Introduction à la Logique

Zoé Chatzidakis, ENS, automne 2015

Introduction

Ce cours présentera quelques résultats de base en logique mathématique. La logique mathématique est vaste, elle comporte trois sujets principaux, qui ont des connexions fortes avec d'autres domaines mathématiques ou scientifiques.

– La théorie des ensembles (avec l'analyse fonctionnelle, la topologie)
– La théorie des modèles (avec l'algèbre)
– La récursivité, maintenant appelée calculabilité (avec l'informatique).

1 Rudiments de théorie des ensembles : ordinaux, cardinaux, etc.

1.1. Qu'est-ce qu'un ensemble ? La réponse à cette question est plus compliquée qu'on ne le croit. En particulier, existe-t-il un ensemble X ayant pour éléments tous les ensembles ? Un tel X satisferait $X \in X$; et donc, définissant

$$Y = \{x \in X \mid x \notin x\},$$

et posant la question "Y appartient-il à Y?" on obtiendrait une contradiction :

$$Y \in Y \iff Y \notin Y.$$

Il faut donc faire un peu attention. Nous parlerons de la *collection* de tous les ensembles, ou bien de la *classe* de tous les ensembles.

1.2. Notations, conventions.
$\in$: appartient à, ou: est membre de;
$\mathbb{N}$, les entiers naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$;
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, les nombres entiers, rationnels, réels, complexes.
$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \times B$ les opérations ensemblistes de base: intersection, union, complémentaire

relatif, produit cartésien.
Etant donnée une famille (A_i) d'ensembles indexée par un ensemble I, nous avons

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\},\\ \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}.\end{aligned}$$

Etant donné un ensemble A, nous avons son *ensemble de parties*,

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Si $f : A \to B$ est une fonction, alors $f(A)$ est l'image de f: $\{f(a) \mid a \in A\}$.

1.1 Deux théorèmes

Théorème 1.3. (Cantor) *Soit A un ensemble. Il n'existe pas de surjection de A sur $\mathcal{P}(A)$.*

Démonstration. Soit $f : A \to \mathcal{P}(A)$, et définissons

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Nous allons montrer que $B \notin f(A)$. En effet, s'il existait $a \in A$ tel que $f(a) = B$, alors nous aurions

$$a \in B \iff a \notin B,$$

ce qui nous donne la contradiction désirée.

Théorème 1.4. (Cantor-Bernstein) *Soient A et B deux ensembles, et supposons qu'il existe des injections $f : A \to B$ et $g : B \to A$. Alors il existe une bijection $h : B \to A$.*

Démonstration. Les ensembles A et $f(A)$ sont en bijection, nous pouvons donc supposer que A est inclus dans B (et que f est l'inclusion). Si $n \in \mathbb{N}$, nous notons g^n l'identité si $n = 0$, et la composée $g \circ g \cdots \circ g$ n fois de la fonction g pour $n > 0$. Nous définissons

$$C = \{g^n(x) \mid x \in B \setminus A,\ n \in \mathbb{N}\},$$

nous avons donc $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^n(B \setminus A)$, et comme l'image de f est contenue dans A, on obtient que $C = (B \setminus A) \cup g(C)$, l'union étant une union disjointe. De plus, on a

$$A \setminus C = B \setminus C,$$

puisque $B \setminus A$ est contenu dans C. Nous définissons maintenant $h : B \to A$ en posant

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in C,\\ x & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour montrer que h est injective, il suffit de montrer que $h(C) \cap B \setminus C = \emptyset$, puisque h est injective sur C et sur $B \setminus C$. C'est clair, puisque $h(C) = g(C) \subseteq C$, et $h(B \setminus C) = B \setminus C$.
Pour la surjectivité, on note que $A = (A \cap C) \cup (A \setminus C) = g(C) \cup (B \setminus C) = h(B)$.

Remarque 1.5. On dit que deux ensembles A et B sont *équipotents* (noté $A \sim B$) s'il existe une bijection entre A et B. On dit que A est *subpotent* à B (noté $A \preceq B$) s'il existe une injection de A dans B.
Le théorème précédent nous dit donc que si chacun de A, B est subpotent à l'autre, alors ils sont équipotents.

