Chapitre 3

Espaces de Hilbert

3.1 Définitions et premiers exemples

Soit $\mathfrak{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, muni d'une forme sesquilinéaire notée $(x|y)$, qui est antilinéaire en la première variable et linéaire en la seconde.

On suppose cette forme sesquilinéaire définie positive, de sorte que l'application $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur $\mathfrak{H}$.

Définition 3.1.1 *On dit que l'espace vectoriel $\mathfrak{H}$ muni de la forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)$ est un espace de Hilbert si $\mathfrak{H}$ est complet pour la norme $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$.*

Voici quelques exemples d'espaces de Hilbert :

- tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie est un espace de Hilbert ;
- l'espace $\ell^2(\mathbf{Z}^N)$ muni de la forme sesquilinéaire

$$(x|y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \overline{x(k)} y(k) \,;$$

- l'espace $L^2(X)$ muni de la forme sesquilinéaire

$$(f|g) = \int_X \overline{f(x)} g(x) dx \,.$$

La complétude de ces espaces a été établie dans le chapitre précédent.

Pour $A \subset \mathfrak{H}$ on note

$$A^\perp = \{x \in \mathfrak{H} \,|\, (x|a) = 0 \text{ pour tout } a \in A\} \,.$$

L'orthogonal $A^\perp$ est un sev fermé de $\mathfrak{H}$ (comme intersection d'une famille indexée par A de sev fermé de $\mathfrak{H}$).

Clairement, $A^\perp = \overline{A}^\perp$: en effet, $A \subset \overline{A}$ donc on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$. D'autre part, si $x \perp A$ alors $x \perp \overline{A}$. En effet, étant donné $a \in \overline{A}$, il existe (a_n) suite de A tq. $a_n \to A$ pour $n \to \infty$: donc, comme $(x|a_n) = 0$ et $(x|a_n) \to (x|a)$ pour $n \to \infty$, on en déduit que $(x|a) = 0$.

3.2 Le théorème de la projection et ses applications

Le résultat fondamental de la théorie des espaces de Hilbert est le

Théorème 3.2.1 (de la projection sur un convexe fermé) *Soit C convexe fermé (non vide et de complémentaire non vide) d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit $x \in \mathfrak{H} \setminus C$. Alors*

a) il existe un point $P_C x \in C$ unique tel que

$$\|x - P_C x\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| ;$$

on prolonge P_C à $\mathfrak{H}$ tout entier en posant $P_C x = x$ pour tout $x \in C$;

b) le point $P_C x$ est l'unique point $y \in C$ tel que

$$(x - y|z - y) \leq 0 \text{ pour tout } z \in C ;$$

c) l'application P_C est contractante :

$$\|P_C x - P_C x'\| \leq \|x - x'\| .$$

On rappelle l'identité du parallélogramme, qui est caractéristique des normes hilbertiennes

$\boxed{\text{Identité du parallélogramme}}$

Pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Démonstration. Soit $d = \operatorname{dist}(x, C)$; comme C est fermé et $x \notin C$, alors $d > 0$.

Posons $F_n = C \cap \overline{B}_2(x, d + \frac{1}{n})$; alors pour tout $n \geq 1$, F_n est fermé dans $\mathfrak{H}$. De plus

$$\ldots \subset F_n \subset \ldots \subset F_2 \subset F_1 .$$

Enfin, diam $F_n \to 0$ pour $n \to \infty$. En effet, soient $y, z \in F_n$: alors, grâce à l'identité du parallélogramme

$$\|z - y\|^2 = 2(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2) - 4\|\tfrac{1}{2}(y + z) - x\|^2 \leq 4(d + \tfrac{1}{n})^2 - 4d^2 = 4d(\tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n^2})$$

Montrons que l'intersection des F_n est réduite à un point. En effet

$$\operatorname{diam} \bigcap_{n \geq 0} F_n = 0 .$$

Donc cette intersection contient au plus un point. Montrons qu'elle n'est pas vide : pour tout $n \geq 1$, on choisit $x_n \in F_n$; clairement

$$\operatorname{diam} \{x_n \,|\, n \geq N\} \leq \operatorname{diam} F_N \to 0 \text{ pour } N \to \infty .$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy, dans C qui est fermé dans $\mathfrak{H}$ complet, de sorte que C est complet. Donc la suite (x_n) admet une limite dans C ; notons la ξ :

$$\{\xi\} = \bigcap_{n\geq 1} F_n = C \cap \bigcap_{n\geq 1} \overline{B}_2(x, d + \tfrac{1}{n})$$

Comme $\|\xi - x\| \leq d + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, on a construit ainsi un point ξ tel que

$$\xi \in C \text{ et } \|\xi - x\| = d = \inf_{z\in C} \|z - x\| \,.$$

S'il existait un autre point ξ' vérifiant ces deux propriétés, on aurait

$$\{\xi, \xi'\} \subset C \cap \bigcap_{n\geq 1} \overline{B}_2(x, d + \tfrac{1}{n}) = \bigcap_{n\geq 1} F_n$$

comme cette intersection est un singleton, $\xi' = \xi$. On a donc construit $P_C x = \xi$, ce qui démontre le a).

Pour ce qui est du point b), observons d'abord que, pour tout $z \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, le point $(1 - t)P_C x + tz$ appartient à C. Donc par définition de la projection P_C

$$\begin{aligned}\|x - P_C x\|^2 &\leq \|x - (1 - t)P_C x - tz\|^2 \\ &= \|x - P_C x\|^2 - 2t(x - P_C x|z - P_C x) + t^2\|z - P_C x\|^2 \,.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$-2t(x - P_C x|z - P_C x) + t^2\|z - P_C x\|^2 \geq 0 \text{ pour tout } t \in]0, 1[\,;$$

en divisant les deux membres de cette inégalité par t on trouve

$$(x - P_C x|z - P_C x) \leq \tfrac{1}{2}t\|z - P_C x\|^2 \text{ pour tout } t \in]0, 1[\,.$$

En faisant $t \to 0$, on trouve que $(x - P_C x|z - P_C x) \leq 0$.

