \subset \mathbf{P}_k^3$ la surface lisse d'équation $f(x, y, z) = t^n$. Voyant indifféremment la courbe D comme plongée dans \mathbf{P}_k^2 ou dans X (auquel cas elle s'identifie à la section hyperplane d'équation $t = 0$), nous posons $U = X \setminus D$ et $V = \mathbf{P}_k^2 \setminus D$. Le revêtement $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_k^2$ défini par $[x : y : z : t] \mapsto [x : y : z]$ est ramifié à l'ordre n le long de D et induit sur U une structure de toseur sous μ_n au-dessus de V . Par conséquent les suites exactes (5.1) et (5.3) associées aux immersions ouvertes $U \subset X$ et $V \subset \mathbf{P}_k^2$ s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$(5.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Br}(k) & \longrightarrow & \text{Br}(V) & \longrightarrow & H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sigma} H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \times n \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br}(X) & \longrightarrow & \text{Br}(U) & \longrightarrow & H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\theta} H^3(X, \mathbf{G}_m) \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi_* & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br}(k) & \longrightarrow & \text{Br}(V) & \longrightarrow & H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sigma} H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \end{array}$$

(cf. [CTSD94, Prop. 1.1.1, Prop. 1.1.2]; remarquer que $H^3(\mathbf{P}_k^2, \mathbf{G}_m) = H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ puisque $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$). Il résulte de la partie inférieure de ce diagramme que $\text{Ker}(\theta) \subset \text{Ker}(\sigma)$, tandis que la partie supérieure montre que tout élément de $\text{Ker}(\sigma)$ d'ordre premier à n appartient à $\text{Ker}(\theta)$. Ainsi avons-nous établi le

Lemme 5.4. — *Avec les notations ci-dessus, pour tout $m \in H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'ordre premier à n , on a $m \in \text{Ker}(\theta)$ si et seulement si $m \in \text{Ker}(\sigma)$.*

Il s'agit là d'un critère simple pour l'appartenance de m à $\text{Ker}(\theta)$, lorsque l'ordre de m est premier à n . Quand ce critère s'applique, le diagramme (5.7) montre de plus que pour exhiber une classe de $\text{Br}(U)$ dont le résidu le long de D soit égal à m , il suffit de chercher une telle classe dans l'image de π^* . C'est en procédant ainsi que nous avons explicité l'algèbre de quaternions B' de la proposition 3.4 à partir de la classe dans $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de la 2-isogénie (3.3) (dont il n'était pas clair *a priori* qu'elle appartenait au noyau de θ), à l'aide de la proposition 5.3.

Mentionnons pour terminer ce paragraphe une dernière application du lemme 5.2 :

Proposition 5.5. — *Soit X une variété propre et lisse sur un corps de nombres k et $D \subset X$ une sous-variété fermée de codimension 1, lisse et géométriquement connexe sur k . Notons \bar{k} une clôture algébrique de k et posons $U = X \setminus D$. S'il existe une courbe propre et lisse $C \subset X \otimes_k \bar{k}$ rencontrant $D \otimes_k \bar{k}$ en un unique point, avec intersection transverse en ce point, le quotient $\text{Br}(U)/\text{Br}(X)$ est fini.*

Démonstration. — Nous devons montrer que le noyau de l'application $\bar{\theta}$ apparaissant dans (5.1) est fini. Pour ceci il est loisible de remplacer k par une extension finie arbitraire puisque le noyau de la flèche de restriction $H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(D \otimes_k \ell, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est fini pour toute extension finie ℓ/k . En particulier pouvons-nous supposer la courbe C définie sur k . D'après le lemme 5.1 il suffit alors de s'assurer que $\text{Ker}(\sigma_C)$ est fini. Or σ_C est ici une rétraction de la flèche naturelle $H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Le noyau de σ_C s'identifie donc au groupe $H^0(k, H^1(\bar{D}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$, lequel est fini d'après Katz et Lang (voir la remarque 3.3 (i)). \square

Les hypothèses de la proposition 5.5 sont notamment satisfaites lorsque X est une sous-variété de \mathbf{P}_k^n de dimension ≥ 2 contenant géométriquement une droite et que D est une section hyperplane lisse de X ne contenant pas cette droite (par exemple X pourrait être une surface cubique lisse et D une section hyperplane lisse arbitraire).

