Analyse réelle

F. Golse

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Banach

1.1 Rappels sur les espaces complets

Soit (X, d) espace métrique et (x_n) suite de X.

Définition 1.1.1 *La suite (x_n) est de Cauchy si elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes*
a) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N(\epsilon)$ tq. $d(x_m, x_n) < \epsilon$ pour tous $m, n \geq N(\epsilon)$;
b) $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ pour $n \to \infty$ uniformément en $p \geq 0$;
c) $\mathrm{diam}\{x_n \,|\, n \geq N\} \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy. La réciproque est fausse en général (prendre $X =]0, 1[$ et $x_n = 2^{-n}$).

Proposition 1.1.2 *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.*

Démonstration. Soit (x_n) de Cauchy dans (X, d) et l une valeur d'adhérence de (x_n). Soit $\epsilon > 0$; il existe donc $N(\epsilon) > 0$ tq.

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \text{ pour tous } m, n \geq N(\epsilon) .$$

De plus, comme l est une valeur d'adhérence de (x_n),

$$\text{il existe } m \geq N(\epsilon) \text{ tq. } d(x_m, l) < \epsilon .$$

Donc, pour tout $n \geq N(\epsilon)$, on a

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, l) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon ,$$

et donc $x_n \to l$ pour $n \to \infty$. ■

Définition 1.1.3 *Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

L'intérêt principal de la notion de suite de Cauchy est que, dans un espace complet, on peut vérifier qu'une suite est convergente sans en connaître la limite.

Pour vérifier qu'un espace est complet, on se ramène souvent à montrer qu'il est fermé dans un espace plus gros qu'on sait être complet.

Proposition 1.1.4 *Si (X, d) est complet et $Y \subset X$. Alors (Y, d) est complet ssi Y est fermé dans X.*

Démonstration. Supposons que (Y, d) est complet, et soit $l \in \overline{Y}$. Il existe donc (y_n) suite de Y telle que $y_n \to l$ pour $n \to \infty$. Comme la suite (y_n) est convergente dans X, c'est une suite de Cauchy ; comme (Y, d) est complet, (y_n) converge dans Y : ainsi $l \in Y$, d'où Y est fermé.

Réciproquement, supposons Y fermé dans X et soit (y_n) suite de Cauchy dans Y ; comme c'est une suite de Cauchy dans (X, d) complet, elle converge vers une limite $l \in X$. Comme $y_n \in Y$ et Y est fermé, $l \in Y$, cqfd. ■

L'une des principales applications de la notion d'espace complet à l'Analyse est le théorème du point fixe.

Définition 1.1.5 *Soit (X, d) métrique et $k \geq 0$. Une application $f : X \to X$ est k-lipschitzienne si*

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \text{ pour tous } x, y \in X\,.$$

Théorème 1.1.6 *Soit (X, d) complet et $f : X \to X$ k-lipschitzienne avec $k < 1$. Alors f admet un point fixe unique.*

Démonstration. Si x et x' sont deux points fixes de f, on a

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq k d(x, x')\,.$$

Comme $k < 1$, on a $d(x, x') = 0$ donc $x = x'$, ce que f a au plus un point fixe.

Soit $x_0 \in X$ quelconque ; on définit une suite (x_n) par récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \geq 0\,.$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1)\,;$$

donc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (k^n + \ldots + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)\,. \end{aligned}$$

Comme $k \in [0, 1[$, ceci montre que

$$d(x_n, x_{n+p}) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \text{ uniformément en } p \geq 0\,,$$

et donc que la suite (x_n) est de Cauchy. Comme X est complet, elle converge donc vers une limite $x \in X$. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant x_n, on trouve que $f(x) = x$. ■

1.2 Rappels sur les espaces métriques compacts

Les espaces métriques compacts sont ceux qui sont "approximativement finis".

Définition 1.2.1 *Un espace métrique* (X, d) *est compact ssi toute suite de points de* X *admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous-suite convergente).*

Pour démontrer qu'un espace métrique est compact, la notion suivante est souvent utile

Définition 1.2.2 *Un espace métrique* (X, d) *est précompact ssi, pour tout* $\epsilon > 0$*,* X *admet une recouvrement fini par des boules de rayon* ϵ*.*

En effet, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.2.3 *Un espace métrique* (X, d) *est compact ssi il est précompact et complet.*

Démonstration. Si (X, d) est compact, il est complet : en effet, toute suite de Cauchy de X, ayant au moins une valeur d'adhérence, est forcément convergente (voir Proposition 1.1.2).

Supposons que X n'est pas précompact. Il existe donc $r > 0$ pour lequel X ne peut pas être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r.

Construisons une suite infinie (x_n) de points de X telle que

$$d(x_m, x_n) \geq r \text{ pour tous } m, n \in \mathbf{N} \text{ tq. } m \neq n\,.$$

On part de $x_0 \in X$ quelconque ; il existe forcément $x_1 \in X$ tel que $d(x_1, x_0) \geq r$: autrement $X \subset B(x_1, r)$.