Réciproquement, si $\xi \in C$ vérifie

$$(x - \xi|z - \xi) \leq 0 \text{ pour tout } z \in C\,,$$

on a

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 = \|x - \xi + \xi - z\|^2 &= \|x - \xi\|^2 - 2(x - \xi|z - \xi) + \|z - \xi\|^2 \\ &\geq \|x - \xi\|^2 \text{ pour tout } z \in C\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\xi = P_C x$. Ceci conclut la preuve du point b).

Passons au caractère contractant de l'application P_C : pour tous $x, y \notin C$ (afin d'éviter les cas triviaux) on décompose

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 = \|x - P_C x\|^2 + \|P_C x - P_C y\|^2 + \|P_C y - y\|^2 + 2(x - P_C x|P_C x - P_C y) \\ + 2(P_C x - P_C y|P_C y - y) + 2(x - P_C x|P_C y - y)\end{aligned}$$

D'après le b),

$$(x - P_C x | P_C x - P_C y) \geq 0 \text{ et } (P_C x - P_C y | P_C y - y) \geq 0$$

de sorte que

$$\|x - y\|^2 \geq \|P_C x - P_C y\|^2 + \|(x - P_C x) + (y - P_C y)\|^2 \geq \|P_C x - P_C y\|^2 ,$$

ce qui conclut la preuve du point c). ∎

Dans le cas particulier où le convexe fermé est un sev F, le théorème permet donc de définir $P_F \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, F)$ tq. pour tout $x \in \mathfrak{H}$,

$$P_F x \in F \text{ et } x - P_F x \perp F ;$$

cette projection est une contraction :

$$\|P_F\| \leq 1 .$$

Comme dans le cas des espaces euclidiens de dimension finie, toute forme linéaire sur un espace de Hilbert est représentée par un vecteur.

Théorème 3.2.2 (de représentation de F. Riesz) *Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert et L forme linéaire continue sur $\mathfrak{H}$. Alors il existe un unique vecteur $\xi \in \mathfrak{H}$ tel que*

$$L(x) = (\xi | x) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H} ;$$

de plus

$$\|L\|_{\mathfrak{H}'} = \|\xi\|_{\mathfrak{H}} .$$

Démonstration. Soit L forme linéaire continue non nulle sur $\mathfrak{H}$; donc $H = \operatorname{Ker} L$ est un hyperplan fermé de $\mathfrak{H}$.

Soit $x \in \mathfrak{H} \setminus H$: notons $u = \frac{x - P_H x}{\|x - P_H x\|}$. Montrons que

$$L(x) = L(u)(u|x) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H} .$$

En effet, $\mathfrak{H} = H \oplus \mathbf{C}u$ et

$$L(\lambda u + h) = \lambda L(u) = L(u)(u | \lambda u + h) \text{ pour tout } h \in H \text{ et } \lambda \in \mathbf{C} .$$

Donc L est représenté par le vecteur $\overline{L(u)}u$.

Si L est représenté par deux vecteurs ξ et ξ', alors

$$\|\xi - \xi'\|^2 = (\xi - \xi' | \xi - \xi') = L(\xi - \xi') - L(\xi - \xi') = 0 ,$$

de sorte que $\xi = \xi'$.

Enfin, si ξ représente la forme linéaire continue L, on a

$$|L(x)| = |(\xi|x)| \leq \|\xi\| \|x\| e \text{ et } |L(\xi)\| = \|\xi\|^2 .$$

Donc $\|L\| = \|\xi\|$, cqfd. ∎

Voici une application importante du théorème de représentation, qui permet de tester si un sev de $\mathfrak{H}$ est dense.

Théorème 3.2.3 *Soit $V \subset \mathfrak{H}$ un sev. Alors V est dense ssi $V^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. D'abord $\overline{V}^\perp = V^\perp$. Alors, si V est dense, $\overline{V} = \mathfrak{H}$ de sorte que $V^\perp = \overline{V}^\perp = \mathfrak{H}^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $V^\perp = \{0\}$. Si $\overline{V} \neq \mathfrak{H}$, on choisit $x \in \mathfrak{H} \setminus \overline{V}$, et soit $P_{\overline{V}}x$. Alors

$$x - P_{\overline{V}}x \in \overline{V}^\perp \subset V^\perp = \{0\}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $x \notin \overline{V}$. ■

Corollaire 3.2.4 *Soit V un sev de $\mathfrak{H}$. Alors $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$.*

Démonstration. L'inclusion

$$V \subset (V^\perp)^\perp$$

est évidente ; comme $(V^\perp)^\perp$ est fermé, on en déduit que

$$\overline{V} \subset (V^\perp)^\perp .$$

Le sev fermé $W = (V^\perp)^\perp$ de $\mathfrak{H}$ est un espace de Hilbert pour la restriction à W du produit hermitien de $\mathfrak{H}$.

L'orthogonal de V dans W est

$$V^\perp \cap W = V^\perp \cap (V^\perp)^\perp = \{0\} .$$

Donc V est dense dans W, c'est à dire que

$$\overline{V} = W$$

cqfd. ■

3.3 Bases hilbertiennes

A partir de cette section, on considèrera exclusivement dans ce chapitre le cas des espaces de Hilbert séparables. (Rappelons qu'un espace métrique est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense).

Soit donc $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable et $D \subset \mathfrak{H}$ dénombrable et dense dans $\mathfrak{H}$. On supposera dans tout ce qui suit que $\mathfrak{H}$ est de dimension infinie, le cas des espaces euclidiens (ou hermitiens) de dimension finie étant bien connu.

Soit $V = \operatorname{Vect} D$; clairement V est dense dans $\mathfrak{H}$ puisque $D \subset V$ et $\mathfrak{H} = \bar{D} \subset \bar{V}$.

Définition 3.3.1 *On dit qu'une famille $(\xi_i)_{i\in I}$ (non nécessairement dénombrable) de vecteurs de $\mathfrak{H}$ est totale si $\operatorname{Vect}\{\xi_i \mid i \in I\}$ est dense dans $\mathfrak{H}$.*

D'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire de D une partie libre, qui sera donc une base de V. Cette partie libre est une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$; dans le cas contraire, V serait de dimension finie, donc fermé dans $\mathfrak{H}$; puisque d'autre part V est dense dans $\mathfrak{H}$, l'espace $\mathfrak{H}$ serait lui-même de dimension finie, contrairement à notre hypothèse.