Définition 1.6. Un ensemble infini est *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Remarque 1.7. Le théorème de Cantor (1.3) nous dit donc que les ensembles infinis ne sont pas tous équipotents : il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Celui de Cantor-Bernstein (1.4) permet de montrer facilement que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

1.2 Notions d'ordre

Définition 1.8. Soit A un ensemble. Un *ordre* (partiel, strict) sur A est une relation binaire $<$ (i.e., donnée par un sous-ensemble de $A \times A$) et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) (transitivité) si $x, y, z \in A$ sont tels que $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$.
(ii) (anti-réflexivité) si $x \in A$, alors $x \not< x$. (Ici $\not<$ veut dire : n'est pas $<$)
Si pour tout $x, y \in A$, on a $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$, on dira que l'ordre est *total*, ou *linéaire*.

On dénote par $x \leq y$: $x < y$ ou $x = y$. Alors $\leq$ est toujours transitif, mais il n'est que *faiblement antisymmétrique* : $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$.

Exemples 1.9. Voici quelques exemples bien connus :
$(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$, où $<$ est l'ordre usuel. Ce sont des ordres totaux.
$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$, où l'ordre est donné par l'inclusion (stricte). C'est un ordre partiel.

Définition 1.10. Soient $(A, <)$ un ensemble ordonné, $a, a' \in A$, et $B \subseteq A$.

(i) a est un *plus petit élément* de B si $a \in B$, et pour tout $b \in B$, si $b \neq a$, alors $b > a$.
(ii) a est un *élément minimal* de B si $a \in B$ et pour tout $b \in B$, on a $b \not< a$.
(iii) a est un *minorant* de B si pour tout $b \in B$ on a $a \leq b$.
(iv) a est une borne inférieure de B si a est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de B.
(v) Les notions duales de *plus grand élément*, d'*élément maximal*, de *majorant*, de *borne supérieure* sont claires je pense.
(vi) a et a' sont *incomparables* si $a \neq a'$, $a \not< a'$ et $a' \not< a$.

Exemples 1.11. $(\mathbb{N}, <)$ a un plus petit élément, et en fait, tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.
Par contre $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ n'ont pas de plus petit élément.
$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ a un plus petit élément: $\emptyset$, l'*ensemble vide*[1]. Mais $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, \subset)$ n'a pas de plus petit élément. Ses éléments minimaux sont les singletons $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et ils sont deux à deux incomparables.

Définition 1.12. Un ordre est *bien fondé* si toute partie non vide de A a un élément minimal. Un *bon ordre* est un ordre total qui est bien fondé.

Remarque 1.13. Il est facile de montrer qu'un ordre est bien fondé si et seulement s'il ne contient pas de suite décroissante stricte infinie.

Exemples 1.14. Je dénote par $\mathcal{P}^f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Alors $(\mathbb{N}, <)$ et $(\mathcal{P}^f(\mathbb{N}), \subset)$ sont bien fondés. Mais $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ ne le sont pas.

Notation 1.15. La notation $\simeq$ entre deux ensembles ordonnés veut dire qu'il existe une bijection entre ces deux ensembles qui préserve l'ordre. On dit alors que les deux ensembles ordonnés sont *isomorphes*.

1.3 Opérations sur les ordres

Soient X et Y des ensembles (partiellement) ordonnés.

1.16. La somme ordonnée de X et Y, notée $X + Y$. L'ensemble sous-jacent de $X + Y$ est la somme disjointe de X et Y (notée $X \coprod Y$, j'écris aussi parfois $X \bigcupdot Y$), qu'on peut décrire ensemblistement de la façon suivante : on identifie X et $X \times \{0\}$, Y et $Y \times \{1\}$ de la façon naturelle, ce qui permet de mettre un ordre sur ces deux ensembles, et aussi les rend disjoints. On prend alors comme ensemble sous-jacent de $X + Y$ l'ensemble $(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$, sur lequel on définit

$$(a, i) < (b, j) \iff \begin{cases} i < j, \text{ ou} \\ i = j \text{ et } a < b \end{cases}$$

Cela revient donc à mettre une copie de l'ordre Y "après" l'ordre X.