Que l'on ne puisse se dispenser de supposer l'existence de C se voit déjà sur l'exemple du complémentaire d'une conique dans le plan, compte tenu de la suite exacte (5.6).

5.2. Contre-exemples à l'approximation forte. — Il résulte du lemme 4.5 et de la proposition 4.9 que quel que soit l'entier $a \neq 0$, la classe B' de la proposition 3.4 est *toujours* responsable d'une obstruction de Brauer–Manin à l'approximation forte sur la surface affine U' sur \mathbf{Q} d'équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = a$ (et même à l'approximation forte en dehors de la place réelle, puisque B' s'évalue trivialement sur $U'(\mathbf{R})$; voir la remarque 4.10).

Exemple 5.6. — L'équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = 2$ n'admet pas de solution $x, y, z \in \mathbf{Z}$ telle que $x + y \equiv 2 \pmod{8}$ et $z \equiv 2 \pmod{4}$, bien qu'une solution dans \mathbf{Z}_2 satisfaisant ces congruences existe (par exemple $x_0 = 9, y_0 = 9$ et $z_0 = -2\sqrt[3]{91}$) et bien qu'il existe des solutions dans \mathbf{Q} arbitrairement proches de toute solution dyadique fixée (par exemple la solution $x = -1/15, y = -17/15, z = 6/5$ vérifie $v_2(x - x_0) \geq 3, v_2(y - y_0) \geq 3$ et $v_2(z - z_0) \geq 2$).

Démonstration. — La surface cubique projective X' d'équation $x^3 + y^3 + 2z^3 = 2t^3$ est rationnelle sur \mathbf{Q} puisqu'elle contient deux droites gauches conjuguées (cf. [SD70]). Par conséquent elle satisfait l'approximation faible; en particulier l'ensemble $U'(\mathbf{Q})$ est dense dans $U'(\mathbf{Q}_2)$. Supposons maintenant qu'il existe un point $M \in U'(\mathbf{Z})$ de coordonnées (x, y, z) tel que $x + y \equiv 2 \pmod{8}$ et $z \equiv 2 \pmod{4}$. Notant $B' \in \text{Br}(U')$ la classe définie dans l'énoncé de la proposition 3.4 (avec $a = 2$), l'invariant dyadique de $B'(M)$ est alors non nul (cf. [Ser70, Ch. III, th. 1]). Or, d'après la remarque 4.10, l'évaluation de B' sur $U'(\mathbf{Z}_p)$ est triviale pour tout $p \neq 2$. La loi de réciprocité globale appliquée à $B'(M) \in \text{Br}(\mathbf{Q})$ fournit donc une contradiction. \square

Remarque 5.7. — D'après Cassels [Cas85], si $x, y, z \in \mathbf{Z}$ vérifient $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, alors $x \equiv y \equiv z \pmod{9}$. Notons comme précédemment U la surface affine d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ et X la surface cubique projective correspondante. Les propositions 2.1 et 3.1 montrent que le groupe $\text{Br}(U)/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est d'ordre 3, engendré par l'image de la classe $A \in \text{Br}(X)$ définie dans l'énoncé de la proposition 2.1. Comme X et A ont bonne réduction hors de 3, l'évaluation de A sur $X(\mathbf{Q}_p)$ est nulle pour tout

nombre premier $p \neq 3$. L'évaluation de A sur $X(\mathbf{R})$ étant également nulle, il résulte de la loi de réciprocité globale que l'invariant 3-adique de $A(M)$ s'annule pour tout $M \in X(\mathbf{Q})$. Concrètement, cela signifie que si $x, y, z \in \mathbf{Q}$ vérifient $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, alors l'invariant local de $(x + jy, 3)_j \in \text{Br}(\mathbf{Q}(j))$ en l'unique place de $\mathbf{Q}(j)$ divisant 3 est nul ; on constate à l'aide du formulaire [CTKS87, p. 34] que l'affirmation de Cassels en résulte. Cette interprétation du calcul de Cassels montre bien que le défaut d'approximation forte mis en évidence dans [Cas85] est en réalité dû à une obstruction de Brauer–Manin à l'approximation faible : l'ensemble $U(\mathbf{Q}) \cap \mathcal{U}(\mathbf{Z}_3)$ n'est même pas dense dans $\mathcal{U}(\mathbf{Z}_3)$. L'exemple 5.6, en revanche, présente indiscutablement un défaut d'approximation forte puisque l'approximation faible y est satisfaite.