Par conséquent, pour tout espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, on obtient donc au moyen de la construction ci-dessus une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\} \text{ est libre et totale dans } \mathfrak{H}\,.$$

3.3.1 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Ce procédé a déjà été rencontré dans l'étude des espaces euclidiens ou hermitiens de dimension finie.

On va définir par récurrence une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ vérifiant les propriétés suivantes

(i) la partie $\{y_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ est orthogonale dans $\mathfrak{H}$;

(ii) pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathrm{Vect}\{y_n \,|\, 1 \le n \le N\} = \mathrm{Vect}\{x_n \,|\, 1 \le n \le N\}$$

Pour cela, on pose

$$y_0 = x_0\,;$$

comme $\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ est libre, $y_0 = x_0 \neq 0$.

Puis on cherche y_1 sous la forme

$$y_1 = x_1 + t_{10}y_0\,;$$

la condition

$$(y_1|y_0) = 0 \text{ équivaut à } t_{10} = -\frac{(x_1|y_0)}{(y_0|y_0)}\,.$$

Ensuite, on cherche y_2 sous la forme

$$y_2 = x_2 + t_{20}y_0 + t_{21}y_1\,;$$

puisque la partie $\{y_0, y_1\}$ est orthogonale, la condition

$$(y_2|y_j) = 0 \text{ équivaut à } t_{2j} = -\frac{(x_2|y_j)}{(y_j|y_j)} \text{ pour } j = 0, 1\,.$$

Notons que $y_j \neq 0$ pour $j = 0, 1$: on a vu que $y_0 \neq 0$; pour ce qui est de y_1, notons que y_1 est une combinaison linéaire de la partie libre $\{x_0, x_1\}$ dont la coordonnée sur x_1 est non nulle. Comme la partie $\{x_0, x_1\}$ est libre, $y_1 \neq 0$.

Passons à l'argument de récurrence : on suppose construits $y_0, \ldots, y_{i-1}$ tels que $(y_k|y_l) = 0$ pour $k \neq l$ et vérifiant (ii) pour $N = 0, \ldots, i-1$; on va alors chercher y_i sous la forme

$$y_i = x_i + \sum_{j=0}^{i-1} t_{ij}y_j\,.$$

Cherchons les coefficients t_{ij} pour que

$$(y_i|y_j) = (x_i|y_j) + t_{ij}(y_j|y_j)\,, \quad j = 0, \ldots, i-1\,.$$

D'abord $y_j \neq 0$ pour $j = 0, \ldots, i-1$: en effet y_j est une combinaison linéaire de $\{x_0, \ldots, x_j\}$ dont la coordonnée sur x_j vaut 1. Or la partie $\{x_0, \ldots, x_j\}$ est libre, donc $y_j \neq 0$. On pose donc

$$t_{ij} = -\frac{(x_i|y_j)}{(y_j|y_j)}\,, \quad j = 0, \ldots, i-1\,.$$

Ainsi, la partie $\{y_0, \ldots, y_i\}$ est orthogonale ; de plus

$$y_i \in \mathrm{Vect}\{y_0, \ldots, y_{i-1}, x_i\} = \mathrm{Vect}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i\}$$

puisque l'hypothèse de récurrence assure que

$$\mathrm{Vect}\{y_0, \ldots, y_{i-1}\} = \mathrm{Vect}\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}\,.$$

3.3.2 Egalité de Parseval et applications

Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Définition 3.3.2 *On appelle base hilbertienne de $\mathfrak{H}$ toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que*

$$(x_k|x_l) = \delta_{kl} \text{ pour } k, l \geq 0\,, \text{ et } \{x_n \,|\, n \geq 0\} \text{ totale dans } \mathfrak{H}\,.$$

La terminologie "base hilbertienne" est trompeuse : une base hilbertienne d'un espace de Hilbert n'en est une base que si cet espace est de dimension finie.

La construction de la section précédente permet de prouver l'existence d'une base hilbertienne

Théorème 3.3.3 *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie admet au moins une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable. On a vu que $\mathfrak{H}$ contient au moins une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ libre et totale dans $\mathfrak{H}$.

Grâce au procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on construit, à partir de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui est libre, orthogonale et totale.

On obtient donc une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$ en posant

$$e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}\,, \qquad n \geq 0\,.$$

■

Soit donc $(e_n)_{n\geq 0}$ suite orthonormée de $\mathfrak{H}$; pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on notera

$$\hat{x}(n) = (e_n|x)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

$\boxed{\text{Inégalité de Bessel}}$

Pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{x}(n)|^2 \leq \|x\|^2 \,.$$

Démonstration. Notons $V_n = \mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$; pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$P_{V_n} x = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k) e_k$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2 = \|P_{V_n} x\|^2 \leq \|x\|^2 \,.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient l'inégalité de Bessel. ∎

Egalité de Parseval

Les deux conditions suivantes sont équivalentes

(i) la suite orthonormée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale dans $\mathfrak{H}$;

(ii) pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{x}(n)|^2 = \|x\|^2 \,;$$

(iii) pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} \overline{\hat{x}(n)} \hat{y}(n) = (x|y) \,.$$

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Soit $x \in \mathfrak{H}$; comme $V = \mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $v_n \to x$ dans $\mathfrak{H}$ pour $n \to \infty$.

Comme chaque v_n est une combinaison linéaire finie des $(e_n)_{n\geq 0}$,

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_N(n)\}) \leq \|x - v_n\|$$

où

$$N(n) = \min\{N \in \mathbf{N} \,|\, v_n \in \mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_N\}\} \,.$$

Donc

$$\|x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}} x\|^2 = \mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_n\}) \to 0 \text{ pour } n \to \infty \,.$$

Or, d'après le théorème de Pythagore

$$P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}} x = \sum_{k=0}^{n} (e_k|x) e_k$$

et

$$\|x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |(e_k|x)|^2 \,.$$

On en déduit (ii).

Réciproquement, (ii) implique (i) : soit en effet $x \perp \mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \geq 0\}$. Alors $\hat{x}(n) = (e_n|x) = 0$ pour tout $n \geq 0$; donc $x = 0$ d'après (ii). D'après le théorème 3.2.3, ceci implique que $\mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \geq 0\}$ est dense dans $\mathfrak{H}$.