1.17. Le produit ordonné de X et Y, noté $X \times Y$, ou bien parfois $X \overset{\leftarrow}{\times} Y$. L'ensemble sous-jacent est le produit cartésien $X \times Y$, muni de l'ordre *anti-lexicographique*, c'est à dire,

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \iff \begin{cases} a_2 < b_2 \text{ ou} \\ a_2 = b_2 \text{ et } a_1 < b_1. \end{cases}$$

C'est donc la deuxième coordonnée qui domine. (L'ordre lexicographique est celui où c'est la première coordonnée qui domine).

[1] qui n'a aucun élément

Lemme 1.18. *Soient X, Y, Z des ensembles ordonnés (non vides).*

(1) *La somme ordonnée de deux ordres totaux [resp., bien fondés] est un ordre total [resp., bien fondé]*
(2) *Même chose pour le produit ordonné.*
(3) *(Associativité de la somme et du produit)* $(X+Y)+Z \simeq X+(Y+Z)$*;* $(X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$.
(Distributivité) $X \times (Y+Z) \simeq (X \times Y) + (X \times Z)$.

Démonstration. (1) et (3) sont faciles, ainsi que le fait que le produit de deux ordres totaux est total, et sont laissés en exercice. Nous montrons maintenant que le produit de deux ordres bien fondés est bien fondé.

Supposons X et Y bien fondés, et soit $Z \subseteq X \times Y$ un ensemble non vide. On considère $\pi : X \times Y \to Y$ la projection sur la 2ème coordonnée. Soit y_0 un élément minimal de $\pi(Z)$ ($\subseteq Y$), et considérons la fibre de Z au-dessus de y_0,

$$Z_{y_0} = \{x \in X \mid (x, y_0) \in Z\}.$$

Si x_0 est un élément minimal de Z_{y_0}, alors (x_0, y_0) est minimal dans Z.

Exercice 1.19. (1) Donnez les preuves manquantes du lemme.
(2) A-t-on $(X+Y) \times Z \simeq (X \times Z) + (Y \times Z)$?
(3) Et $(X+Y) \times Z \simeq X \times Z + Y \times Z$?

1.20. L'exponentielle (faible) de X par Y, notée $X^{(Y)}$. On suppose maintenant que X et Y sont totalement ordonnés, et que X a un plus petit élément 0. Soit X^Y l'ensemble des fonctions $f : Y \to X$. Si $f \in X^Y$, alors le *support de f*, $\mathrm{Supp}(f)$, est l'ensemble des $y \in Y$ tels que $f(y) \neq 0$.

L'ensemble sous-jacent de $X^{(Y)}$ est l'ensemble des fonctions f de Y dans X telles que $\mathrm{Supp}(f)$ soit fini. On définit un ordre sur $X^{(Y)}$ de la façon suivante : si $f, g \in X^{(Y)}$ sont distincts, la réunion de leurs supports est finie ; l'ensemble $\{y \in Y \mid f(y) \neq g(y)\}$ est donc fini, et a un plus grand élément, y_0. Alors on a $f < g$ ssi $f(y_0) < g(y_0)$.

Remarque 1.21. Remarquez que pour pouvoir définir l'ordre sur $X^{(Y)}$ on a absolument besoin du fait que Y soit totalement ordonné, puisqu'il faut que tout sous-ensemble fini de Y ait un plus grand élément. De même il faut que X ait un plus petit élément pour qu'on puisse définir le support. Mais on peut supposer que l'ordre sur X ne soit pas total : la définition ci-dessus donne alors un ordre partiel sur $X^{(Y)}$.

Définition 1.22. Soit X un ensemble totalement ordonné. Un sous-ensemble J de X est un *segment initial* si pour tout $a, b \in X$, $a < b$ et $b \in J$ impliquent $a \in J$.
Si $J \subseteq Y \subseteq X$, on parlera de *segment initial de Y*, en considérant Y avec l'ordre induit par celui de X.

