Jean Steydy

Colles en MPSI 2, semaine n° 12

Exercice (Antoine Song) :

exhiber $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ bornée,
telle que, avec

$$\begin{cases} u_n^{(0)} = u_n \\ u_n^{(p+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k^{(p)} \end{cases} \quad (\forall p \in \mathbb{N})$$

(i.e. $u^{(p+1)}$ suite de Cesàro de $u^{(p)}$)

on ait

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u^{(p)} \text{ ne converge pas. et borné}$$

Résolution :

1ère idée : il suffit de prendre (u_n) à valeurs dans $\{-1; 1\}$, et, pour avoir par exemple que $u^{(1)}$ sans limite, faire comme suit

procédé (*) "- $u_1 := 1$; $(\rightarrow u_1^{(1)} = 1)$
- rajouter suffisemment de '-1' $(n_0 - 1)$ pour avoir $u_{n_0}^{(1)} \leqslant -\frac{1}{2}$
- rajouter suffisemment de '1' $(n_1 - n_0)$ pour avoir $u_{n_1}^{(1)} \geqslant \frac{1}{2}$

continuer ainsi."

2

En procédant de la sorte, on aura que $u^{(1)}$ va prendre une infinité de valeurs $\geqslant \frac{1}{2}$ et une infinité de valeurs $\leqslant -\frac{1}{2}$

$u^{(1)}$ ne saurait donc converger.

Ce petit préliminaire effectué, on essaie de généraliser pour avoir
"$\forall p$, $u^{(p)}$ ne saurait converger"

Comment faire ?

par exemple, fixons $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, supposons que
$$u^{(p)}_{n_0} \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Comment faire pour que $u^{(p)}_{n_1} \geqslant \frac{1}{2}$ pour un certain $n_1 > n_0$?

Il suffit d'ajouter suffisamment de '1' pour avoir $u^{(1)}_{m_1} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+1}}$

puis on "réitère" le procédé en l'appliquant à $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$: au bout d'un certain rang, $u^{(2)}_{m_2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+2}}$

idem $\Rightarrow$ $u^{(3)}_{m_3} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+3}}$

ainsi, à partir d'un certain rang, on aura bien $u^{(p)}_{m_p} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+p}} \geqslant \frac{1}{2}$

N.B. : on a exigé
$$v^{(r)}_{m_r} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+r}}$$
c'est parceque, par exemple, avec
$v_1 = -1$, $v_n = 1$ sinon,
on n'arrivera pas à avoir un $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $v^{(1)}_{n_0} \geq 1$.

Bien, ça, c'était une première idée qu'on a à l'oral, c'est très bien de l'avoir, mais réussir à expliciter une suite qui marche, c'est encore mieux. (vous noterez qu'en plus, cette 1ère idée est un peu difficile à énoncer clairement...)

Aussi, on a une deuxième idée, plus instructive : faire une analogie entre discret et continu, entre suites et fonctions, entre suites recurrentes et équations différentielles :
l'avantage du continu, c'est que l'on connaît les formules, et que l'on sait bien faire les calculs.

On introduit la dérivée discrète, Δ, par
$$(\Delta(v))_n = v_{n+1} - v_n.$$
on constate alors que Δ est à Σ ce que $\frac{d}{dx}$ est à $\int dx$:

on définit $\sum_k {}_a^b v_k = \sum_{k=1}^{b-1} v_k$

4

$$\text{et alors} \quad \sum_{k=a}^{b} (\Delta(u)) = \sum_{k=a}^{b-1} (u_{k+1} - u_k) \quad \leftarrow \text{important}$$

$$= u_b - u_a \quad (\text{télescopage})$$

$$\Delta\left(\sum_{k=0}^{n} u\right) = \sum_{k=0}^{n+1} u - \sum_{k=0}^{n} u$$

$$= u_n$$

$$\text{comme on a} \quad \int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f = f$$

tout est linéaire, passe à Re et Im.

Bien, maintenant qu'on a eu cette idée, comment s'en sert-on ?

Et bien, si on veut réussir à prouver que les $u^{(p)}$ divergent bien, il va falloir que les calculs soient simples. Autant poser comme condition que les calculs sont simples, et voir si on trouve une solution...

Peut-on rêver, et trouver u telle que u bornée non convergente, avec

$$u^{(1)} = u \quad ?$$

on aurait alors résolu le problème.