Comme (iii) implique clairement (ii), montrons que (ii) implique (iii). Cela découle immédiatement de l'identité suivante, vérifiée par toute norme hermitienne sur un espace vectoriel complexe — et donc en particulier par le module sur $\mathbf{C}$, qui est la norme associée au produit scalaire hermitien canonique de $\mathfrak{H}$ défini par $< x|y >= \overline{x}y$.

$\boxed{\text{Identité de polarisation}}$

Pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(x|y) = \tfrac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x-iy|^2 - i|x+iy|^2)$$

■

L'intérêt des bases hilbertiennes est de ramener à un modèle unique très simple tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie — de même que tous les espaces vectoriels de dimension finie N sur $\mathbf{C}$ s'identifient à $\mathbf{C}^N$ par choix d'une base.

Théorème 3.3.4 (de Riesz-Fischer) *Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie sur $\mathbf{C}$; soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ base hilbertienne de $\mathfrak{H}$. Alors*

1) pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$x = \sum_{k\geq 0} \hat{x}(k) e_k \,,$$

où la série ci-dessus converge dans $\mathfrak{H}$;

2) l'application linéaire

$$\Phi : (x_k)_{k\geq 0} \mapsto \Phi((x_k)_{k\geq 0}) = \sum_{k\geq 0} x_k e_k$$

est un isomorphisme de $\ell^2(\mathbf{N})$ sur $\mathfrak{H}$ qui est de plus unitaire et donc isométrique :

$$(\Phi((x_k)_{k\geq 0})|\Phi((y_k)_{k\geq 0})_{\mathfrak{H}} = ((x_k)_{k\geq 0}|(y_k)_{k\geq 0})_{\ell^2(\mathbf{N})} \,.$$

Démonstration. Le point 1) est une conséquence de l'égalité de Parseval appliquée au vecteur

$$y = x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x$$

pour lequel

$$\hat{y}(k) = 0 \text{ si } k = 0, \ldots, n \,, \text{ et } \hat{y}(k) = \hat{x}(k) \text{ pour } k > n \,.$$

Donc
$$\|x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x\|^2 = \sum_{k>n} |\hat{x}(k)|^2$$
et comme le membre de droite est le reste d'un série convergente, on trouve que
$$P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x \to x \text{pour } n \to \infty\,.$$
Or
$$P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k)e_k$$
d'où le résultat annoncé.

Passons à la démonstration du point 2).

Montrons tout d'abord que l'application Φ est bien définie sur $\ell^2(\mathbf{N})$. Soit donc $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$; posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \in \mathfrak{H}\,.$$
Nous allons montrer que la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathfrak{H}$: en effet, comme la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée dans $\mathfrak{H}$, on a
$$\|\xi_{n+p} - \xi_n\|_{\mathfrak{H}}^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k|^2 \leq \sum_{k\geq n+1} |x_k|^2 \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$
puisque le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est le reste d'une série convergente. Donc
$$\|\xi_{n+p} - \xi_n\|_{\mathfrak{H}}^2 \to 0 \text{ pour } n \to \infty \text{ uniformément en } p \geq 0\,,$$
de sorte que la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathfrak{H}$. Comme $\mathfrak{H}$ est complet, la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, et sa limite est précisément
$$\sum_{k\geq 0} x_k e_k = \Phi((x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}))\,.$$
Que Φ ainsi définie soit unitaire est exactement la traduction de la forme (iii) de l'égalité de Parseval ci-dessus. On en déduit en particulier que, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ appartenant à $\ell^2(\mathbf{N})$,
$$\|\Phi((x_k)_{k\in\mathbf{N}})\|_{\mathfrak{H}} = \|(x_k)_{k\in\mathbf{N}}\|_{\ell^2(\mathbf{N})}\,,$$
de sorte qu'en particulier $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$. Enfin $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathfrak{H}$ d'après 1), cqfd. ■

Attention : pour $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$, la série
$$\sum_{k\geq 0} x_k e_k$$
est convergente mais en général pas normalement convergente dans $\mathfrak{H}$.

3.3.3 Exemples de bases hilbertiennes

Voici quelques exemples de bases hilbertiennes couramment utilisées en Analyse.

1) On considère l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$; tout élément de $\mathfrak{H}$ s'identifie à une fonction définie pp., mesurable et périodique[1] de période 1 et dont le carré du module est sommable sur une période. Alors la théorie L^2 des séries de Fourier (qui sera exposée en détail au chapitre suivant) montre que la suite $(e^{i2\pi kx})_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

2) Soit comme ci-dessus $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$; la suite $(\sin(\pi nx))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$ (c'est la base diagonalisant l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec conditions de Dirichlet en $x=0$ et $x=1$). On notera la différence avec la base hilbertienne précédente : les fréquences sont ici multiples de π et non de 2π, bien que l'intervalle soit de même longueur. L'idée est ici d'identifier tout élément de $\mathfrak{H}$ à une fonction impaire[2] appartenant à l'espace de Hilbert $L^2([-1,1])$, étendue en une fonction périodique de période 2 définie pp. sur $\mathbf{R}$: on sait qu'alors la série de Fourier d'une telle fonction ne comprend que des modes sinus.

3) On considère maintenant l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([-1,1])$; pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit le n-ième polynôme de Legendre par la formule

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_n(x) = \tfrac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,,\ n \geq 1\,.$$

La suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ constitue une base hilbertienne de polynômes orthogonaux de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$.

4) Considérons encore l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([-1,1])$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit le n-ième polynôme de Tchebychev par la formule

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_n(x) = 2^{1-n}\cos(n\arccos(x))$$

La suite $(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-x^2)^{-1/4}P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est également une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

5) Soit maintenant $\mathfrak{H} = L^2(\mathbf{R})$; on définit le n-ième polynôme d'Hermite par la formule

$$H_0(x) = 1\,, \quad H_n(x) = (-1)^n\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \text{ pour } n \geq 1$$

Alors $(e^{-x^2/2}H_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

Les trois derniers exemples sont construits à partir de systèmes de polynômes orthogonaux ; ces polynômes ont une grande importance en analyse numérique, par exemple pour les formules de quadrature permettant le calcul numérique d'intégrales.

[1] C'est à dire une fonction tq. $f(x+1) = f(x)$ pp. en $x \in \mathbf{R}$.
[2] C'est à dire une fonction f vérifiant $f(x) = f(-x)$ pp. en $x \in [-1,1]$.