Proposition 1.23. *Soient X et Y deux ordres totaux, X ayant un plus petit élément* 0*, et considérons $X^{(Y)}$ avec l'ordre défini ci-dessus.*

(1) $X^{(Y)}$ *est un ordre total.*
(2) *Si* X *et* Y *sont bien fondés, alors aussi* $X^{(Y)}$.
(3) $X^{(Y+Z)} \simeq X^{(Y)} \times X^{(Z)}$ *;* $X^{(Y\times Z)} \simeq (X^{(Y)})^{(Z)}$.

Démonstration. (1) Cela suit facilement de la définition.

(2) Supposons X, Y bien fondés, et soit $Z \subseteq X^{(Y)}$ un ensemble non vide.

Si $\bar{0}$, la fonction constante sur Y égale à 0, est dans Z, alors $\bar{0}$ est minimal dans Z (car elle est minimale dans $X^{(Y)}$). Supposons donc que $\bar{0} \notin Z$, c'est à dire, $\mathrm{Supp}(f) \neq \emptyset$ pour tout $f \in Z$. On considère

$$Y_1 = \{\max \mathrm{Supp}(f) \mid f \in Z\}.$$

(Chaque support étant fini et non vide, a bien un plus grand élément, et nous considérons l'ensemble de ces plus grands éléments.) Soit y_1 le plus petit élément de Y_1 ($\subseteq Y$), et regardons

$$Z_1' = \{f \in Z \mid \max \mathrm{Supp}(f) = y_1\}.$$

Par définition de l'ordre, on a que si $f \in Z_1'$ et $g \in Z \setminus Z_1'$, alors $f < g$, et donc : Z_1' est un segment initial de Z. Soit x_1 le plus petit élément de $\{f(y_1) \mid f \in Z_1'\}$ ($\subseteq X$), et soit

$$Z_1 = \{f \in Z_1' \mid f(y_1) = x_1\}.$$

Alors Z_1 est un segment initial de Z_1' et donc de Z. On identifie Z_1 avec un sous-ensemble de $X^{(Y\setminus\{y_1\})}$ (en oubliant la valeur de f en y_1), et on recommence. On regarde d'abord si la fonction f_1 qui vaut x_1 en y_1 et 0 ailleurs, est dans Z_1 : si oui, ce serait notre plus petit élément. Si non, alors on définit :

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \{\max(\mathrm{Supp}(f) \setminus \{y_1\}) \mid f \in Z_1\}),\\
y_2 &= \text{plus petit élément de } Y_2,\\
Z_2' &= \{f \in Z_1 \mid \max(\mathrm{Supp}(f) \setminus \{y_1\}) = y_2\},\\
x_2 &= \min\{f(y_2) \mid f \in Z_2'\},\\
Z_2 &= \{f \in Z_2' \mid f(y_2) = x_2\},\\
Y_3 &= \max(\mathrm{Supp}(f) \setminus \{y_1, y_2\}),\\
&\dots
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus on vérifie que $y_2 < y_1$, et que Z_2' et Z_2 sont des segments initiaux de Z_1. On répète la procédure, et obtient ainsi une suite $y_1, x_1, Z_1, y_2, x_2, Z_2, \dots, y_n, x_n, Z_n, \dots$. Mais comme les y_n forment une suite strictement décroissante et que Y est bien fondé, cette suite s'arrête forcément pour un certain n. Pourquoi s'arrête-t-elle ? Parce que l'ensemble Z_n contient une fonction (nécéssairement unique) de support $\{y_1, \dots, y_n\}$: elle sera plus petite que tous les autres membres de Z_n.

(3) C'est facile.