Supposons construits $x_1, \ldots, x_n \in X$ tq. $d(x_i, x_j) > r$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ distincts. Il existe forcément $x_{n+1} \in X$ tq.

$$d(x_{n+1}, x_i) \geq r\,; \text{ autrement } X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)\,.$$

La suite (x_n) ne peut contenir aucune sous-suite de Cauchy, et donc aucune sous-suite convergente, ce qui contredit l'hypothèse que (X, d) est compact.

Réciproquement, supposons que (X, d) est précompact et complet : on va montrer que toute suite (x_n) de X admet une sous-suite qui est de Cauchy. En effet, en prenant $\epsilon = 2^{-k}$, on voit que, pour tout $k \geq 1$, X admet un recouvrement fini par des boules de rayon 2^{-k}.

Par le principe des tiroirs, l'une des boules de rayon $\frac{1}{2}$ contient une infinité de x_n : on obtient ainsi une suite extraite $(x_{\phi_1(n)})$, où $\phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est croissante stricte, à valeurs dans l'une des boules de rayon $\frac{1}{2}$.

En appliquant de nouveau le principe des tiroirs, on voit que l'une des boules de rayons $\frac{1}{4}$ contient une infinité de termes de la suite extraite $(x_{\phi_1(n)})$; en extrayant à nouveau une sous-suite, il existe donc $\phi_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante stricte tq. $(x_{\phi_1 \circ \phi_2(n)})$ soit à valeurs dans l'une des boules de rayon $\frac{1}{4}$.

Par récurrence, on construit ainsi, pour tout $k \geq 1$, des applications croissantes strictes $\phi_j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pour $j = 1, \ldots, k$ et une suite extraite $(x_{\phi_1 \circ \ldots \phi_k(n)})$ à valeurs dans l'une des boules de rayon 2^{-k}.

Notons $\Phi_N = \phi_1 \circ \ldots \phi_N$; on a donc

$$d(x_{\Phi_N(m)}, x_{\Phi_N(n)}) \leq \frac{1}{2^{N-1}}\,, \text{ pour tous } m, n \geq 1\,.$$

Considérons maintenant la suite extraite diagonale $(x_{\Phi_N(N)})$: on a

$$d(x_{\Phi_N(N)}, x_{\Phi_M(M)}) \leq \frac{1}{2^{N-1}}$$

pour tout $M > N$, puisque $\phi_M = \phi_{N+1} \circ \ldots \circ \phi_M(M)$. Cette suite extraite diagonale est donc de Cauchy, cqfd. ■

Voici une conséquence immédiate de l'équivalence ci-dessus :

Corollaire 1.2.4 *Soit (X, d) espace métrique complet. Pour tout $A \subset X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\overline{A}$ est compact dans (X, d) ;

b) A est précompact.

Pour démontrer qu'une partie d'un espace métrique est précompacte, on se ramène la plupart du temps à montrer que cette partie peut être approchée par une suite de parties que l'on sait déjà précompactes.

Corollaire 1.2.5 *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K_\epsilon \subset X$ précompact tq.*

$$d(x, K_\epsilon) < \epsilon \textit{ pour tout } x \in A\,.$$

Alors A est précompact.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; puisque K_ϵ est précompact, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$K_\epsilon \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} B(x_j, \epsilon)\,.$$

Donc

$$A \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} B(x_j, 2\epsilon)\,,$$

cqfd. ■

Voici quelques exemples d'espaces métriques compacts : le segment fermé $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, le pavé fermé $[0, 1]^N \subset \mathbf{R}^N$, la sphère unité

$$\mathbf{S}^{N-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid x_1^2 + \ldots + x_N^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^N\,.$$

Plus généralement :

Proposition 1.2.6 *Les parties compactes de $\mathbf{R}^N$ (ou de $\mathbf{C}^N$) sont les parties fermées et bornées.*

Le résultat suivant est un corollaire immédiat de la définition.

Proposition 1.2.7 *Si (K, d) est un espace métrique compact et $F \subset K$ est fermé dans K, alors (F, d) est compact.*

On rappelle le résultat fondamental suivant (également conséquence triviale de la définition) :

Proposition 1.2.8 *L'image d'un espace métrique compact par une application continue est compacte.*

En particulier, soit (K, d) espace métrique compact non vide et $f : K \to \mathbf{R}$. Alors

$$\inf_{x \in K} f(x) \text{ et } \sup_{x \in K} f(x) \text{ sont atteints.}$$

1.3 Espaces de Banach : généralités et premiers exemples

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, sauf mention du contraire.

Définition 1.3.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (evn) complet.*

Voici un corollaire immédiat de la proposition 1.1.4 et de la définition ci-dessus :

Corollaire 1.3.2 *Tout sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1.3.3 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.3.4 *Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit donc E evn de dimension finie et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E ; notons, pour tout $x \in E$, $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans cette base, et

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| .$$

La norme $x \mapsto \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty$ étant équivalente à la norme de E, on obtient un isomorphisme bi-continu $E \ni x \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$; comme $\mathbf{K}^n$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ est complet, E est complet. ∎

1.3.1 Exemples d'espaces de Banach

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions, importants en Analyse.