3.4 Convergence faible

Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable de dimension infinie sur $\mathbf{C}$.

Définition 3.4.1 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ converge faiblement vers $x \in \mathfrak{H}$, ce que l'on note*

$$x_n \rightharpoonup x \textit{ pour } n \to \infty$$

si, pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$, on a

$$\textit{pour tout } \xi \in \mathfrak{H}\,,\ \textit{ on a } (\xi|x_n) \to (\xi|x) \textit{ pour } n \to \infty\,.$$

Toute suite convergente dans $\mathfrak{H}$ est évidemment faiblement convergente, et vers la même limite. Nous verrons plus loin que la réciproque est fausse, sauf évidemment dans le cas où $\mathfrak{H}$ est de dimension finie. Donc la notion de convergence faible n'a d'intérêt que dans le cas d'espaces de dimension infinie.

Toute suite convergente dans $\mathfrak{H}$ est évidemment bornée ; c'est encore vrai de toute suite faiblement convergente dans $\mathfrak{H}$, mais la démonstration de ce fait est loin d'être évidente.

Théorème 3.4.2 *Toute suite faiblement convergente de $\mathfrak{H}$ est bornée.*

Cet énoncé est une variante (dans le cadre hilbertien) du théorème de Banach-Steinhaus. Ce dernier résultat se démontre habituellement au moyen du théorème de Baire ; voici toutefois une preuve élémentaire du résultat ci-dessus qui n'utilise pas le théorème de Baire — cet argument est dû à D. Sarason.

Démonstration. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suite de $\mathfrak{H}$ faiblement convergente. Pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$, la suite de nombres complexes $(\xi|x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, donc bornée :

$$\sup_{n\geq 0} |(\xi|x_n)| = M(\xi) < \infty\,.$$

Evidemment

$$\text{si } \sup_{|\xi|=1} M(\xi) = M^* < \infty\,, \text{ alors } \|x_n\| \leq M^* \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

(En effet, en choisissant $\xi = x_n/\|x_n\|$ pour $x_n \neq 0$, on trouve que $\|x_n\| \leq M^*$ pour tout $n \in \mathbf{N}$).

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathfrak{H}$. Alors il existe $n_1 \geq 0$ et $e_1 \in \mathfrak{H}$ tel que $\|e_1\| = 1$ et

$$|(e_1|x_{n_1})| \geq 1\,.$$

Considérons maintenant $V_1 = (\mathrm{Vect}\{e_1, x_{n_1}\})^\perp$; alors si la suite $(P_{V_1}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ était bornée, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le serait aussi. En effet, si $\hat{e}_1 \in \mathrm{Vect}\{e_1, x_1\}$ et la famille $\{e_1, \hat{e}_1\}$ est orthonormée, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|(e_1|x_n)| \leq M(e_1) \text{ et } |(\hat{e}_1|x_n)| \leq M(\hat{e}_1)\,.$$

Donc
$$\|x_n\|^2 = \|P_{V_1}x_n\|^2 + M(e_1)^2 + M(\hat{e}_1)^2\,,$$
de sorte que $(x_n)_{n\geq 1}$ serait bornée si $(P_{V_1}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ était bornée.

Donc la suite $(P_{V_1}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée, de sorte qu'il existe $e_2 \in V_1$ de norme 1 et $n_2 \geq 0$ tels que
$$|(e_2|x_{n_2})| \geq 2(2 + M(e_1))\,.$$

Notons $V_2 = (\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, x_{n_1}, x_{n_2}\})^\perp$; comme ci-dessus, la suite $(P_{V_2}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée, faute de quoi la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ serait bornée. Alors, il existe $e_3 \in V_2$ de norme 1 et $n_3 \geq 0$ tels que
$$|(e_3|x_{n_3})| \geq 3(3 + M(e_1) + \tfrac{1}{2}M(e_2))\,.$$

Par récurrence, on construit une suite de vecteurs unitaires $(e_k)_{k\geq 1}$ et une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, notée $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}^*}$, telles que
$$e_k \perp e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$$
et
$$|(e_k|x_{n_k})| \geq k(k + M(e_1) + \tfrac{1}{2}M(e_2) + \ldots + \tfrac{1}{k-1}M(e_{k-1}))\,.$$

Soit maintenant le vecteur
$$f = \sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k} e_k\,;$$
comme la suite $(e_k)_{k\geq 1}$ est orthonormée et que
$$\sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k^2} < \infty$$
la série définissant f converge dans $\mathfrak{H}$.

Calculons alors
$$\begin{aligned}
|(f|x_{n_k})| &= \left|\tfrac{1}{k}(e_k|x_{n_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}(e_j|x_{n_k})\right| \\
&\geq \frac{1}{k}|(e_k|x_{n_k})| - \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j} M(e_j) \\
&\geq \left(k + \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j} M(e_j)\right) - \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j} M(e_j) \geq k\,.
\end{aligned}$$
Ceci est en contradiction avec le fait que
$$|(f|x_{n_k})| \leq M(f) < \infty \text{ pour } k \geq 1\,.$$
Donc l'hypothèse selon laquelle la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée est en contradiction avec le fait que cette suite est faiblement convergente, cqfd.

■

Voici une première caractérisation très naturelle de la convergence faible.

Proposition 3.4.3 *Soit* $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une base hilbertienne de* $\mathfrak{H}$. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de* $\mathfrak{H}$ *converge faiblement vers* $x \in \mathfrak{H}$ *si et seulement si elle est bornée et*

$$\text{pour tout } k \in \mathbf{N}\,,\text{ on a } \hat{x}_n(k) \to \hat{x}(k) \text{ pour } n \to \infty\,,$$

où $\hat{x}_n(k) = (e_k|x_n)$.