5.3. Critères pour l'existence de points entiers. — Le théorème 4.1 amène naturellement les deux questions suivantes :

Questions 5.8. — (i) Soit $f \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ un polynôme homogène de degré 3 tel que la courbe plane d'équation $f = 0$ soit lisse sur \mathbf{Q} . Soit n un entier non nul. L'équation $f(x, y, z) = n$ admet-elle une solution $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ dès que l'obstruction de Brauer–Manin entière ne s'y oppose pas ?

(ii) Plus généralement, soient $X \subset \mathbf{P}_k^3$ une surface cubique lisse sur un corps de nombres k et $U \subset X$ le complémentaire d'une section hyperplane lisse. L'ensemble $U(k)$ est-il dense dans $U(\mathbf{A}_k)_{\bullet}^{\text{Br}(U)}$?

La notation $U(\mathbf{A}_k)_{\bullet}^{\text{Br}(U)}$ désigne ici le sous-ensemble de $U(\mathbf{A}_k^f) \times \pi_0(U(\mathbf{A}_k^\infty))$ constitué des familles orthogonales à $\text{Br}(U)$ pour l'accouplement de Brauer–Manin, où $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^f \times \mathbf{A}_k^\infty$ est la décomposition des adèles de k en adèles finis et infinis.

Si U est le complémentaire d'une section hyperplane lisse dans une surface cubique lisse sur un corps de nombres, une réponse affirmative à la question (ii) aurait pour corollaire que l'ensemble des points entiers de U (un modèle étant fixé) serait soit vide, soit dense dans U pour la topologie de Zariski (en particulier infini), compte tenu de la proposition 5.5. Beukers [Beu99] (voir aussi [HT01, Th. 6.13]) a établi la Zariski-densité potentielle des points entiers de U (c'est-à-dire la Zariski-densité après une extension finie des scalaires). Hassett et Tschinkel [HT01, §7] discutent plus généralement la question de la Zariski-densité potentielle des points entiers sur les surfaces log-K3. Il serait cependant déraisonnable de poser la question 5.8 (ii) pour toutes les surfaces log-K3. La réponse est en effet déjà négative pour les surfaces log-del Pezzo, comme l'illustrent les deux exemples ci-dessous.

Exemple 5.9. — De façon évidente, l'équation $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ n'admet pas de solution entière $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$. Nous allons voir qu'il n'y a pourtant pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence de telles solutions.

Notons $X \subset \mathbf{P}_\mathbf{Q}^3$ la surface quadrique définie par $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = t^2$ et $D \subset X$ la section hyperplane lisse d'équation $t = 0$. Soient de plus $\mathcal{U} = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x, y, z]/(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 1))$ et $U = X \setminus D = \mathcal{U} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Le lemme 5.2 et la suite exacte (5.1) permettent de vérifier que $\text{Br}(U)/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est d'ordre 2, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions $A = (1 - 2z, -6)$. Notons $P, Q \in U(\mathbf{Q})$ les points de coordonnées $P = (0, 1/2, 1/4)$ et $Q = (3/5, 1/5, 1/5)$. Vu les dénominateurs des coordonnées de P

et de Q , on a $\mathcal{U}(\mathbf{Z}_p) \neq \emptyset$ pour tout p . D'autre part P et Q sont tous les deux entiers en la place 3 et les invariants 3-adiques de $A(P)$ et de $A(Q)$ sont différents. Il existe donc bien une famille de points entiers locaux de \mathcal{U} orthogonale à $\text{Br}(U)$.

Le premier auteur et Xu [CTX09, Th. 6.3] démontrent néanmoins que si n est un entier non nul et $f \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ une forme quadratique homogène *indéfinie*, alors l'équation $f(x, y, z) = n$ admet une solution entière dès que l'obstruction de Brauer–Manin ne s'y oppose pas. Pour autant, même avec f indéfinie, la surface log-del Pezzo complémentaire dans le plan projectif de la conique lisse d'équation $f = 0$ peut ne pas admettre de point entier sans que cela résulte d'une obstruction de Brauer–Manin entière :