1.4 Ordinaux

On considère la relation d'appartenance ($\in$) entre des ensembles. Nous utiliserons l'

Axiome d'extensionnalité : *Deux ensembles ayant les même éléments sont égaux.*

Définition 1.24. (1) Un ensemble X est *transitif* si pour tout $x \in X$ et $y \in x$ on a $y \in X$.
(2) Un ensemble X est un ordinal s'il est transitif, et $\in$ définit un bon ordre sur X.
(3) Je noterai On la classe de tous les ordinaux. Et j'utiliserai indifféremment $<$ ou $\in$ pour l'ordre sur un ordinal.

Proposition 1.25. *Soient α et β des ordinaux.*

(1) *$\emptyset$ est un ordinal.*
(2) *Si $\alpha \neq \emptyset$ alors $\emptyset \in \alpha$.*
(3) *$\alpha \notin \alpha$.*
(4) *Si $x \in \alpha$ alors $x = S_{<x} := \{y \in \alpha \mid y < x\}$ $(= \{y \in \alpha \mid y \in x\})$*
(5) *Si $x \in \alpha$, alors x est un ordinal (ce que je noterai aussi parfois $x \in \mathrm{On}$ – ce n'est pas tout à fait correct, mais c'est plus court).*
(6) *$\beta \subseteq \alpha$ ssi $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.*
(7) *$x = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal, noté (temporairement[2]) α^+.*

Démonstration. (1) Les conditions sont vides, et donc trivialement satisfaites.

(2) Un élément minimal de α (pour $\in$) doit être vide : si $x \in \alpha$ contient un élément y, alors $y \in \alpha$ par transitivité de α, et donc x n'est pas minimal.

(3) Si $x \in \alpha$ alors $x \notin x$ (puisque $\in$ est anti-réflexif sur les éléments de α). Alors $\alpha \in \alpha$ impliquerait $\alpha \notin \alpha$, une contradiction. On a donc bien $\alpha \notin \alpha$.

(4) Vient de la définition de $<$ sur α ($< = \in$).

(5) Si $x \in \alpha$, alors x est un ordinal : $x \subset \alpha$ implique que l'ordre est total et bien fondé ; si $z \in y$ et $y \in x$ alors $z < x$, d'où $z \in S_{<x} = x$, et x est donc transitif.

(6) On suppose β strictement contenu dans α, et on veut montrer que $\beta \in \alpha$. Soit x minimal dans $\alpha \setminus \beta$. Alors $\beta \supseteq S_{<x}$ (par définition de x).

Soit $y \in \beta$. Comme $\in$ est un ordre total sur α, on a $y = x$, ou $x \in y$, ou $y \in x$.
$y = x$: non, car $x \notin \beta$.
$x \in y$: non, car $y \in \beta$ impliquerait $x \in \beta$.
Donc, $y \in x$. Tous les éléments de β sont des éléments de x, et comme aussi $\beta \supseteq S_{<x}$, et par (4), on a $\beta = x$, et donc $\beta \in \alpha$.

(7) La vérification est facile.

[2] plus tard, nous le noterons $\alpha + 1$.

Exemple 1.26. Nous avons vu que $\emptyset$ est un ordinal, et qu'il appartient à tous les autres ordinaux. Mais quels sont les autres ? Tout d'abord, l'item (7) permet d'en construire une infinité à partir de $\emptyset$. On aura un ordre discret commençant avec $\emptyset$, puis $\{\emptyset\}$ (l'ensemble dont le seul élément est l'ensemble vide), puis $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, puis $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.
Pour simplifier les notations, nous les noterons 0, 1, 2, 3, etc.
L'ensemble des ordinaux $0, 1, 2, \ldots$ est noté ω. On vérifie qu'il est bien ordonné et transitif, c'est donc un ordinal. On peut donc naturellement l'identifier à $\mathbb{N}$. Mais il y a d'autres ordinaux : $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$, etc.

Exercice 1.27. Soit α un ordinal. Montrez que si β est un ordinal vérifiant $\alpha \leq \beta \leq \alpha^+$, alors $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha^+$. L'ordinal α^+ est donc un successeur de α (pour l'ordre $\in$).