Cette proposition montre en particulier que toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert de dimension finie est convergente pour la topologie définie par la norme. En effet, si $(e_1, \ldots, e_N)$ est une base orthonormée de $\mathfrak{H}$, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ converge faiblement, les suites $(e_k|x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des coordonnées de x_n convergent pour $1 \le k \le N$, ce qui implique évidemment que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en norme.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathfrak{H}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour $n \to \infty$; alors $\hat{x}_n(k) = (e_k|x_n) \to (e_k|x)$ pour $n \to \infty$; de plus, d'après le théorème ci-dessus, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\|x_n\| \le M \text{ et } \hat{x}_n(k) \to \lambda_k \text{ pour tout } n \ge 0\,.$$

D'après la forme (ii) de l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{k\ge 0} |\hat{x}_n(k)|^2 \le M^2$$

de sorte que

$$\sum_{k\ge 0} |\lambda_k|^2 \le M^2\,.$$

Par conséquent, la série

$$\sum_{k\ge 0} \lambda_k e_k$$

converge dans $\mathfrak{H}$; notons alors

$$x = \sum_{k\ge 0} \lambda_k e_k\,.$$

D'après la forme (iii) de l'égalité de Parseval, on a

$$(\xi|x_n - x) = \sum_{k\ge 0} \overline{\hat{\xi}(k)}(\hat{x}_n(k) - \lambda_k)\,,$$

ainsi que

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k\ge 0} |\hat{\xi}(k)|^2\,.$$

Comme la série au membre de droite ci-dessus converge, étant donné $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tq.

$$\sum_{k>N} |\hat{\xi}(k)|^2 < \epsilon^2\,.$$

Alors

$$|(\xi|x_n - x)| \leq \left|\sum_{k=0}^{N} \overline{\hat{\xi}(k)}(\hat{x}_n(k) - \lambda_k)\right| + 2M\epsilon$$

de sorte que, pour $n \to \infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(\xi|x_n - x)| \leq 2M\epsilon\,.$$

Comme ceci vaut pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(\xi|x_n - x)| = 0$$

et donc que

$$x_n \rightharpoonup x \text{ pour } n \to \infty\,.$$

■

Comme l'espace $\mathfrak{H}$ est de dimension infinie, sa boule unité fermée n'est pas compacte, et donc il existe des suites bornées de $\mathfrak{H}$ dont aucune suite extraite ne converge dans $\mathfrak{H}$. (C'est le cas, par exemple, de toute base hilbertienne de $\mathfrak{H}$).

Mais il en va tout autrement pour la convergence faible, et c'est là tout l'intérêt de cette notion.

Théorème 3.4.4 *Toute suite bornée de $\mathfrak{H}$ admet une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suite de $\mathfrak{H}$ telle que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et soit $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

Soit $\hat{x}_n(k) = (e_k|x_n)$; alors

$$|\hat{x}_n(k)| \leq M \text{ pour tous } k, n \in \mathbf{N}\,.$$

Comme la suite $(\hat{x}_n(0))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe $\phi_0 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\hat{x}_{\phi_0(n)}(0) \to \lambda_0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Comme la suite $(\hat{x}_{\phi_0(n)}(1))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe $\phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\phi_1(n)}(1) \to \lambda_1 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Comme cette suite est extraite de $(\hat{x}_{\phi_0(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, on a aussi

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\phi_1(n)}(0) \to \lambda_0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Par récurrence, on construit $\phi_j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_j(n)}(k) \to \lambda_k \text{ pour } n \to \infty \text{ et } k = 0, \ldots, j\,.$$

Considérons la suite extraite $(\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. Cette suite est bornée ; d'autre part, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(n)}(k) \to \lambda_k \text{ pour } n \to \infty \text{ et tout } k \in \mathbf{N}\,.$$

D'après la proposition précédente, on en déduit que la suite extraite $(\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est faiblement convergente, cqfd.. ■

Voici un exemple important de suite convergeant faiblement mais pas en norme. Soient $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$. Alors

$$e_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |(e_n|x)|^2 \leq \|x\|^2\,;$$

comme la série au membre de gauche de l'inégalité ci-dessus converge, la suite $(e_n|x) \to 0$ pour $n \to \infty$.

Evidemment, e_n ne converge pas vers 0 en norme puisque $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Théorème 3.4.5 *Soient $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ et $\mathfrak{H}$ des espaces de Hilbert séparables et B une application bilinéaire — ou sesquilinéaire — continue de $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ à valeurs dans $\mathfrak{H}$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ respectivement.*

a) si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\mathfrak{H}_1$ et $y_n \rightharpoonup y$ dans $\mathfrak{H}_2$ pour $n \to \infty$, on n'a pas forcément $B(x_n, y_n) \rightharpoonup B(x, y)$ dans $\mathfrak{H}$ pour $n \to \infty$;

b) si $x_n \to x$ dans $\mathfrak{H}_1$ et $y_n \rightharpoonup y$ dans $\mathfrak{H}_2$ pour $n \to \infty$, alors $B(x_n, y_n) \rightharpoonup B(x, y)$ dans $\mathfrak{H}$ pour $n \to \infty$.

Démonstration. Pour ce qui est du a) considérons le cas où $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$ et $\mathfrak{H} = \mathbf{C}$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de $\mathfrak{H}_1$; choisissons alors les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$x_n = y_n = e_n\,, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

ainsi que

$$B(x, y) = (x|y)\,.$$

On vient de voir que $e_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathfrak{H}_1$; pourtant

$$B(e_n, e_n) = (e_n|e_n) = 1$$

de sorte que l'on n'a pas

$$\text{la relation } B(e_n, e_n) \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Passons à la démonstration du point b). D'après le principe de bornitude uniforme, la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée : il existe donc $M > 0$ tq.

$$|y_n| \leq M\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

D'autre part, pour tout $z \in \mathfrak{H}$, l'application

$$\phi : \mathfrak{H}_2 \ni y \mapsto (z|B(x,y)) \in \mathbf{C}$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{H}_2$; d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $\xi \in \mathfrak{H}_2$ représentant ϕ, c'est à dire que

$$(z|B(x,y)) = (\xi|y)\,, \quad \text{pour tous } z \in \mathfrak{H}\,,\ x \in \mathfrak{H}1 \text{ et } y \in \mathfrak{H}_2\,.$$

Alors

$$(z|B(x_n,y_n) - B(x,y)) = (z|B(x_n - x, y_n)) + (z|B(x, y_n - y))\,.$$

Le premier terme au membre de droite vérifie

$$|(z|B(x_n - x, y_n))| \leq CM\|z\|\|x_n - x\| \to 0 \text{ pour } n \to 0\,;$$

quant au second

$$(z|B(x, y_n - y)) = (\xi|y_n - y) \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,,$$

d'où finalement

$$(z|B(x_n,y_n) - B(x,y)) \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,,$$

cqfd. ■

3.5 Opérateurs dans les espaces de Hilbert

Dans toute cette section, $\mathfrak{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable.