Exemple 5.10. — Soit $f(x, y, z) = 16x^2 + 9y^2 - 3z^2$. Notons $\mathcal{D} \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^2$ le fermé défini par $f = 0$, puis $\mathcal{V} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^2 \setminus \mathcal{D}$ et $V = \mathcal{V} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Notons de plus $X \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^3$ la surface quadrique d'équation $f(x, y, z) = t^2$. Posons $\mathcal{U} = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x, y, z]/(f(x, y, z) - 1))$, de sorte que $U = \mathcal{U} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ s'identifie au complémentaire dans X de la section hyperplane lisse d'équation $t = 0$ et est naturellement muni d'un morphisme fini étale $\pi : U \rightarrow V$ de degré 2. L'équation $f(x, y, z) = -1$ n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ car elle n'en admet pas dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^3$. Par ailleurs, d'après [SPX04, Ex. 1.2] ou [CTX09, Prop. 8.2], l'équation $f(x, y, z) = 1$ n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ mais en admet une dans \mathbf{R}^3 et dans \mathbf{Z}_p^3 pour tout p (autrement dit \mathcal{U} n'admet pas de point sur \mathbf{Z} mais admet des points entiers locaux). Comme 1 et -1 sont les seules unités de \mathbf{Z} , on conclut que $\mathcal{V}(\mathbf{Z}) = \emptyset$. D'autre part, la suite exacte (5.6) montre que le groupe $\text{Br}(V)/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est annulé par 2 et le diagramme (5.7) permet d'en déduire que $\pi^* \text{Br}(V) \subset \text{Br}(X)$; comme $\text{Br}(X) = \text{Br}(\mathbf{Q})$, il s'ensuit que la projection dans \mathcal{V} de n'importe quelle famille de points locaux de \mathcal{U} est orthogonale à $\text{Br}(V)$ pour l'accouplement de Brauer–Manin. Il n'y a donc pas d'obstruction de Brauer–Manin entière à l'existence d'une solution dans \mathbf{Z}^3 de l'équation $16x^2 + 9y^2 - 3z^2 = \pm 1$, bien qu'une telle solution n'existe pas.

Le lecteur vérifiera que cet exemple se généralise à $f(x, y, z) = 16m^2x^2 + p^{2k}y^2 - pz^2$ avec $m, k > 0$ entiers et p premier congru à 3 modulo 8.

L'absence de point entier sur le schéma \mathcal{U} de l'exemple 5.9 est liée à un phénomène archimédien. Dans l'exemple 5.10, bien qu'il n'y ait pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point entier sur \mathcal{U} , la vacuité de $\mathcal{U}(\mathbf{Z})$ s'explique par une obstruction de Brauer–Manin entière sur un revêtement étale de U .

Ces deux difficultés ne concernent vraisemblablement pas la question 5.8. En effet celle-ci porte sur une équation de degré impair, ce qui écarte tout phénomène archimédien évident, et d'autre part, d'après [Ser95], la surface U qui y est considérée est simplement connexe.

Examinons, pour terminer, la question 5.8 (ii) dans la situation de l'exemple 5.6.

Exemple 5.11. — Posons $\mathcal{U}' = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x, y, z]/(x^3 + y^3 + 2z^3 - 2))$. Nous avons vu que la surface $U' = \mathcal{U}' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est rationnelle sur \mathbf{Q} ; la proposition 3.4 entraîne donc que $\text{Br}(U')/\text{Br}(\mathbf{Q})$ est d'ordre 2, engendré par l'image de B' . D'autre part, l'évaluation de B' sur $U'(\mathbf{R})$ et sur $U'(\mathbf{Z}_p)$ pour tout $p \neq 2$ est triviale (remarque 4.10) et B' atteint la valeur 0 sur $U'(\mathbf{Z}_2)$ (proposition 4.9). Pour que la question 5.8 (ii) admette

une réponse positive, il est donc nécessaire que $\mathcal{U}'(\mathbf{Z})$ soit dense dans $\prod_{p \notin \{2, \infty\}} \mathcal{U}'(\mathbf{Z}_p)$ pour la topologie produit.