Soit F un espace de Banach, dont on note $|\cdot|_F$ la norme (par exemple, F est un evn de dimension finie, $\mathbf{K}^N$ ou même $\mathbf{K}$).

- $B(A,F)$, l'espace des applications bornées de $A \to F$ où A est un ensemble, muni de la norme du sup :
$$\|f\|_B = \sup_{x\in A} |f(x)|_F \,.$$
- $C_b(X,F)$, l'espace des applications continues bornées de (X,d), espace métrique, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.
- $C_0(E,F)$, l'espace des applications continues tendant vers 0 à l'infini de E, evn de dimension finie, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.
- $C(K,F)$, l'espace des applications continues de (K,d), espace métrique compact, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.

La norme du sup $\|\cdot\|_B$ définit sur chacun de ces espaces la topologie de la convergence uniforme des applications à valeurs dans F.

Proposition 1.3.5 *L'espace $B(A,F)$ muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$ est un Banach. L'espace $C_b(X,F)$ est fermé dans $B(X,F)$; l'espace $C_0(E,F)$ est fermé dans $B(E,F)$. Enfin $C(K,F) = C_b(K,F)$.*

Démonstration. Soit (f_n) suite de Cauchy dans $B(A,F)$: pour tout $\epsilon > 0$,
$$\|f_n - f_{n+k}\|_B = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_{n+k}(x)|_F \to 0$$
lorsque $n \to +\infty$, uniformément en $k \geq 0$. Autrement dit, il existe une suite $\epsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$ tq.
$$\sup_{k\geq 0} \|f_n - f_{n+k}\|_B = \sup_{\substack{k\geq 0\\ x\in A}} |f_n(x) - f_{n+k}(x)|_F \leq \epsilon_n \,.$$
En particulier, pour tout $x \in A$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, qui est complet. Cette suite converge donc vers une limite que nous notons $f(x)$. Or on sait que
$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)|_F < \epsilon_n \text{ pour tous } n,k \geq 0 \text{ et tout } x \in A\,;$$
en passant à la limite pour $k \to +\infty$, on trouve que
$$|f_n(x) - f(x)|_F \leq \epsilon_n \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et tout } x \in A\,;$$
autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$\|f_n - f\|_B = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|_F \leq \epsilon_n \,.$$

D'abord, ceci montre que, pour n'importe quelle valeur de n

$$|f(x)|_F \leq \|f_n - f\|_B + \|f_n\|_B \text{ pour tout } x \in A\,,$$

de sorte que $f \in B(A, F)$.

Puis $\|f_n - f\|_B \to 0$, ce qui signifie que $f_n \to f$ pour $n \to \infty$.

L'espace $C_b(X, F)$ est fermé dans $B(X, F)$, car une limite uniforme de fonctions continues est continue ; $C(K, F) = C_b(K, F)$ car toute fonction continue sur un compact y est bornée (et atteint ses bornes).

Enfin $C_0(E, F)$ est fermé dans $C_b(E, F)$: en effet supposons que (f_n) est une suite de $C_0(E, F)$ tq. $f_n(x) \to f(x)$ uniformément en $x \in E$ pour $n \to \infty$. Donc, pour tout $x \in E$, on a

$$|f(x)|_F \leq |f_n(x)|_F + \|f_n - f\|_B\,.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque ; il existe donc $N(\epsilon)$ tq.

$$\|f_n - f\|_B < \epsilon \text{ pour tout } n \geq N(\epsilon)\,.$$

En particulier, pour $n = N(\epsilon)$, on a

$$|f(x)|_F \leq |f_{N(\epsilon)}(x)|_F + \epsilon\,.$$

En passant à la limite supérieure pour $|x|_E \to \infty$, on trouve que

$$\overline{\lim_{|x|_E \to \infty}} |f(x)|_F \leq \overline{\lim_{|x|_E \to \infty}} |f_{N(\epsilon)}(x)|_F + \epsilon = \epsilon\,.$$

Comme $\epsilon > 0$ est quelconque, on trouve finalement que

$$\overline{\lim_{|x|_E \to \infty}} |f(x)|_F = 0$$

ce qui implique que $f(x) \to 0$ pour $|x|_E \to \infty$. ■

Voici d'autres exemples d'espaces de Banach, cette fois des espaces de suites :

– on note l'espace des suites multiples bornées

  $$\ell^\infty(\mathbf{Z}^N) = \{x : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{K} \,|\, \sup_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)| < \infty\}\,,$$

  et, pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$,

  $$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)| < \infty\,.$$

  Alors $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach. (En fait, $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N) = B(\mathbf{Z}^N, \mathbf{K})$ et $\|\cdot\|_\infty$ coïncide avec $\|\cdot\|_B$).

