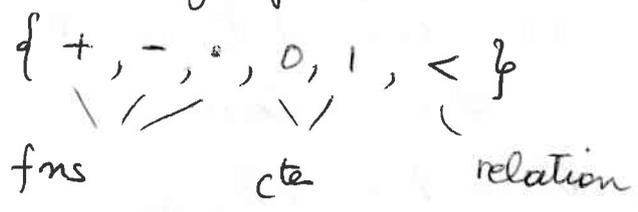


Formules et ensembles définissables.

Langage = ensemble de relations, fonctions, constante

Exemple : le langage pour les anneaux ordonnés



Symboles logiques : variables (x, y, x_1, z_1, \dots) , \neg (non), \wedge (et), \vee (ou), \rightarrow (implique : $A \rightarrow B : \neg A \vee B$), \exists (il existe), \forall (pour tout) quantificateurs ou quanteurs.

Formules sans quantificateurs : obtenues à partir des formules atomiques en utilisant \wedge, \vee, \neg .

Exemples dans notre cas de formules atomiques

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ > 0 \end{aligned} \quad \text{où } f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

et ensuite on clos par \neg, \wedge, \vee .

Dans le cas des corps réels clos (et surtout de \mathbb{R}) ces ensembles sont appelés semi-algébriques

Si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule alors $\psi(x_2, \dots, x_n) = \exists x_1 \varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule.

Si R est une structure du langage.

Une formule φ avec variables "libres" (x_1, \dots, x_n) définira un sous ensemble de R^n , de façon évidente si $\varphi(\bar{x})$ est sans quantificateurs, et en utilisant que l'ensemble défini par $\exists x_1 \varphi(x_1, \dots, x_n)$ est la projection sur les $(n-1)$ dernières coordonnées de l'ensemble défini par φ

$$\forall x_1 \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ est équivalente à : } \neg(\exists x_1 \neg \varphi(x_1, \dots, x_n))$$

Ensembles définissables en termes de structures.

Une structure S sur un ensemble R est un ensemble $\mathcal{L} = \bigcup \mathcal{L}_n$, où $\mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{P}(R^n)$ est une algèbre de Boole (i.e. contient R^n , close par \cap et \cup finies et par complémentaire). De plus il faut :

Si $A \in \mathcal{L}_n$, $B \in \mathcal{L}_m$ alors $A \times B \in \mathcal{L}_{n+m}$

Si $A \in \mathcal{L}_n$, $\sigma \in \text{Sym}(n)$, alors $A^\sigma \in \mathcal{L}_n$

$$A^\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \in A\}$$

(5) Si $A \in \mathcal{L}_{n+1}$ et $\pi: R^{n+1} \rightarrow R^n$ est la projection sur les n dernières coordonnées, alors $\pi(A) \in \mathcal{L}_n$.

On met aussi en général, pour $S \subseteq R$, $\{a\}^{\mathcal{L}}, a \in S$

"Formules sans paramètres" dans notre cas : $S = \mathbb{Z}$

"Formules avec paramètres" : $S = R$.

Typiquement, on commence avec des formules de base, puis on commence à clore par \cap, \cup, \complement , projection, Et on espère s'arrêter un jour.