Exercices de mathématiques

Exce 1 : Théorème de Darboux

(le classique des classiques)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable

mq

f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

---

méthode 1 : avec les mains

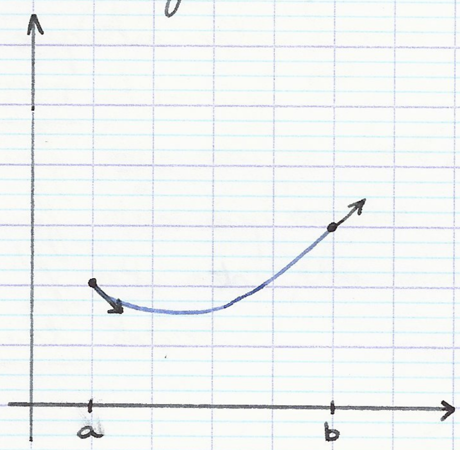
$a < b$, $f'(a) < f'(b)$ (par exemple)

on cherche $c \in]a;b[, f'(c) = \gamma \in]f'(a);f'(b)[$

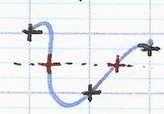
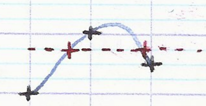
pour γ fixé

→ On se rammène au cas simple où

$f'(a) < 0 < f'(b)$ et $\gamma = 0$



Il suffirait de trouver un triplet de points tels que

 ou  (*)

car alors le TVI permet d'obtenir deux points distincts (en rouge)

où $f(x) = f(y)$ et $x < y$

→ par Rolles, on obtient l'existence de c.

L'existence du triplet équivaut à dire que f n'est ni croissante, ni décroissante, ce qui est vérifié.

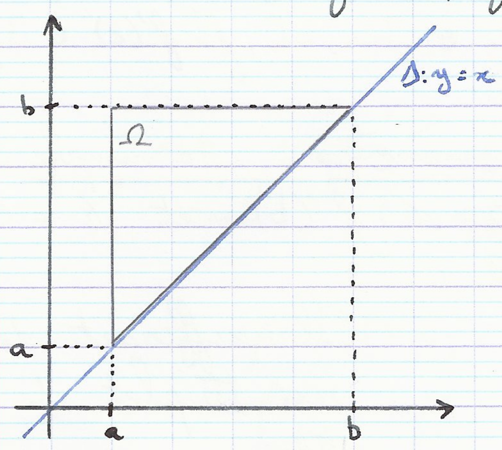
Puis, pour résoudre le cas général (i.e. γ quelconque) considérer

$$\tilde{f} = f - \gamma \, id$$

Bien, je n'ai pas beaucoup détaillé cette méthode car elle n'est pas très intéressante. Passons aux suivantes.

<u>méthode 2</u> : (pas efficace, mais amusante)

$$a < b, \quad f'(a) < f'(b),$$
$$\gamma \in \left]f'(a), f'(b)\right[\text{ fixé.}$$



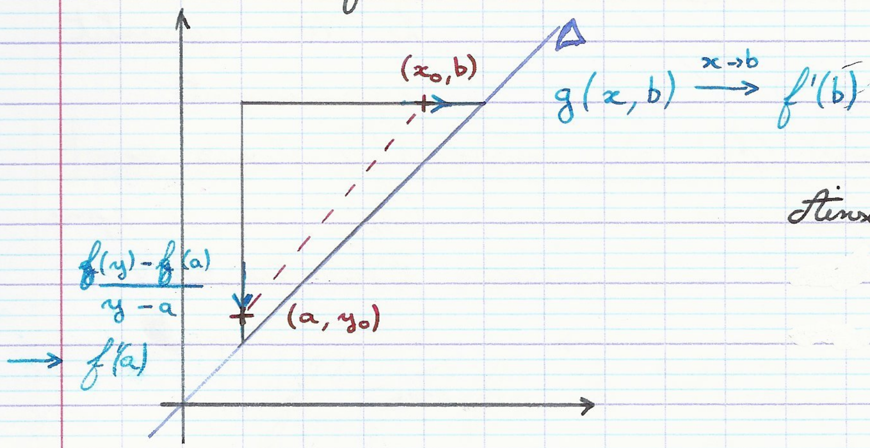
$\Omega := \{(x,y) \in [a;b]^2, \; x < y\}$

l'idée est que
« qui dit <u>TVI</u>
dit fonction <u>$\mathcal{C}^0$</u>
qui dit fonction <u>$\mathcal{C}^0$</u>
et <u>f'</u>
dit <u>taux d'accroissement</u> »