Cela reviendrait à avoir
(N.B. : on veut u sans limite, donc en particulier non constante)

$\frac{1}{n}\sum_1^n u = u_n$

i.e. $\int_1^x f = x f$

"i.e." $f = x f'$

i.e. $f = \lambda x$

analogie entre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\mathbb{R}^{[1;+\infty[}$, pour se rammener à un cas où on est bien entraîné

$\Rightarrow$ c'est mort, on n'est pas borné, on arrête de chercher.

On se dit qu'on a été trop optimiste, et si on essayait, pour rester borné, de "tourner", passer aux complexes ?

Après tout $x \mapsto e^x$ part à l'infini, mais $x \mapsto e^{ix}$ reste borné, tout en satisfaisant une équation différentielle très proche, et c'est cette dernière qui nous intéresse.

Ainsi, on essaie de poser comme condition

$u^{(1)} = \pm i \cdot u$.
↳ on sait pas encore.

si on la remplit, ce sera sûrement dans la poche.

6

$$\frac{1}{n}\sum_1^n u \quad = i\, u_n$$

on ne voit pas trop comment résoudre...
en passant en équa. diff,
et en continuité, ça nous fait

$$\frac{1}{x}\int_1^x f \quad = \pm i f$$

i.e. $$\int_1^x f \quad = \pm i x f$$

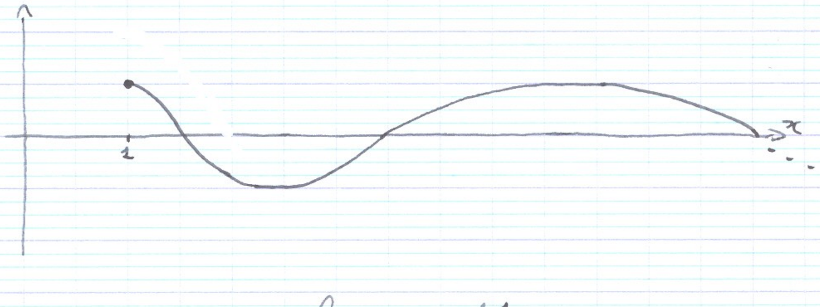
"i.e." $$f \quad = \pm i x f'$$ (si $f' \simeq \int f$, autant faire l'échange)

i.e. $$f' \quad = \pm \frac{1}{i}\frac{1}{x} f$$

on se décide pour un signe, disons $-$,
et on a

$$f' = \frac{i}{x} f$$

solution : x^i, i.e. $e^{i\ln(x)}$, de
partie réelle $\cos(\ln(x))$:



ça a une bonne tête, et correspond
bien à notre idée du 1°, i.e.
rajouter plein de -1, puis plein de 1, etc.

on se dit cette fois, on tient une bonne équa-diff. !

on repasse en discret :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{i}{n} u_n$$

i.e. $\quad u_{n+1} = \left(1+\frac{i}{n}\right) u_n$

ainsi, $\underline{\underline{u_n := \prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{i}{k}\right)}}$ a une bonne tête de candidat.

reste à "justifier" tout les tours de passe-passe qui nous ont enfin permis d'intuiter un candidat.

Avant tout, on vérifie si on est borné sans converger, sinon, ça sert à rien ☹.

<u>u bornée</u> : $\quad |u_n|^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k^2}\right) < +\infty$ ↳ (**)

<u>u ne converge pas</u> : $\arg(u_n) \equiv \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{k}\right)}_{\sim \frac{1}{k}}}_{\sim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n} \quad [2\pi]$

, diverge par sommation des o (exercice si pas dans le cours).

on notera l'analogie avec $e^{i \ln(x)}$

N.B. : (**) est un exercice classique : si $\sum |a_n| < +\infty$, $|\prod (1+a_n)| < +\infty$ (passer au log, sommation des o.)
comme $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$, on conclut.