– on note l'espace des suites tendant vers 0 à l'infini

  $$c_0(\mathbf{Z}^N) = \{x : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{K} \,|\, x(k) \to 0 \text{ pour } |k| \to \infty\}\,.$$

  L'espace $c_0(\mathbf{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$: c'est donc également un espace de Banach.

– pour $1 \leq p < \infty$, on note l'espace des suites p-sommables

$$\ell^\infty(\mathbf{Z}^N) = \left\{ x : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{K} \mid \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)|^p < +\infty \right\}.$$

On vérifie que

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)|^p \right)^{1/p}$$

définit bien une norme sur $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$ (le seul point non trivial, pour $p > 1$ est l'inégalité triangulaire qui, dans ce cas particulier, porte le nom d'inégalité de Minkowski, que nous établirons plus loin). Alors $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.
Deux cas particuliers importants de ces espaces, que l'on rencontre souvent en Analyse de Fourier, sont $\ell^1(\mathbf{Z}^N)$ et $\ell^2(\mathbf{Z}^N)$.

1.3.2 Séries dans les espaces de Banach

On sait que dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, les séries absolument convergentes sont convergentes ; on sait également qu'une série normalement convergente de fonctions continues est uniformément convergente vers une limite continue.

Plus généralement

Définition 1.3.6 *Soit E evn et (x_n) suite de E. On dit que la série*

$$\sum_{n \geq 0} x_n \text{ est convergente}$$

ssi la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \text{ est convergente.}$$

On dit que la série

$$\sum_{n \geq 0} x_n \text{ est normalement convergente}$$

ssi la suite des sommes partielles

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty .$$

Proposition 1.3.7 *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration. En effet, si la série

$$\sum_{n\geq 0} x_n \text{ est normalement convergente}$$

alors, pour tout $p \geq 0$

$$\|S_{N+p} - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|x_n\| \leq \sum_{n\geq N+1} \|x_n\| = R_N \to 0$$

comme reste d'une série convergente. Ainsi la suite (S_N) est de Cauchy, et donc convergente puisque l'espace ambiant est un Banach. ■

En appliquant ce résultat aux espaces de fonctions continues $C_b(X, \mathbf{K}^N)$, $C_0(E, \mathbf{K}^N)$, $C(K, \mathbf{K}^N)$ présentés ci-dessus, on retrouve les résultats classiques sur la convergence normale et uniforme des séries de fonctions.

La réciproque de cette proposition est également vraie :

Proposition 1.3.8 *Un evn où toute série normalement convergente est convergente est un espace de Banach*

Démonstration. Soit (x_n) suite de Cauchy de E ; nous allons construire une sous-suite de (x_n) qui converge. D'après la Proposition 1.1.2, tout la suite (x_n) sera donc convergente.

Puisque (x_n) est de Cauchy, il existe $N_1 \geq 1$ tq.

$$\|x_n - x_m\| \leq \tfrac{1}{2} \text{ pour tous } m, n \geq N_1 \, .$$

Puis il existe $N_2 > N_1$ tq.

$$\|x_n - x_m\| \leq \tfrac{1}{4} \text{ pour tous } m, n \geq N_2 \, .$$

Par récurrence, on construit une suite croissante d'entiers $N_1 < N_2 < \dots$ telle que

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k} \text{ pour tous } m, n \geq N_k \, .$$

En particulier

$$\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \leq 2^{-k} \, .$$

La série

$$\sum_{k\geq 1} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$$

étant normalement convergente, elle admet une limite dans E, que nous noterons S. De plus, cette série est télescopique :

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) = x_{N_j} - x_{N_1}$$

de sorte que

$$x_{N_j} \to x_{N_1} + S \text{ lorsque } j \to \infty \, .$$

Ainsi (x_n) admet une sous-suite convergente, cqfd. ■

1.4 Compacité et espaces de Banach

Une différence topologique fondamentale entre evn de dimension finie et evn de dimension infinie réside dans la caractérisation des parties compactes.

Théorème 1.4.1 *Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Comme on l'a déjà dit, si E est un evn de dimension N, il existe un isomorphisme bicontinu de E sur $\mathbf{K}^N$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour lequel le résultat est déjà connu, puisque c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass.

En revanche

Théorème 1.4.2 (F. Riesz) *Dans un evn de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte.*

Commençons par la remarque suivante :

Lemme 1.4.3 *Soit F fermé dans un espace métrique (X, d), et $x \in X \setminus F$. Alors*

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y) > 0\,.$$

Démonstration du lemme. En général, l'inf n'est pas atteint. Mais il existe $y_n \in F$ tel que $d(x, y_n) \to d(x, F) \geq 0$. Si $d(x, F) = 0$, alors $d(x, y_n) \to 0$ pour $n \to \infty$. Donc $y_n \to x$ pour $n \to \infty$; comme $y_n \in F$ et F est fermé, $x \in F$. ■

Passons maintenant à la preuve du théorème de Riesz.