Références

- [Beu99] F. BEUKERS – « Integral points on cubic surfaces », Number theory (Ottawa, ON, 1996), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 25–33.
- [Cas85] J. W. S. CASSELS – « A note on the Diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ », *Math. Comp.* **44** (1985), no. 169, p. 265–266.
- [Cre97] J. E. CREMONA – *Algorithms for modular elliptic curves*, seconde éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [CTKS87] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. KANEVSKY & J.-J. SANSUC – « Arithmétique des surfaces cubiques diagonales », Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer, Berlin, 1987, p. 1–108.
- [CTS87] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & J.-J. SANSUC – « La descente sur les variétés rationnelles, II », *Duke Math. J.* **54** (1987), no. 2, p. 375–492.
- [CTSD94] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & P. SWINNERTON-DYER – « Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties », *J. reine angew. Math.* **453** (1994), p. 49–112.
- [CTX09] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & F. XU – « Brauer–Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms », *Compositio Math.* **145** (2009), p. 309–363.
- [CV94] W. CONN & L. N. VASERSTEIN – « On sums of three integral cubes », The Rademacher legacy to mathematics (University Park, PA, 1992), *Contemp. Math.*, vol. 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 285–294.
- [EJ09] A.-S. ELSENHANS & J. JAHNEL – « New sums of three cubes », *Math. Comp.* **78** (2009), no. 266, p. 1227–1230.
- [Fuj02] K. FUJIWARA – « A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber) », Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, p. 153–183.
- [Gro68] A. GROTHENDIECK – « Le groupe de Brauer III : exemples et compléments », Dix exposés sur la cohomologie des schémas, *Advanced studies in pure mathematics*, vol. 3, Masson & North-Holland, Paris, Amsterdam, 1968, p. 88–188.
- [GS06] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Guy04] R. K. GUY – *Unsolved problems in number theory*, troisième éd., Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [HB92] D. R. HEATH-BROWN – « The density of zeros of forms for which weak approximation fails », *Math. Comp.* **59** (1992), no. 200, p. 613–623.
- [HT01] B. HASSETT & YU. TSCHINKEL – « Density of integral points on algebraic varieties », Rational points on algebraic varieties, *Progr. Math.*, vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 169–197.

- [HW08] G. H. HARDY & E. M. WRIGHT – *An introduction to the theory of numbers*, sixième éd., Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [KL81] N. M. KATZ & S. LANG – « Finiteness theorems in geometric class field theory », *L'Enseign. Math. (2)* **27** (1981), no. 3-4, p. 285–319.
- [Ko36] C. KO – « Decompositions into four cubes », *J. Lond. Math. Soc.* **11** (1936), p. 218–219.
- [Koy00] K. KOYAMA – « On searching for solutions of the Diophantine equation $x^3 + y^3 + 2z^3 = n$ », *Math. Comp.* **69** (2000), no. 232, p. 1735–1742.
- [KT08] A. KRESCH & YU. TSCHINKEL – « Two examples of Brauer–Manin obstruction to integral points », *Bull. Lond. Math. Soc.* **40** (2008), no. 6, p. 995–1001.
- [Man72] YU. I. MANIN – *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, Nauka, Moscou, 1972 (en russe), trad. anglaise : *Cubic forms*, North-Holland, Amsterdam, 1974, seconde éd., 1986.
- [Mil80] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [Ryl25] S. RYLEY – *The Ladies' Diary* (1825), p. 35, question 1420.
- [SD70] H. P. F. SWINNERTON-DYER – « The birationality of cubic surfaces over a given field », *Michigan Math. J.* **17** (1970), p. 289–295.
- [Sel51] E. S. SELMER – « The Diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ », *Acta Math.* **85** (1951), p. 203–362.
- [Ser62] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.
- [Ser70] ———, *Cours d'arithmétique*, collection SUP : « le mathématicien », vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [Ser94] ———, *Cohomologie galoisienne*, Cinquième édition, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Ser95] ———, « Revêtements ramifiés du plan projectif (d'après S. Abhyankar) », Séminaire Bourbaki, vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. 483–489, exp. 204.
- [SPX04] R. SCHULZE-PILLOT & F. XU – « Representations by spinor genera of ternary quadratic forms », *Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms*, Contemp. Math., vol. 344, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 323–337.
- [Tor38] L. TORNHEIM – « Sums of n -th powers in fields of prime characteristic », *Duke Math. J.* **4** (1938), no. 2, p. 359–362.
- [Vas91] L. N. VASERSTEIN – « Sums of cubes in polynomial rings », *Math. Comp.* **56** (1991), no. 193, p. 349–357.
- [Vél71] J. VÉLU – « Isogénies entre courbes elliptiques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **273** (1971), p. A238–A241.

30 juillet 2010

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE • Courriel : jlct@math.u-psud.fr, C.N.R.S., U.M.R. 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

O. WITTENBERG • Courriel : wittenberg@dma.ens.fr, Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France