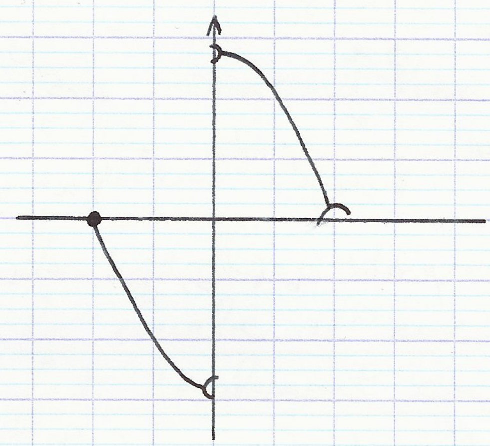
$$g'(x) = \frac{\cos(x)\sqrt{1-\cos x} - \sin(x)\cdot\frac{\sin(x)}{2\sqrt{1-\cos x}}}{1-\cos(x)}$$

$$\sim \cos\,(1-\cos) - \frac{1}{2}\sin^2$$

$$\sim \frac{1}{2}(2\cos - \cos^2 - 1)$$

$$\sim -\frac{1}{2}(1-\cos)^2 \quad < 0$$

via des DLs aux bornes, on a alors que g a cette allure



g est donc "impaire" et injective.

On en déduit que pour avoir $f'(\theta) = 0$, il faut

$$\theta - \theta_0 = -(\theta + \theta_0)$$

i.e.

$$\theta = 0$$

cqfd.

Je ne détaille pas plus, car la méthode qui vient est à mon sens bien plus amusante (ce n'est pas très difficile...) :

Méthode 2 : utiliser le gradient.

Si vous n'avez pas encore fait le chapitre sur le calcul différentiel à deux variables (qui vient en fin de sup), sachez que ce raisonnement "à la physicienne" est totalement rigoureux.

On note $(x|x')$ le produit scalaire (dans $\mathbb{R}^2$) entre x et x'.

On constate que

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}\,dy$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

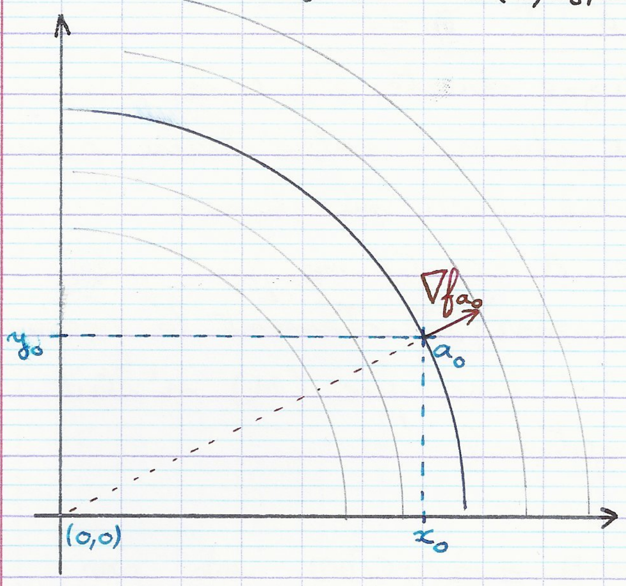
Ainsi, en tout point $a_0=(x_0,y_0) \neq (0,0)$, on a

$$d(0, a_0+h) = d(0,a_0) + \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot h_x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot h_y\right) + o\left(\sqrt{h_x^2+h_y^2}\right)$$

ce qui, avec $f : a \mapsto d(0,a)$, s'écrit plus simplement

$$f(a_0+h) = f(a_0) + (\nabla f_{a_0} | h) + o(h)$$

où $\nabla f_{a_0} = \dfrac{a_0}{d(0,a_0)}$, que les physiciens notent $\overrightarrow{\text{grad}}\, f_{a_0}$



Ainsi, localement, l'allure de f est donnée par ∇f_{a_0} :

pour h suffisamment petit,

$(\nabla f_{a_0} | h) < 0 \Rightarrow f(a_0+h) < f(a_0)$

$(\nabla f_{a_0} | h) > 0 \Rightarrow f(a_0+h) > f(a_0)$

Cela correspond bien à l'idée selon laquelle ∇f_{a_0} pointe dans la direction où f croît.

Un corollaire de ces propriétés est que la courbe de niveau "$f(a) = f(a_0)$" fait localement un angle droit avec ∇f_{a_0}. (de façon à avoir "$(\nabla f_{a_0} | h) = 0$")

Revenons maintenant à notre problème :

on pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\quad a \mapsto d(A, a)$
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\quad a \mapsto d(C, a)$

On a alors deux cas :

- si $B = A$ ou $B = C$:
  la ligne droite étant le plus court chemin entre deux points, prendre B à mi-chemin entre A et C ne peut que augmenter strictement le périmètre, et c'est donc que (M_i) n'était pas optimal

- sinon, si $B \notin \{A; C\}$:
  f et g admettent toutes deux un gradient en B.
  La linéarité du produit scalaire assure alors que $f+g$ (la fonction que l'on cherche à maximiser) admet aussi un gradient en B, et que
  $$\nabla(f+g)_B = \nabla f_B + \nabla g_B$$