3.5.1 Adjoint d'un opérateur borné

Soit T opérateur borné sur $\mathfrak{H}$ — ce qui signifie que T est une application linéaire continue de $\mathfrak{H}$ dans lui-même.

Soient $x, y \in \mathfrak{H}$; considérons la forme linéaire sur $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} \ni x \mapsto (y|Tx)$$

elle est manifestement continue ; donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un vecteur $z \in \mathfrak{H}$ unique tel que

$$(z|x) = (y|Tx) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H}\,.$$

Ce vecteur z sera noté

$$z = T^* y$$

c'est à dire que pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$

$$(y|Tx) = (T^* y|x)\,.$$

Définition 3.5.1 *L'application $\mathfrak{H} \ni y \mapsto T^*y \in \mathfrak{H}$ est linéaire et continue sur $\mathfrak{H}$: on l'appelle "opérateur adjoint de T".*

On vérifie sans peine que

$$(T+S)^* = T^* + S^*\,,\ (\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*\,,\ (TS)^* = S^*T^*\,.$$

Notons que

$$\|T^*\| = \|T\|\,.$$

(En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\|T^*x\|^2 = (T^*x|T^*x) = (x|TT^*x) \leq \|T\|\|x\|\|T^*x\|$$

d'où $\|T^*\| \leq \|T\|$; pour l'inégalité inverse, utiliser le fait que $(T^*)^* = T$.)

Proposition 3.5.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$; alors*

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}\,.$$

Démonstration. Pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(x|Ty) = (T^*x|y)\,.$$

Alors, si $T^*x = 0$, on a $x \perp Ty$ pour tout $y \in \mathfrak{H}$, c'est à dire que $x \perp \mathrm{Im}\,\mathfrak{H}$: donc

$$\mathrm{Ker}(T^*) \subset \mathrm{Im}(T)^{\perp}\,.$$

Réciproquement, si $x \perp \mathrm{Im}(T)$, on a

$$(T^*x|y) = 0$$

pour tout $y \in \mathfrak{H}$; en prenant $y = T^*x$, on trouve que

$$(T^*x|T^*x) = \|T^*x\|^2 = 0\,.$$

Donc $T^*x = 0$ c'est à dire que $x \in \mathrm{Ker}(T^*)$. Ainsi on a montré que

$$\mathrm{Im}(T)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(T^*)\,.$$

On conclut donc que $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^*)$. ■

La notion d'adjoint permet de montrer sans difficulté que

Proposition 3.5.3 *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tq. $x_n \rightharpoonup x$ dans $\mathfrak{H}$, et toute application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, on a*

$$Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Démonstration. En effet, pour tout $y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(y|Tx_n) = (T^*y|x_n) \to (T^*y,|x) = (y|Tx) \text{ pour } n \to \infty\,,$$

ce qui démontre le résultat annoncé. ■

Voici une caractérisation très simples des opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.

Proposition 3.5.4 *Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Alors T est un opérateur compact si et seulement si*

$$Tx_n \to 0 \textit{ pour } n \to \infty$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tq.

$$x_n \rightharpoonup 0 \textit{ pour } n \to \infty\,.$$

Démonstration. Supposons que T est un opérateur compact sur $\mathfrak{H}$ et que

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

D'après le principe de bornitude uniforme, il existe $M > 0$ tq.

$$\|x_n\| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

Donc $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\overline{T(B(0, M + 1))}$ qui est compact. D'autre part, il résulte de la proposition précédente que

$$Tx_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Donc la seule valeur d'adhérence possible de la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (pour la topologie de la norme) est 0 ; comme cette suite est à valeurs dans un compact, on en déduit que

$$Tx_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Réciproquement, supposons que

$$Tx_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tq.

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Montrons que $\overline{T(B(0,1))}$ est compact. Il suffit donc de montrer que toute suite de $T(B(0,1)$ admet une sous-suite convergente en norme. Soit donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $T(B(0,1))$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe donc $x_n \in \mathfrak{H}$ tq.

$$Tx_n = y_n \text{ et } \|x_n\| < 1\,.$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe une suite extraite $n_k \to \infty$ pour $k \to \infty$ tq.

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ pour } k \to \infty\,;$$

donc

$$y_{n_k} = Tx_{n_k} \to Tx \text{ pour } k \to \infty\,,$$

cqfd. ■

Théorème 3.5.5 *Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable et soit $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Si T est un opérateur compact, son adjoint T^* est également un opérateur compact.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathfrak{H}$ tq.

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty .$$

Comme T^* est une application linéaire continue sur $\mathfrak{H}$

$$T^* x_n \rightharpoonup 0 \text{pour } n \to \infty ;$$

donc

$$\|T^* x_n\|^2 = (x_n|TT^* x_n) \to 0 \text{pour } n \to \infty .$$

En effet, $TT^*x_n \to 0$ pour $n \to \infty$ puisque T est compact et que $T^*x_n \rightharpoonup 0$; enfin, le produit scalaire converge vers 0 d'après le théorème 3.4.5. ■

3.5.2 Spectre des opérateurs compacts

La théorie spectrale des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable diffère très peu de celle des matrices.

Théorème 3.5.6 (Alternative de Fredholm) *Soit K opérateur compact sur $\mathfrak{H}$, et soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Alors*

a) $\mathrm{Ker}(\lambda I - K)$ *est de dimension finie,*

b) $\mathrm{Im}(\lambda I - K) = \mathrm{Ker}(\lambda I - K^*)^\perp$.

En particulier, b) implique que $\Im(\lambda I - K)$ est fermé et de codimension finie.

Démonstration. Commençons par le a) : le sev $\mathrm{Ker}(\lambda I - K)$ est fermé dans $\mathfrak{H}$ (comme noyau d'une application linéaire continue) : c'est donc un espace de Hilbert pour la restriction du produit scalaire de $\mathfrak{H}$.

