Le problème apparaît alors sur le dessin : la droite passant par B et normale à $\nabla(f+g)_B$ coupe le cercle en B.

Ainsi, pour B' sur le cercle,
suffisemment proche de B
du bon côté par rapport à B
(ici, en sens ↻

on aura que

$$(\nabla(f+g)_B \mid \overrightarrow{BB'}) > 0$$

et soit $\sim \cos(\alpha) \, \|\nabla(f+g)_B\| \cdot \|\overrightarrow{BB'}\|$
où α l'angle entre la tangente au cercle en B et $\nabla(f+g)_B$
↳ T_B

ainsi,

$$(f+g)(B') = (f+g)(B) + \underbrace{(\nabla(f+g)_B \mid \overrightarrow{BB'})} + o(\|\overrightarrow{BB'}\|)$$

$\sim$ linéaire en $\|\overrightarrow{BB'}\|$
→ plus fort que le $o(\|\overrightarrow{BB'}\|)$

$$(f+g)(B') - (f+g)(B) = \cos(\alpha) \, \|\nabla(f+g)_B\| \cdot \|\overrightarrow{BB'}\| + o(\overrightarrow{BB'})$$

pour B' du bon côté et tendant vers B

D'où B pas optimal, car
$(f+g)(B') > (f+g)(B)$ pour un certain B'

(l'équivalent conserve le signe)

Ainsi, la seule manière d'avoir B optimal est d'avoir $\underline{\cos(\alpha) = 0}$ (condition nécessaire),

i.e.

$\nabla f_B + \nabla g_B$ normaux à T_B

i.e. $\nabla f_B + \nabla g_B$ colinéaires à R_B, rayon passant par B.

i.e. <u>C et A symétriques par rapport à R_B</u> (rappelons que ∇f_B et ∇g_B sont de norme 1)

i.e. $\underline{d(A,B) = d(B,C)}$

cqfd.

On a donc montré que l'optimal obtenu par compacité correspond nécessairement à un polygone régulier, d'où l'équivalence entre être régulier et maximiser le périmètre.