Démonstration. Soit E evn de dimension infinie : on peut donc construire par récurrence une famille libre $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Posons $E_n = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour tout $n \geq 1$, on va construire

$$x_{n+1} \in E_{n+1} \text{ tel que } \|x_{n+1}\| = 1 \text{ et } d(x_{n+1}, E_n) > \tfrac{1}{2}\,.$$

En effet $E_n \neq E_{n+1}$, donc il existe $v_{n+1} \in E_{n+1} \setminus E_n$. Donc $d(v_{n+1}, E_n) = r > 0$. Il existe donc $w_n \in E_n$ tq.

$$r \leq \|v_{n+1} - w_n\| < 2r\,.$$

Posons

$$x_{n+1} = \frac{v_{n+1} - w_n}{\|v_{n+1} - w_n\|}\,;$$

$x_{n+1} \in E_{n+1}$ car $E_n \subset E_{n+1}$ et, pour tout $z \in E_n$,

$$\|x_{n+1} - z\| = \frac{\|v_{n+1} - (w_n + \|v_{n+1} - w_n\| z)\|}{\|v_{n+1} - w_n\|} \geq \frac{r}{2r} = \tfrac{1}{2}\,,$$

car $w_n + \|v_{n+1} - w_n\| z \in E_n$ et $d(v_{n+1}, E_n) = r$.

En particulier, la suite (x_n) ainsi construite vérifie

$$x_n \in \overline{B(0,1)} \text{ et } \|x_m - x_n\| \geq \tfrac{1}{2} \text{ pour tous } m, n \geq 1 \text{ tq. } m \neq n\,.$$

Donc cette suite n'admet aucune sous-suite qui soit de Cauchy, et donc a fortiori aucune sous-suite convergente. ■

Dans un espace de Banach de dimension infinie, on ne dispose pas de critère général de compacité.

Voici toutefois un exemple canonique de partie compacte dans un espace de dimension infinie. Soient un entier $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$; on choisit une application

$$q : \mathbf{Z}^N \to [1, +\infty[\text{ telle que } q(k) \to \infty \text{ pour } |k| \to \infty \,.$$

Posons

$$C(q) = \{x \in \ell^p(\mathbf{Z}^N) \,|\, qx \in \ell^p(\mathbf{Z}^N) \text{ et } \|qx\|_p \leq 1\} \,.$$

L'ensemble ainsi construit s'appelle un "cube de Hilbert".

Proposition 1.4.4 *L'ensemble $C(q)$ est compact dans $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$.*

Démonstration. D'abord, vérifions que $C(q)$ est fermé dans $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$: soit (x_n) suite de $C(q)$ telle que $\|x_n - x\|_p \to 0$. Alors, pour tout $R > 0$, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x_n(k)|^p\right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p} \\ &\leq 1 + \|x_n - x\|_p \sup_{|k|\leq R} q(k) \,.\end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette inégalité ne dépend pas de n ; en passant à la limite en $n \to +\infty$ dans le second membre à R fixé, on trouve que

$$\left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq 1 \,;$$

puis, en passant au sup en $R > 0$, on trouve que

$$\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^N} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq 1 \,,$$

d'où $x \in C(q)$. Ainsi, $C(q)$ est une partie fermé du Banach $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$: donc $C(q)$ est complet.

Montrons maintenant que $C(q)$ est précompact.

Soit $\epsilon > 0$; puisque $q(k) \to \infty$ pour $|k| \to \infty$, il existe $R > 0$ tel que

$$\text{pour tout } k \in \mathbf{Z}^N \text{ tq. } |k| > R \,, \quad q(k) > \frac{1}{\epsilon} \,.$$

Pour $R > 0$ ainsi choisi, considérons maintenant

$$C_R(q) = \{x \in C(q) \,|\, x(k) = 0 \text{ pour } |k| > R\}\,.$$

Comme $q \geq 1$, $C_R(q)$ est contenu dans la boule unité du sous-espace

$$\ell^p_R(\mathbf{Z}^N) = \{x \in \ell^p(\mathbf{Z}^N) \,|\, x(k) = 0 \text{ pour } |k| > R\}\,,$$

qui est de dimension finie — en fait

$$\ell^p_R(\mathbf{Z}^N) \simeq \mathbf{K}^D$$

où D est le nombre d'éléments $k \in \mathbf{Z}^N$ de norme $|k| \leq R$. Donc $C_R(q)$ est précompact

Or, pour tout $x \in C(q)$, notons x^R la suite définie par

$$x^R(k) = x(k) \text{ si } |k| \leq R\,, \quad x^R(k) = 0 \text{ si } |k| > R\,.$$

Clairement

$$x^R \in C_R(q) \text{ si } x \in C(q)\,.$$

De plus, par définition de R

$$\|x - x^R\|_p = \left(\sum_{|k|>R} |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon \left(\sum_{|k|>R} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon \|qx\|_p \leq \epsilon\,.$$

On vient donc de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ et une partie précompacte $C_R(q)$ de $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$ tq.

$$\text{pour tout } x \in C(q) \text{ on a } d(x, C_R(q)) < \epsilon\,.$$

D'après le Corollaire 1.2.5, $C(q)$ est précompact, cqfd. ∎

Un autre exemple très important de critère de compacité en Analyse est le théorème d'Ascoli.