D'autre part, $K(\mathrm{Ker}(\lambda I - K)) \subset \mathrm{Ker}(\lambda I - K)$ et K coïncide avec λI sur $\mathrm{Ker}(\lambda I - K)$. Comme K est un opérateur compact, il en va de même pour $K\big|_{\mathrm{Ker}(\lambda I - K)}$. Autrement dit, λI est un opérateur compact sur $\mathrm{Ker}(\lambda I - K)$: ceci n'est possible que si $\lambda = 0$ ou si $\mathrm{Ker}(\lambda I - K)$ est de dimension finie (voir chapitre 1, section 1.5.3).

Passons au point b). Commençons par montrer que $\mathrm{Im}(\lambda I - K)$ est fermée. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathfrak{H}$ tq.

$$y_n = (\lambda I - K)x_n \to y \text{ pour } n \to \infty .$$

Quitte à soustraire à x_n sa projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(\lambda I - K)$, on peut supposer que

$$x_n \perp \mathrm{Ker}(\lambda I - K) .$$

Nécessairement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Sinon, il existerait une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ tq.

$$\|x_{n_k}\| \to \infty \text{ pour } k \to \infty .$$

Alors la suite $(z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par

$$z_k = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \text{ vérifie } \|z_k\| = 1$$

Elle admet donc une sous-suite $(z_{k_l})_{l\in\mathbf{N}}$ tq.

$$z_{k_l} \rightharpoonup z \text{ pour } l \to \infty\,.$$

D'après la proposition 3.5.4

$$Kz_{k_l} \to Kz \text{ pour } l \to \infty\,;$$

d'autre part

$$(\lambda I - K)z_{k_l} = \frac{y_{n_{k_l}}}{\|x_{n_{k_l}}\|} \to 0 \text{pour } l \to \infty$$

de sorte que

$$\lambda z_{k_l} \to Kz \text{ pour } l \to \infty$$

Autrement dit,

$$z \in \operatorname{Ker}(\lambda I - K)$$

mais comme d'autre part

$$z_{k_l} \perp \operatorname{Ker}(\lambda I - K) \text{ pour tout } l \in \mathbf{N}$$

puisque $x_n \perp \operatorname{Ker}(\lambda I - K)$ pour tout $n \geq 0$, on en déduit que

$$z \in \operatorname{Ker}(\lambda I - K)^{\perp}\,.$$

Par conséquent $z = 0$. Mais puisque $\lambda \neq 0$ et que $\lambda z_{k_l} \to Kz$, il s'ensuit que

$$z_{k_l} \to 0 \text{ pour } l \to \infty\,.$$

Or ceci est contradictoire avec le fait que

$$\|z_{k_l}\| = 1 \text{pour tout } l \in \mathbf{N} \text{ par construction de la suite } (z_n)_{n\in\mathbf{N}}\,.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est nécessairement bornée. Il existe donc une sous-suite $(x_{n_p})_{p\to\infty}$ tq.

$$x_{n_p} \rightharpoonup x \text{ pour } p \to \infty\,.$$

Donc

$$(\lambda I - K)x_{n_p} \rightharpoonup (\lambda I - K)x = y \text{pour } p \to \infty\,,$$

ce qui montre que $y \in \operatorname{Im}(\lambda I - K)$. Ainsi on a montré que $\operatorname{Im}(\lambda I - K)$ est fermée.

D'après la proposition 3.5.2 et le corollaire 3.2.4

$$\operatorname{Im}(\lambda I - K) = \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - K)} = (\operatorname{Im}(\lambda I - K)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{Ker}(\lambda I - K^*)^{\perp}\,.$$

■

3.5.3 Les opérateurs de Hilbert-Schmidt

On considère ici le cas particulier où $\mathfrak{H} = L^2(\mathbf{R}^N)$.

Définition 3.5.7 *Un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ est une application linéaire T de la forme*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f(y)dy$$

où $k \in L^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

Vérifions tout d'abord que T est continu : pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dxdy \int_{\mathbf{R}^N} |f(y)|^2 dy\,.$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc T est bien continue sur $\mathfrak{H}$, de norme

$$\|T\| \leq \left(\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dxdy \right)^{1/2}\,.$$

Proposition 3.5.8 *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ est compact.*

Démonstration. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ de noyau intégral $k \equiv k(x,y)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $L^2(\mathbf{R}^N)$ telle que $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$. Montrons que $Tf_n \to 0$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

D'abord, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction $k(x,\cdot)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^N)$: donc, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f_n(y)dy \to 0 \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ pour } n \to \infty\,.$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\left| \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f_n(y)dy \right|^2 \leq \int_{\mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dy \|f_n\|_{L^2}^2\,.$$

Comme $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée ; soit donc

$$M = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\|_{L^2}^2\,.$$

Alors

$$|\int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f_n(y)dy|^2 \leq M^2 \|k(x,\cdot)\|_{L^2}^2$$

et $x \mapsto \|k(x,\cdot)\|_{L^2}^2$ appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$ d'après le théorème de Fubini puisque

$$\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dxdy < \infty\,.$$

Le théorème de convergence dominée entraîne donc que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) f_n(y) dy \right|^2 dx \to 0$$

c'est à dire que

$$T f_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,,$$

cqfd. ■

3.5.4 Application aux équations intégrales

On considère une équation intégrale de la forme

$$\| f(x) - \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) f(y) dy = g(x)$$

où $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ est une fonction donnée, tandis que $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ est l'inconnue. On suppose dans ce qui suit que $k \in L^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

En appliquant l'alternative de Fredholm à l'opérateur de Hilbert-Schmidt (qui est donc compact) défini par

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) f(y) dy\,,$$

on aboutit à ce qui suit.

Soit l'équation homogène

$$\lambda \phi(x) - \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) \phi(y) dy = 0\,;$$

si elle admet pour seule solution la fonction nulle pp. $\phi = 0$, alors l'équation intégrale avec second membre ci-dessus admet une unique solution.

Supposons maintenant que l'équation intégrale homogène admette au moins une solution non nulle.

L'équation intégrale avec second membre n'admet de solution que si la fonction g vérifie la relation de compatibilité

$$\int_{\mathbf{R}^N} \overline{\phi(x)} g(x) dx = 0$$

pour toute solution ϕ de l'équation intégrale homogène.

Auquel cas, l'équation intégrale admet au moins une solution ; de plus toute solution de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et d'une solution arbitraire de l'équation homogène.