Propositions d'exposés

Exposé 1. (Facile) Définir la complétion d'un corps valué (K, v) en utilisant les suites pseudo-convergentes. Montrer qu'elle est unique à K-isomorphisme près.

Exposé 2. (Plus long) Des techniques d'ultraproduits permettent de montrer de façon élégante et élémentaire des résultats d'approximation de Greenberg et Artin, pour des corps valués Henséliens excellents discrets. Elles sont exposées dans:

Joseph Becker, J. Denef, L. Lipshitz, L. van den Dries, Ultraproducts and approximations in local rings. I. Invent. Math. 51 (1979), no. 2, 189 – 203.

Donner la preuve du Théorème 2.1, et eventuellement des Théorèmes 3.2 et 3.3.

Exposé 3. Langage de Pas. Montrez que si K est un corps valué Hensélien, de caractéristique résiduelle nulle, alors la théorie de la structure (K, k_K, Γ_K) élimine les quantificateurs du corps valué.

Thm 4.1 dans : J. Pas, Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions, J. reine angew. Math. 399 (1989), 137 - 172.
Ou bien mes notes de cours sur les corps valués, Thm 4.1. (La preuve est différente).

Exposé 3bis. Mêmes hypothèses et référence que ci-dessus. Définissez les *cellules*, et donnez les ingrédients de la preuve de la décomposition cellulaire. Section 3 de l'article de Pas.

Exposé 3ter. $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur l'ensemble P des nombres premiers. Montrez que

$$\prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p / \mathcal{U} \simeq \prod_{p \in P} \mathbb{F}_p((t)) / \mathcal{U}.$$

En fait, c'est un corollaire de l'exposé 3, et d'un résultat de théorie des modèles : Soient M et N des $\mathcal{L}$-structures de cardinalité κ, qui sont κ-saturées, et élémentairement équivalentes. Alors $M \simeq N$.

Exposé 3quater. Principe d'Ax-Kochen-Ershov. Le principe AKE dit la chose suivante : Soient K et L des corps valués Henséliens. Si $k_K \equiv k_L$ (dans le langage $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$) et si $\Gamma(K) \equiv \Gamma(L)$ (dans le langage $\{+, -, 0, <\}$), alors $K \equiv L$ (dans le langage $\{+, -, \cdot, 0, 1, |\}$).
Il en existe aussi une version avec des sous-structures élémentaires :

$$K \prec L \iff k_K \prec k_L \text{ et } \Gamma(K) \prec \Gamma(L).$$

Si la caractéristique de k_K est 0, alors l'exposé 3 nous dit que ce principe est vrai. Discuter de ce qui se passe quand la caractéristique de k_K est $p > 0$. Trois références :

— F. Delon, Hensel fields in equal characteristic $p > 0$, in: Model Theory of Algebra and Arithmetic, Proc. Karpacz 1979, Lecture Notes in Mathematics Nr 834, Springer- Verlag

Berlin Heidelberg 1980.
— F. Delon, Quelques propriétés des corps valués en théorie des modèles, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII, Paris, 1982. (J'en ai une copie ; mais probablement l'article précédent suffit)
— F.-V. Kuhlmann, Quantifier elimination for henselian fields relative to additive and multiplicative congruences, Israel Journal of Mathematics 85 (1994), 277 – 306.

Exposés 4, 5, ... A dire vrai, ce serait une bonne idée de lire l'article de Pas en entier et assez en détail. Il comporte 6 sections, la première section comportant surtout des définitions.