Définition 1.4.5 *Soit (K, d) un espace métrique et F un evn. On dit qu'une partie $A \subset C(K, F)$ est équicontinue si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,*

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon \textit{ pour tout } x, y \in K \textit{ tq. } d(x, y) < \alpha(\epsilon)\,.$$

Voici un exemple de partie équicontinue d'un usage très fréquent en Analyse : soient $L > 0$ et F un evn. Soit $c > 0$; on pose

$$A_c = \{f \in C^1([0, L], F) \,|\, \sup_{0 \leq x \leq L} \|f'(x)\|_F \leq c\}\,.$$

Alors, pour tout $f \in A_c$, $x, y \in [0, L]$

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq c|x - y| < \epsilon \text{ dès que } |x - y| \leq \alpha(\epsilon) := \tfrac{\epsilon}{c}$$

De façon plus générale, le même argument montre qu'étant donné $k > 0$, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de $[0, L]$ dans F est équicontinu.

Théorème 1.4.6 (Ascoli) *Soient (K, d) un espace métrique compact et F un espace de Banach. Soit $A \subset C(K, F)$; pour tout $x \in K$, on note*

$$A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}\,.$$

Supposons que

a) pour tout $x \in K$, $\overline{A(x)}$ est compact dans F ;

b) A est équicontinue en tout point de K.

Alors $\overline{A}$ est compact dans $C(K, F)$ pour la norme du sup.

Démonstration. Il suffit de montrer que A est précompact.

Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha(\epsilon) > 0$ le module d'équicontinuité associé pour A.

Comme K est compact, il existe un recouvrement fini de K par des boules de rayon $\alpha(\epsilon)$:

$$K \subset \bigcup_{1 \le i \le M} B_K(x_i, \alpha(\epsilon))\,, \text{ avec } x_1, \ldots, x_M \in K\,.$$

Les ensembles $A(x_i)$ sont précompacts pour $i = 1, \ldots, M$; donc, pour tout $i = 1, \ldots, M$, on a

$$A(x_i) \subset \bigcup_{1 \le j \le N} B_F(y_{i,j}, \epsilon)\,, \text{ avec } y_{i,1}, \ldots, y_{i,N} \in F\,.$$

A toute application $\phi : \{1, \ldots, M\} \to \{1, \ldots, N\}$, on associe

$$B_\phi = \{f \in A \mid f(x_i) \in B_F(y_{i,\phi(i)}, \epsilon)\,,\ i = 1, \ldots, M\}\,.$$

Clairement

$$A \subset \bigcup_{\phi:\, \{1,\ldots,M\} \to \{1,\ldots,N\}} B_\phi\,;$$

d'autre part, la famille des B_ϕ compte au plus N^M éléments — certains B_ϕ peuvent être vides.

Enfin, soient $f, g \in B_\phi$ quelconques, et soit $x \in K$. Forcément x appartient à l'une des boules couvrant K, disons à $B_K(x_i, \alpha(\epsilon))$: alors

$$\|f(x) - g(x)\|_F \le \|f(x) - f(x_i)\|_F + \|f(x_i) - g(x_i)\|_F + \|g(x_i) - g(x)\|_F \le \epsilon + 2\epsilon + \epsilon = 4\epsilon\,.$$

En effet, les deux termes extrêmes du membre de droite de la première inégalité sont majorés par ϵ par équicontinuité de A ; et comme f et g appartiennent à B_ϕ, on a

$$f(x_i) \text{ et } g_(x_i) \in B_F(y_{i,\phi(i)}, \epsilon)\,, \text{ d'où } \|f(x_i) - g(x_i)\|_F < 2\epsilon\,.$$

Donc

$$\sup_{x \in K} \|f(x) - g(x)\|_F < 4\epsilon \text{ pour tout } (f, g) \in B_\phi \times B_\phi\,,$$

ce qui veut dire que

$$\operatorname{diam} B_\phi \le 4\epsilon\,.$$

En conclusion, pour tout $\epsilon > 0$, on a construit un recouvrement de A par au plus N^M ensembles B_ϕ de diamètre au plus 4ϵ, cqfd. ■

1.5 Espaces d'applications linéaires.

Soient E et F deux evn, et $T : E \to F$ une application linéaire.

Proposition 1.5.1 *L'application linéaire T est continue de E dans F ssi elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*
a) T est continue en 0 ;
b) T est bornée sur la boule unité de E ;
c) T est bornée sur la sphère unité de E ;
d) il existe $C > 0$ tq. pour tout $x \in E$, on a

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E .$$

Démonstration. Clairement b) implique c) ; d'autre part, c) implique d) avec $C = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$ puisque, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\left\| T \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F = \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C .$$

Ensuite d) implique que T est C-lipschitzienne de E dans F, donc continue (et même uniformément continue). Elle vérifie donc a).