Ok, maintenant, vu qu'on n'a pas vraiment $v^{(1)} = -iv$, comment calculer $v_n^{(1)} = ?$

$$v_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1} v_k$$

Comment calcule-t-on

$$\frac{1}{x}\int_1^x e^{i\ln(t)}\,dt \quad ?$$

$$\frac{1}{x}\int_1^x \overset{\overset{t}{\uparrow}}{1}\cdot \underset{\underset{\frac{i}{t}e^{i\ln(t)}}{\downarrow}}{e^{i\ln(t)}}\,dt = \frac{1}{x}\Big[t\cdot e^{i\ln(t)}\Big]_1^x - \frac{1}{x}\int_1^x t\cdot\frac{i}{t}\,e^{i\ln(t)}\,dt \qquad \text{(IPP)}$$

D'où

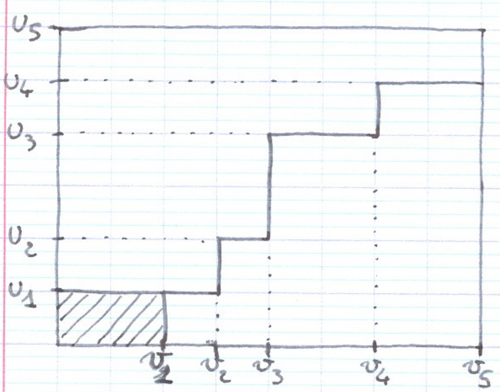
$$\frac{1}{x}\int_1^x e^{i\ln(t)}\,dt = \underbrace{\frac{1}{1+i}}_{C}\cdot\frac{1}{x}\left(x\,e^{i\ln(x)} - 1\right)$$

$$= \underbrace{C\,e^{i\ln(x)}}_{\text{“}\approx\text{”}\ e^{i\ln x}} - \underbrace{\frac{C}{x}}_{\xrightarrow{+\infty} 0}$$

(ainsi, comme $e^{i\ln(x)}$ borné sans convergence, $\frac{1}{x}\int_1^x e^{i\ln(t)}\,dt$ aussi, et on voit sans peine que les moyennes de Césaro successive ont la même propriété)

Mais comment faire une <u>IPP "discrète"</u> ?

On utilise la "tranformée d'Abel", qui en est l'analogue exact :



avec $(\tau(v))_n := v_{n+1}$,

$$\sum_a^b u_n (\Delta v)_n = [u_n v_n]_a^b - \sum_a^b \tau(v)_n \, \Delta u_n$$

cette formule se vérifie facilement par telescopage

interprétation :

$$u_5 v_5 - u_1 v_1 = \sum_{n=1}^{5} u_n \cdot (v_{n+1} - v_n) + \sum_{n=1}^{5} v_{n+1}(u_{n+1} - u_n)$$

et alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} \overset{\overset{k-1}{\uparrow}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ u_{k+1}-u_k \\ = \frac{i}{k} u_k}}{u_k} = \frac{1}{n} \left[(k-1) \quad u_k \right]_1^{n+1} - \sum_1^{n+1} \underbrace{k}_{(k+1)-1} \cdot \frac{i}{k} u_k$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{1}{1+i} u_{n+1} = \frac{1}{1+i} \underbrace{\frac{u_{n+1}}{u_n}}_{1+o(1)} \cdot \underbrace{u_n}_{O(1)} = \frac{1}{1+i} u_n + o(1)$$

Miracle !

$$u_n^{(p)} = \underbrace{\left(\frac{1}{1+i} \right)^p}_{\text{constante à } p \text{ fixé.}} \cdot u_n + o(1)$$

10

Ainsi, pour tout p, $v^{(p)}$ et $v^{(0)} = v$ ont le même comportement asymptotique (i.e. pas de convergence), en restant borné, ce qui permet de conclure :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{k}\right) \quad \text{diverge.}$$

et $\text{Ré}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{k}\right)\right)$ aussi.
ou Im.

<u>Morale</u> :

sur cet exercice, j'ai essayé d'illustrer quelques principes :

- faire des analogies et passer d'une vision à une autre permet, au pire d'avoir des idées et de meubler, et souvent de résoudre les problèmes sans trop bourriner et perdre son temps.

- les complexes, c'est plus simple que les réels, les calculs y sont aisés (c'est pour ça qu'ils existent d'ailleurs)

- le "continu", c'est pratique parceque dérivations et intégrations se font sans problème de décalage.

Voilà, j'aurais aussi pu rajouter la recherche de solutions en début d'exercice : connaissant la 1ère idée, il est "naturel" de penser directement à $\cos(\ln n)$...
et de retomber, via le passage par des équa. diff., sur la solution u_n exposée ici.