Question : pourquoi a-t-on $\arg(u_n)$ qui ne converge pas modulo 2π ?

C'est parceque

$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geqslant n_0$ et $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(u_{n_1}) - \arg(u_0) \leqslant \pi$

(pris non pas modulo 2π, mais au sens où $\arg(u_n) := \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$)

ce qui est incompatible avec une convergence modulo 2π.

Je ne m'étend pas sur les détails, car on peut en fait prouver mieux :

avec $R = \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$

on a que $\mathrm{Adh}(u) = R\,\mathbb{U}$, le cercle centré en O de rayon R.

Comme dans le cas réel, il suffit de montrer que,

$\forall x \in R\,\mathbb{U}, \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}$,
$\exists n_1 \geqslant n_0, \quad |x - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$.

i.e. $\forall \theta_0 \in [0; 2\pi], \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}$
$\exists n_1 \geqslant n_0, \quad |Re^{i\theta_0} - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$.

($\mathrm{Adh}(u) \subset R\,\mathbb{U}$ est clair)

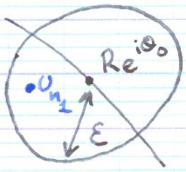
Cela sera une conséquence du fait que

$$\arg(u_{n+1}) - \arg(u_n) \longrightarrow 0$$

et sera en lien avec l'exercice classique :

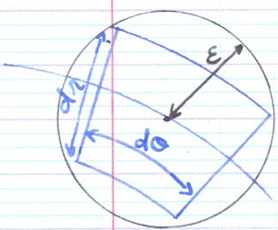
" si $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_{n+1} - v_n \longrightarrow 0) \Rightarrow Adh(v)$ intervalle"

On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta_0 \in [0; 2\pi[$.
il s'agit de trouver n_1 tel que



$$|Re^{i\theta_0} - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$$

On constate que l'on peut encastrer un bloc de forme "$drd\theta$" (pour les physiciens) dans la boule $B(Re^{i\theta_0}, \varepsilon)$



Ainsi, il suffit de trouver n_1 tel que

$$|R - |u_{n_1}|| \leqslant \frac{\varepsilon}{1000}$$
$$|\arg(u_{n_1}) - \theta_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{1000} \quad [2\pi]$$

(j'ai pris $\frac{1}{1000}$ pour ne pas me casser la tête)

$$\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{1000}$$

Comme $|u_n| \nearrow \longrightarrow R$,

$R = \sup(|u_n|)$,

on prend $m_1 \geqslant n_0$, $\forall n \geqslant m_1, \ \big|R - |u_n|\big| \leqslant \varepsilon'$

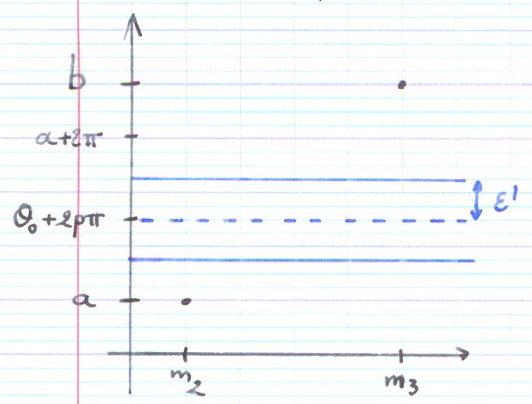
Ensuite, on prend $m_2 \geqslant m_1$,

$\forall n \geqslant m_2, \quad \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}$.

On considère $\sum_{k=1}^{m_2} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) = a$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$,

on dispose de $m_3 > m_2$, $\underbrace{\sum_{k=1}^{m_3} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)}_{b} > a + 2\pi$.



En allant de m_2 à m_3, on ne peut faire des sauts verticaux de plus de $\frac{\varepsilon'}{2}$, par hypothèse sur m_2.

On a donc $n_1 \in [\![m_2 ; m_3]\!]$, $|\arg(u_{n_1}) - \theta_0| \leqslant \varepsilon' \ [2\pi]$

Et comme $n_1 \geqslant m_1$,

↳ la condition sur le module

n_1 convient, i.e.

$|Re^{i\theta_0} - u_{n_1}| \leqslant \varepsilon$

(p l'unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $\theta + 2p\pi \in [a ; a+2\pi[$

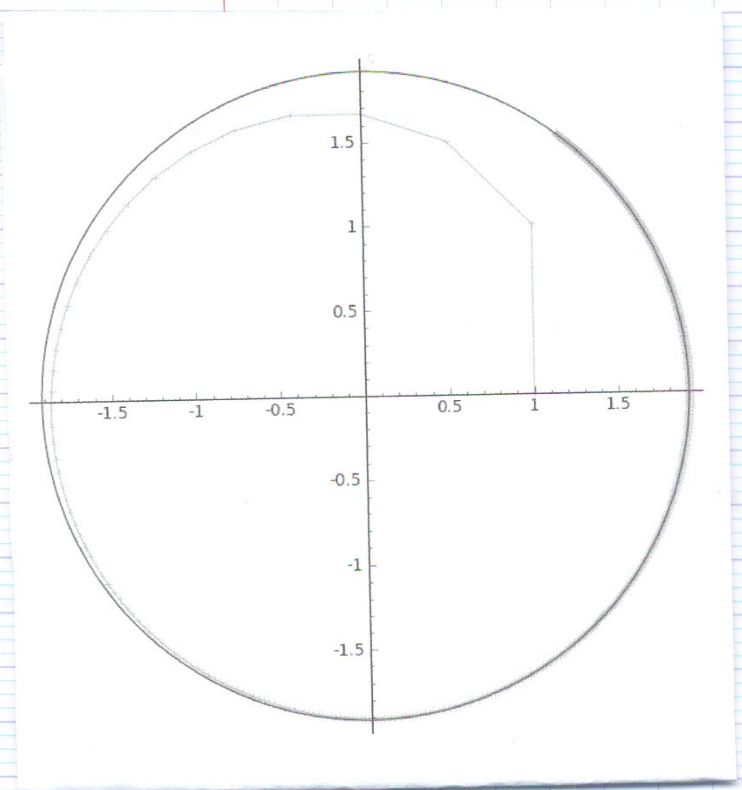
N.B.: si on veut faire une overdose de rigueur, on peut justifier l'existence de n_1 comme suit :

$$\alpha := \max \underbrace{\left\{ n \in [\![m_2 ; m_3]\!],\ \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) < \theta_0 + 2p\pi - \varepsilon' \right\}}_{\text{si c'est vide, par choix de } p \text{, c'est que } n_1 = m_2 \text{ convient}}$$

on constate alors que

$\alpha + 1 =: n_1$

convient.



Au cas où vous ne comprendriez rien à ce que j'ai écrit, pour vous aider à visualiser, voici les 1000 premières valeurs de v_n.

(pour faire un deuxième tour, il faudra v_n, où $n \# 10^5$)