Exercice de Maths

Exercice : Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, alors

f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus D$
où D dénombrable

---

f convexe sur $\mathbb{R}$, sans bornes, donc $\mathcal{C}^0$

pour $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x f : \mathbb{R} \setminus x \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad t \longmapsto \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$

On a :
- $\tau_x f$ croissante
- $\forall t < x, \quad \tau_x f(t) \leqslant \tau_x f(x+1)$
- $\forall t > x, \quad \tau_x f(x-1) \leqslant \tau_x f(t)$

Donc $\sup \{\tau_x f(t),\ t < x\} = \underbrace{\lim_{t \to x^-}}_{\text{existe donc}} \tau_x f(t) \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \quad \tau_x f(x^-)$ existe et est réel

De même, $\tau_x f(x^+)$ —— — — ——

On a f dérivable en x
$\iff \tau_x f(x^-) = \tau_x f(x^+)$

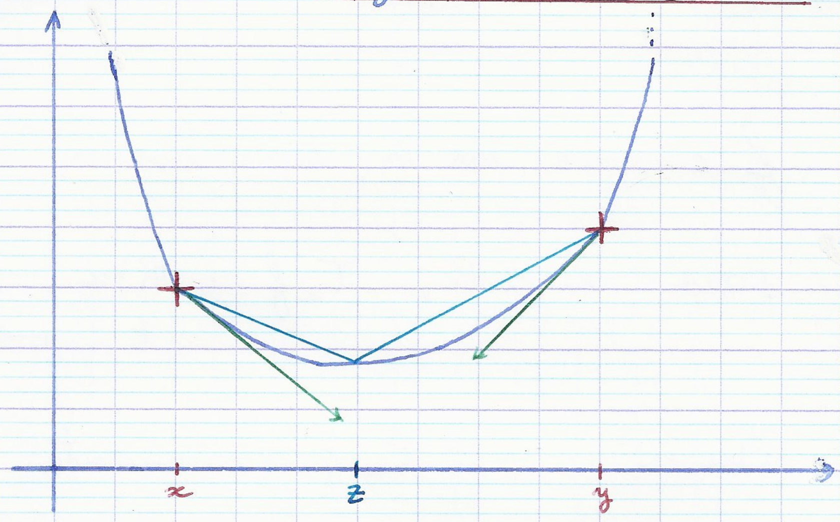
(On a déjà $\tau_x f(x^-) \leqslant \tau_x f(x^+)$)

Il s'agit donc de montrer que

$$D := \{ x \in \mathbb{R},\ \tau_x f(x^-) < \tau_x f(x^+) \}$$

est dénombrable.

$\mathbb{Q}$ étant dénombrable, il suffit de trouver une injection $i : D \hookrightarrow \mathbb{Q}$.



On a : si $x < y$
alors

$$\tau_x f(x^+) \leqslant \tau_y f(y^-)$$

en effet, si $z \in]x, y[$ ($z = \frac{x+y}{2}$, par exemple)
alors

$$\underbrace{\tau_x f(x^+) \leqslant \tau_x f(z)}_{\text{croissance de } \tau_x f} \leqslant \underbrace{\tau_y f(z)}_{\text{convexité de } f} \leqslant \underbrace{\tau_y f(y^-)}_{\text{croissance de } \tau_y f}$$

croissance de $\tau_x f$ — convexité de f — croissance de $\tau_y f$

Ainsi,

$$i : \begin{array}{ccl} D & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & q \in]\tau_x f(x^-) ; \tau_x f(x^+)[\cap \mathbb{Q} \end{array}$$

bien définie par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,
est injective car strictement croissante.

D est donc bien dénombrable.