exercice : $n \geq 3$, $A_1 A_2 \dots A_n$ polygone inscrit dans un cercle.
Montrer que prendre $A_1 \dots A_n$ régulier permet de maximiser le périmètre, et réciproquement.

solution :

maximisation $\rightarrow$ fonction continue sur un compact

ici, on prend

$$p : U^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(A_1, \dots) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} d(A_i, A_{i+1}) \qquad (\text{on note } A_{n+1} = A_1)$$

ou, si vous êtes en sup,

$$\tilde{p} : [0; 2\pi]^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto \sum_{t=1}^{n} |e^{i\theta_t} - e^{i\theta_{t+1}}|$$

est bien continue, sur un ensemble compact (rappelons que, via n extractions successives, un produit de n compacts reste compact, au sens où il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass)

Par théorème, p a bien un max, atteint en au moins un point $(M_1, \dots, M_n)$.

À première vue, je ne vois pas comment montrer que si (A_i) régulier, le périmètre est maximal.

La stratégie sera donc de
mq si (A_i) pas régulier
alors $p((A_i))$ n'est pas maximal.

Ainsi, (M_i), dont l'existence est assurée par le théorème, est nécessairement régulière. On en déduit alors le résultat.

Bien, avant tout cela, réglons un petit problème : le domaine de définition de p.
En effet, on ne s'intéresse qu'aux polygones avec les sommets "dans l'ordre" (on ne veut pas d'étoiles, par exemple).
On restreint p à

$$D = \left\{ (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{U}^n, \quad \text{"} A_1 \leqslant A_2 \leqslant \dots \leqslant A_n \leqslant A_1 \text{"}, \quad A_1 = 1 \right\}$$

i.e. bon ordre

(on a pris $A_1 = 1$ pour rendre unique "le" polygone régulier à n sommets)

D étant fermé dans un compact, il est compact.

(M_i) un point où $p_{|D}$ atteint son maximum.

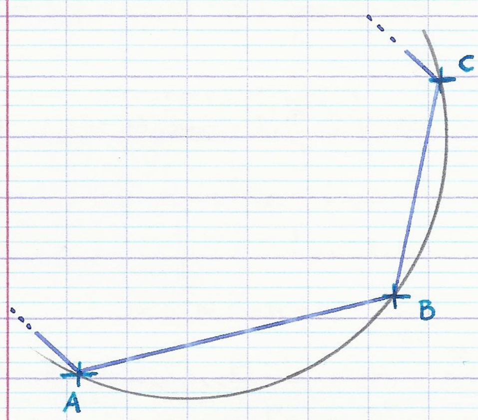
Supposons (on procède par l'<u>absurde</u>) que (M_i) n'est pas régulier.
On a donc

$$\text{non}\left(\forall i,\ d(M_i, M_{i+1}) = d(M_i, M_{i-1})\right)$$

et donc

$$\underline{\exists i_0,\ d(\underbrace{M_{i_0}}_{=B}, \underbrace{M_{i_0+1}}_{=C}) \neq d(M_{i_0}, \underbrace{M_{i_0-1}}_{=A})}$$

On est dans la situation suivante :



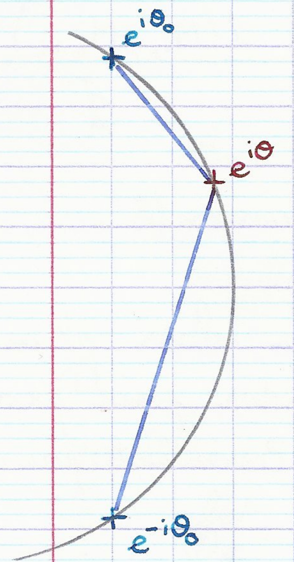
On a alors plusieurs méthodes pour prouver que B n'est pas optimal.

J'en propose ici deux :
- une paramétrisation, suivie d'une étude de fonction "bourrinne"
- une méthode plus "physique", dont la justification rigoureuse vient en spé.

Méthode 1 : étude de fonction

Quitte à faire une rotation, on s'est rammené à étudier, pour $\theta_0 < \pi$

$$f : \begin{array}{ccc} [-\theta_0 ; \theta_0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & |e^{i\theta} - e^{+i\theta_0}| + |e^{i\theta} - e^{-i\theta_0}| \end{array}$$



on a

$$f(\theta) = |1 - e^{i(\theta-\theta_0)}| + |1 - e^{i(\theta+\theta_0)}|$$

$$= \sqrt{\sin^2(\theta-\theta_0) + (1-\cos(..))^2} + \dots$$

$$= \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{adieu !}} \left[\sqrt{1-\cos(\theta-\theta_0)} + \sqrt{1-\cos(\theta+\theta_0)}\right]$$

f $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\theta_0 ; \theta_0[$ et $\mathcal{C}^0$ partout

$$2 f'(\theta) = \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{\sqrt{1-\cos(\theta-\theta_0)}} + \frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\sqrt{1-\cos(\theta+\theta_0)}}$$

si $f'(\theta) \neq 0$, c'est que $e^{i\theta}$ n'est pas optimal (extremum local $\Rightarrow f' = 0$)

on cherche donc les points d'annulation de f'.

On étudie pour cela

$$g : \begin{array}{ccc} [-\pi ; 0[\cup]0 ; \pi[& & \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} \end{array}$$