Proposition 1.28. *Soit X un ensemble non-vide d'ordinaux. Alors $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$ est le plus petit élément de X.*

Démonstration. On vérifie facilement que $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$ est transitif et bien ordonné (une intersection d'ensembles transitifs est transitive ; un sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné). C'est donc un ordinal β, et on a $\beta \subseteq \alpha$ pour tout $\alpha \in X$.

Si $\beta \notin X$, alors $\beta \subset \alpha$ pour tout $\alpha \in X$ (par 1.25(6)), i.e.: $\beta \in \alpha$ pour tout $\alpha \in X$, et donc $\beta \in \beta$, ce qui est absurde (par 1.25(3)). On a donc $\beta \in X$, et il est clairement minimal dans X.

Théorème 1.29. *Soient α et β des ordinaux. Alors une (et une seule) des propriétés suivantes est satisfaite :*
- $\alpha = \beta$
- $\alpha \in \beta$
- $\beta \in \alpha$.

Démonstration. Appliquant la Proposition précédente 1.28 à $X = \{\alpha, \beta\}$, nous obtenons $\alpha \cap \beta \in \{\alpha, \beta\}$. Si $\alpha \cap \beta = \alpha$, alors $\alpha \subseteq \beta$, i.e., $\alpha = \beta$ ou bien $\alpha \subset \beta$ ($\leftrightarrow \alpha \in \beta$ par 1.25(6)), les deux cas étant bien sûr exclusifs. De même $\alpha \cap \beta = \beta$ implique $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.

Proposition 1.30. *Soit X un ensemble d'ordinaux. Alors $b = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ est un ordinal. De plus, si $\gamma < b$, il existe $\alpha \in X$ tel que $\gamma \in \alpha$.*
On écrit aussi $b = \sup_{\alpha \in X} \alpha$.

Démonstration. Les éléments de b sont tous des ordinaux, et b est transitif (facile). Par le théorème précédent, $\in$ est un ordre total sur b. Soit $Z \subseteq b$ un ensemble non vide. Alors $\bigcap_{\alpha \in Z} \alpha$ est le plus petit élément de Z, donc l'ordre est bien fondé. Cela montre que b est un ordinal.

Soit $\beta < b$. Alors $\beta \in b$, et par définition de b, il existe $\alpha \in X$ tel que $\beta \in \alpha$, i.e., $\beta < \alpha$.

Remarque 1.31. Soit X l'ensemble des ordinaux $0, 1, 2, \ldots$. Alors $\bigcup_{\alpha \in X} \alpha = \omega \notin X$.

Définition 1.32. (1) Si α est un ordinal, alors α^+ ($= \alpha \cup \{\alpha\}$) est appelé le *successeur* de α.
(2) Un ordinal β est un *ordinal successeur* s'il existe un ordinal α tel que $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$. Notons que cet α peut aussi être décrit comme le plus grand élément de β.

(3) Un ordinal **non vide** qui n'est pas un ordinal successeur est appelé un *ordinal limite.*

Proposition 1.33. *Soit $\lambda \neq \emptyset$ un ordinal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) λ *est limite.*
(2) $\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$.

Démonstration. Si $\lambda = \beta \cup \{\beta\}$, alors $\bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha = \beta$, car β est le plus grand élément de λ. Cela montre (2) $\to$ (1).

Pour l'autre direction. Puisque λ est limite, il n'a pas de plus grand élément : s'il en avait un, disons β, alors nous aurions $\lambda = \beta^+$. Donc $\beta \in \lambda$ implique $\beta^+ \in \lambda$.

Nous savons que $\beta = \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$ est un ordinal, et $\beta \subseteq \lambda$, puisque tous ses éléments sont dans λ. On ne peut avoir $\beta < \lambda$, car on aurait $\beta^+ \in \lambda$, et donc $\beta \in \beta$, ce qui est ridicule. Cela montre que $\lambda = \beta$, et donc l'implication (1) $\to$ (2).

1.34. Induction transfinie. Soit P une propriété des ordinaux. On suppose :
- $\emptyset$ satisfait P ;
- Si un ordinal α satisfait P, alors α^+ satisfait P ;
- (λ ordinal limite) Si tous les $\alpha < \lambda$ satisfont P, alors λ satisfait P.

