LM 201 - TD 4

29 septembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°1.

Exercice 15. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Déjà, si x est multiple de π, alors pour tout entier k, $2kx$ est un multiple pair de π, donc $\cos(2kx) = 1$, et ainsi on a immédiatement $\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = n+1$.

On suppose donc à présent que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a $\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \mathfrak{Re}\big(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}\big)$. On reconnaît en argument de la partie réelle la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de rapport $e^{2ix} \neq 1$ (car $x \notin \pi\mathbb{Z}$). On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) &= \mathfrak{Re}\Big(\frac{e^{2(n+1)ix} - 1}{e^{2ix} - 1}\Big) \\
&= \mathfrak{Re}\Big(\frac{e^{(n+1)ix}}{e^{ix}} \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-(n+1)ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}\Big) \\
&= \mathfrak{Re}\Big(e^{nix} \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x}\Big) \\
&= \frac{\cos(nx)\sin[(n+1)x]}{\sin x},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer, à la faute d'énoncé près.

Exercice 17. Soient (k, ℓ) un couple d'entiers naturels. La formule d'Euler (merci de ne plus jamais oublier le i au dénominateur lorsque vous écrivez un sinus) ou les formules d'addition classiques nous disent que pour tout réel t, $\cos(kt)\sin(\ell t) = \frac{1}{2}\big(\sin[(k+\ell)t] + \sin[(\ell-k)t]\big)$. Il s'agit donc de calculer $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \big(\sin[(k+\ell)t] + \sin[(\ell-k)t]\big)dt$. Or si m est un entier non nul, $\int_0^{\pi} \sin(mt)dt = \big[-\frac{\cos(mt)}{m}\big]_0^{\pi}$, ce qui vaut $\frac{2}{m}$ si m est impair, et est nul si m est pair, et ceci est encore vrai si $m = 0$.

Ainsi, si $\ell + k$ est pair (et donc si ℓ et k ont même parité, et donc si $\ell - k$ est pair), l'intégrale I à calculer est nulle.

Si $\ell + k$ est impair (et donc si ℓ et k ne sont pas de même parité, et donc si $\ell - k$ est impair), l'intégrale I vaut $\frac{1}{2}\big(\frac{2}{\ell+k} + \frac{2}{\ell-k}\big) = \frac{2\ell}{\ell^2-k^2}$.

Exercice 8. Nous allons voir plusieurs techniques pour factoriser P, qui passeront par la recherche de ses racines. Tout d'abord, on cherche des *racines évidentes*, et on remarque que 1 et -1 sont racines.

On peut alors factoriser P par le produit $(X-1)(X+1)$ d'après le lemme de Gauß, $X-1$ et $X+1$ étant premiers entre eux. On parvient, par division euclidienne, ou par identification, à $P=(X-1)^2(X+1)$.

On peut aussi dériver P, et l'on voit que 1 est racine de P', donc racine au moins double de P. On a donc atteint le total des multiplicités, 3, qui est le degré de P, et on en déduit à nouveau la factorisation de P en regardant le coefficient dominant— on retiendra que pour la recherche de racines la dérivation est efficace en petit degré et lorsque l'on a la chance d'avoir un nombre réduit de racines distinctes, ce qu'en général on ignore *a priori*.

Enfin, on peut utiliser ce troisième argument, qui utilise les relations entre coefficients et racines ; P étant unitaire, le produit des racines avec multiplicité vaut $(-1)^{\deg P}P(0)=-1$, et on en déduit que 1 et -1 sont les seules racines de P, 1 de multiplicité 2, -1 de multiplicité 1, et on conclut comme précédemment.

Exercice 10. Les racines de P sont les racines quatrièmes de $-1=e^{i\pi}$, soit $e^{\pm i\pi/4}$ et $e^{\pm 3i\pi/4}$. Elles sont simples (elles sont au nombre de quatre, et P est de degré 4 ; une hypothétique multiplicité supérieure ou égale à 2 est donc absurde), donc P qui est unitaire se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ en :

$$\left(X-e^{i\pi/4}\right)\left(X-e^{-i\pi/4}\right)\left(X-e^{3i\pi/4}\right)\left(X-e^{-3i\pi/4}\right).$$

En regroupant les quantités conjuguées, c'est-à-dire en refaisant le produit des deux premières et des deux dernières parenthèses deux à deux, on obtient le produit de trinômes $\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)$. Ces deux trinômes du second degré ont pour discriminant $-2<0$ donc sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On a donc là la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19. On commence par faire la décomposition en éléments simples, en imaginant un X à la place du k, dans les fractions qui en jeu. Le théorème de décomposition nous dit qu'il existe trois réels (et même trois rationnels) a, b et c tels que $F:=\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ (remarquons qu'il n'y a pas de partie entière) s'écrive $\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}$. On peut procéder alors par identification en remettant tout au même dénominateur. On peut aussi regarder XF, qui s'écrit d'une part $\frac{1}{(X+1)(X+2)}$, et d'autre part $a+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}$, et évaluer en 0 pour avoir $a=\frac{1}{2}$. De même en évaluant $(X+1)F$ en -1 (resp. $(X+2)F$ en -2) il vient $b=-1$ (resp. $c=\frac{1}{2}$).

Ainsi, $F=\frac{1/2}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1/2}{X+2}$, et donc pour tout $k>0$, $F(k)=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1/2}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1/2}{k+2}$. On écrit alors par exemple $S=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)$, *i.e* $S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)$ soit, tous calculs faits, $S=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$.