Il reste donc à vérifier que a) implique b).

Soit donc $\epsilon > 0$; puisque T est continue en 0, il existe $\alpha > 0$ tq

$$\|Tx\|_F < \epsilon \text{ pour tout } x \in E \text{ tq.} \|x\|_E \leq \alpha .$$

Donc, pour tout $u \in \overline{B(0,1)}$, on a $\|\alpha u\|_E \leq \alpha$ et de sorte que

$$\|Tu\|_F \leq \frac{\epsilon}{\alpha} ,$$

ce qui établit b). ■

On remarque qu'on n'a pas utilisé la compacité de la boule unité de E — propriété qui est fausse en dimension infinie d'après le théorème de Riesz.

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On appelle souvent "opérateurs bornés de E dans F" les éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace $\mathcal{L}(E,E)$.

Définition 1.5.2 *La norme de T, notée $\|T\|$, est la meilleure constante C dans le d) ci-dessus ; autrement dit*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|z\|_E=1} \|Tz\|_F .$$

On vérifie que $T \mapsto \|T\|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$. Lorsqu'il y a risque d'ambiguité, on notera aussi cette norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Proposition 1.5.3 *Lorsque F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach.*

Démonstration. En effet : si (T_n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E,F)$, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ est de Cauchy dans F ; elle admet donc une limite que l'on note Tx. On vérifie sans peine que T, limite simple d'applications linéaires de E dans F est elle-même une application linéaire.

Puis la suite des restrictions $(T_n|_{\overline{B_E(0,1)}})$ est une suite de Cauchy dans l'espace des applications continues bornées de $\overline{B_E(0,1)}$ à valeurs dans l'espace complet F. Cet espace étant lui-même un Banach, la suite $(T_n|_{\overline{B_E(0,1)}})$ converge unformément vers une application continue bornée qui coïncide avec $T|_{\overline{B_E(0,1)}}$. En particulier l'application linéaire T est continue en 0, donc de E dans F. ∎

Les propriétés suivantes sont évidentes :

Proposition 1.5.4 *Soient E, F, G trois evn. Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $ST \in \mathcal{L}(E,G)$ et on a*

$$\|ST\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|S\|_{\mathcal{L}(F,G)} .$$

1.5.1 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

Un premier cas particulier important est celui des opérateurs bornés d'un evn dans lui-même.

Définition 1.5.5 *On dit qu'un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible si T est une application linéaire bijective de l'espace vectoriel E dans lui-même et que de plus l'application linéaire réciproque T^{-1} est continue.*

La proposition ci-dessus montre que si $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors

$$\|T\| \|T^{-1}\| \geq 1 .$$

Théorème 1.5.6 *Soit E un espace de Banach. Alors l'ensemble des applications linéaires inversibles dans $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ inversible ; alors tout opérateur $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\|S - T\| < \tfrac{1}{\|T^{-1}\|}$$

est également inversible. Soit $y \in E$; considérons l'application

$$f : E \to E \quad x \mapsto T^{-1}y - T^{-1}(S-T)x .$$

L'application f est k-lipschitzienne sur l'espace complet E, de rapport $k = \|T^{-1}\| \|S - T\| < 1$. D'après le théorème du point fixe, f admet donc un point fixe unique $x_y \in E$: clairement

$$Tf(x_y) = y - (S-T)x_y = Tx_y \,, \text{ soit } Sx_y = y .$$

L'application linéaire S est donc bijective : notons S^{-1} la bijection réciproque, qui est également linéaire.

Montrons que S^{-1} est continue :

$$x_y = T^{-1}y - T^{-1}(S-T)x_y\,,\ \text{d'où } \|x_y\| \leq \|T^{-1}\|\|y\| + \|T^{-1}\|\|(S-T)\|\|x_y\|$$

et comme $\|T^{-1}\|\|(S-T)\| < 1$, on a

$$\|S^{-1}y\| = \|x_y\| \leq \frac{\|T^{-1}\|\|y\|}{1 - \|T^{-1}\|\|(S-T)\|}\,.$$

Donc S^{-1} est continue de norme

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|\|(S-T)\|}\,,$$

cqfd. ■

Un cas particulier du résultat ci-dessus est celui où $T = Id_E$; soit $W = Id_E - S$. En supposant que $\|W\| = \|Id_E - S\| < 1$, on voit que la série

$$\sum_{n\geq 0} W^n$$

converge normalement dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$; elle converge donc, et sa limite vaut précisément

$$S^{-1} = \sum_{n\geq 0} W^n\,.$$

De plus

$$\|S^{-1}\| \leq \sum_{n\geq 0} \|W\|^n = \frac{1}{1 - \|W\|}\,.$$

1.5.2 Formes linéaires continues

Un autre cas particulier important d'opérateurs bornés entre evn est celui où l'espace d'arrivée est le corps de base.