Ainsi, on considère

$$g : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{array}$$

Par définition, on a

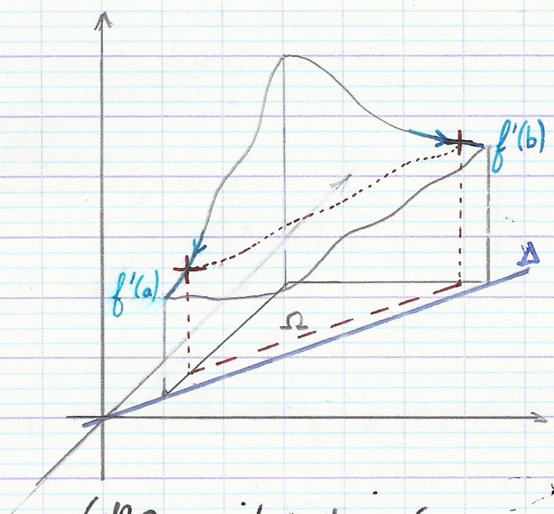


Ainsi, par définition de la limite, on dispose des points

(a, y_0) et (x_0, b)

avec

$$f'(a) \leqslant g(a, y_0) < \gamma < g(x_0, b) \leqslant f'(b)$$

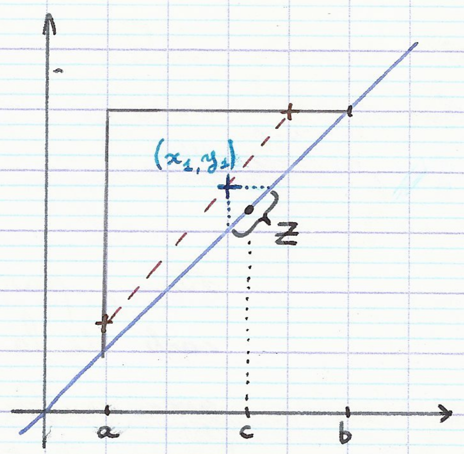


Pour appliquer le TVI, l'idée est alors de regarder une <u>coupe</u> de la <u>nappe contenue</u> g (qui n'est pas définie sur Δ) le long du chemin en pointillé rouge.

(N.B. : j'ai dessiné une fonction f $\mathcal{C}^1$, pour plus de clarté, même si l'exercice n'a alors plus aucun intérêt)

On trouve alors (TVI) (x_1, y_1) tel que $\underline{g(x_1, y_1) = \gamma}$,

et le TAF permet de conclure (voir dessin page suivante)



le TAF garantit exactement l'existence de (c,c) sur la zone $Z \subset]a;b[$

Pour une argumentation rigoureuse de l'existence de (x_1, y_1) :

$$h : [0;1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto g\big((1-t)a + t x_0,\ (1-t) y_0 + tb\big)$$

est continue (cf. formule pour g),
vaut $g(a, y_0) < \gamma$ en 0,
$g(x_0, b) > \gamma$ en 1

$\to$ par TVI, on a t_1, $h(t_1) = \gamma$,
puis
$$(x_1, y_1) := \big((1-t_1)a + t_1 x_0,\ (1-t_1) y_0 + t_1 b\big)$$

L'idée derrière tout cela, c'est que, si vous regardez x et y comme deux curseurs sur l'axe des abscisses, vous voyez bien que, quand $x = a$, $y \simeq a$,
le taux d'accroissement est $\simeq f'(a)$
et — $x \simeq b$, $y = b$,
— — —'— — $\simeq f'(b)$