Alors tous les ordinaux satisfont P.

En effet, si tous les ordinaux ne satisfaisaient pas P, il en existerait un (disons α), et donc un plus petit (puisque α^+ est bien ordonné). Ce plus petit ordinal, disons β, contredirait nos hypothèses.

Remarquez qu'on peut fusionner les trois conditions, et dire tout simplement : Si α est un ordinal, et tous les $\beta \in \alpha$ satisfont P alors α satisfait P. Cependant, quand on veut vérifier l'hypothèse d'induction, en général, on le fait pour chacun des trois cas séparément.

Définition 1.35. Un ordinal α est *fini* si $\alpha = \emptyset$, ou bien si α et tous ses éléments non vides sont des successeurs.

Proposition 1.36. ω *est l'ensemble des ordinaux finis, et c'est le plus petit ordinal limite.*

Démonstration. Par définition de ω, tous ses éléments non vides sont des successeurs, mais lui-même n'est pas un successeur. Il n'est donc pas fini, et il est le plus petit ordinal limite.

Nous allons montrer :

Théorème 1.37. *Tout ensemble bien ordonné est isomorphe, comme ensemble ordonné, à un ordinal. Cet ordinal, ainsi que l'isomorphisme, sont uniques.*

Lemme 1.38. *Soit $f : \alpha \to \alpha'$ une fonction strictement croissante entre deux ordinaux α et α'. Alors $f(\beta) \geq \beta$ pour tout $\beta \in \alpha$.*

De plus, $\alpha' \geq \alpha$, et si f est un isomorphisme, alors $\alpha = \alpha'$ et f est l'identité.

Démonstration. S'il existe $\beta \in \alpha$ tel que $f(\beta) < \beta$, on prend un tel β minimal, β_0. Comme f est strictement croissante, nous obtenons (en appliquant f)

$$f(f(\beta_0)) < f(\beta_0)$$

ce qui contredit la minimalité de β_0. On a donc $f(\beta) \geq \beta$ pour tout $\beta \in \alpha$. Donc, si $\beta \in \alpha$, alors $\beta \in \alpha'$, ce qui entraine que $\alpha \subseteq \alpha'$, i.e., $\alpha \leq \alpha'$.

Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est strictement croissante, on applique la première partie à f^{-1} pour obtenir le résultat.

1.39. *Démonstration du théorème 1.37.* L'unicité suit du lemme précédent. Soit X un ensemble bien ordonné. Si $x \in X$, tout isomorphisme f_x entre le segment initial $S_{<x} = \{y \in X \mid y < x\}$ de X et un ordinal α s'étend alors en un isomorphisme $f : S_{\leq x} := S_{<x} \cup \{x\} \to \alpha^+$ obtenu en envoyant x sur α.
On pose

$$Y = \{y \in X \mid \text{ il existe un ordinal } \alpha \text{ et } f : S_{\leq y} \simeq \alpha\}.$$

Comme remarqué ci-dessus, si $y \in Y$, alors l'ordinal $\alpha = \alpha(y)$ et l'isomorphisme f_y sont uniques. Supposons $Y \neq X$, et soit x minimal dans $X \setminus Y$. Si $y < x$, on a $y \in Y$, et donc $f_y : S_{\leq y} \simeq \alpha(y)$.

L'unicité des f_y implique qu'ils sont compatibles : si $y < z < x$, alors la restriction de f_z à $S_{\leq y}$ coïncide avec f_y. Soit $\alpha = \sup_{y \in Y} \alpha(y)$, et définissons $f : S_{<x} \to \alpha$ par $f(y) = f_y(y)$. (C'est OK car les f_y sont tous compatibles).

Alors f est un isomorphisme, qui s'étend à un isomorphisme entre $S_{\leq x}$ et α^+, ce qui nous donne une contradiction. Nous avons donc $Y = X$. Posant $\alpha = \sup_{y \in X} \alpha(y)$, et $f(y) = f_y(y)$ pour $y \in X$, nous obtenons l'isomorphisme entre X et α.