Définition 1.5.7 *Lorsque E est un espace de Banach, on note $E' = \mathcal{L}(E, K)$, qui est appelé le dual topologique de E, et $\|T\|_{E'}$ (ou simplement $\|T\|$ lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguité) la norme d'application linéaire continue de la forme lináire T.*

Les formes linéaires continues sur un evn E sont les équations des hyperplans fermés de E.

Proposition 1.5.8 *Soit E un evn, et H un sev de E. Alors H est un hyperplan fermé de E ssi il existe $\phi \in E' \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker}\phi$.*

Démonstration. On rappelle qu'un sev F de E est un hyperplan de E ssi il existe $f \in E^*$ (le dual algébrique de E) non nulle telle que $F = \operatorname{Ker} f$.

Si $\phi \in E' \setminus \{0\}$, alors $\operatorname{Ker}\phi$ est un hyperplan de E ; il est de plus fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ dans $\mathbf{K}$ par l'application continue ϕ.

Réciproquement, soit H un hyperplan fermé de E : il existe donc $\phi \in E^* \setminus \{0\}$ tq. $H = \operatorname{Ker}\phi$; soit $a \in E \setminus H$: on a donc $\phi(a) \neq 0$, et en changeant a en $a/\phi(a)$, on se ramène au cas où $\phi(a) = 1$.

D'après le Lemme 1.4.3

$$\inf_{x \in H} \|a - x\|_E = r > 0\,.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ et tout $x \in H$, on a

$$\|\lambda a + x\|_E = |\|l\|a - \tfrac{1}{\lambda}(-x)\|_E \geq |\lambda| r$$

autrement dit

$$\|\lambda a + x\|_E \geq r|\phi(\lambda a + x)|\,.$$

Comme tout élément de E se met de façon unique sous la forme $z = \lambda a + x$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in H$, on a ainsi montré que

$$|\phi(z)| \leq \tfrac{1}{r}\|z\|_E \text{ pour tout } z \in E\,.$$

Donc ϕ est continue. ∎

1.5.3 Opérateurs compacts

Une généralisation immédiate des formes linéaires continues consiste à considérer les opérateurs de rang fini.

Soient donc E et F deux evn, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\operatorname{Im} T$ soit de dimension finie — donc fermé. Donc $\overline{T(B_E(0,1))}$ est fermé et borné dans l'espace de dimension finie $\operatorname{Im} T$: il est donc compact.

Plus généralement

Définition 1.5.9 *Soient E et F deux evn, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est un opérateur compact si*

$$\overline{T(B_E(0,1))} \textit{ est une partie compacte de } F\,.$$

On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F ; on vérifie trivialement que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev de $\mathcal{L}(E, F)$; dans le cas où $E = F$, on note $\mathcal{K}(E)$ l'espace $\mathcal{K}(E, E)$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition, et du fait que l'image d'un compact par une application continue est compacte (cf. Proposition 1.2.8).

Proposition 1.5.10 *Soient E_1, E_2, E_3 des evn et $T_j \in \mathcal{L}(E_j, E_{j+1})$ pour $j = 1, 2$. Si T_1 ou T_2 est compact, alors $T_2 \circ T_1$ est un opérateur compact de E_1 dans E_3.*

D'après le théorème de Riesz, pour tout evn de dimension infinie E, l'identité Id_E n'est jamais un opérateur compact de E dans E.

La proposition ci-dessus montre que si $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors T n'est pas un opérateur compact sur E.

Enfin, $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$ pour la topologie normique.

Proposition 1.5.11 *Soient E un evn, F un espace de Banach, et $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F. Supposons qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tq.*

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0 \textit{ pour } n \to \infty\,.$$

Alors T est un opérateur compact de E dans F.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $T(B_E(0, 1))$ est précompact dans F. Soit donc $\epsilon > 0$ arbitraire.

Puisque $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ pour $n \to \infty$, il existe $N > 0$ tq.

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \epsilon \text{ pour tout } n \geq N(\epsilon)\,.$$

Or $T_{N(\epsilon)}$ est un opérateur compact de E dans F, de sorte que $T_{N(\epsilon)}(B_E(0, 1))$ est précompact dans F.

D'après ce qui précède, pour tout $x \in B_E(0, 1)$,

$$\operatorname{dist}(Tx, T_{N(\epsilon)}(B_E(0, 1))) \leq \|Tx - T_{N(\epsilon)}x\|_F \leq \|T - T_{N(\epsilon)}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E < \epsilon\,.$$

En posant $K_\epsilon = T_{N(\epsilon)}(B_E(0, 1))$ qui est précompact dans F, on trouve que, pour tout $z \in T(B_E(0, 1))$, on a $\operatorname{dist}(z, K_\epsilon) < \epsilon$.

On conclut en appliquant le corollaire 1.2.5. ■