LM 201 - TD 5

6 octobre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°2 (sauf mention contraire).

Feuille 1, exercice 9 (DM). La somme des coefficients de P est nul, donc 1 en est racine, et par division (l'écrire, ou détailler l'identification) on obtient $P = (X-1)(X^2 - 2X - 2)$. Le discriminant du trinôme vaut $12 \geq 0$; ce trinôme du second degré se scinde donc sur $\mathbb{R}$, et P est donc bien scindé sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $P = (X-1)(X-1-\sqrt{3})(X - 1 + \sqrt{3})$ (mais ceci n'était pas demandé).

D'autre part, -1 est racine de Q (annulation de la somme alternée des coefficients), et Q divisé par $X+1$ vaut $X^2 + X + 1$. Ce dernier trinôme du second degré a pour discriminant -3, et est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Notre polynôme Q n'est donc pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Feuille 1, exercice 23 (DM). On peut déjà supposer $n > 0$, car $P_0 = 0$ (degré $-\infty$, pas de coefficient dominant). D'après la formule du binôme de Newton (valable dans n'importe quel anneau avec des éléments qui commutent), le coefficient de X^n dans $(X+1)^n$ et $(X-1)^n$ est 1 ; les X^n se compensent donc dans P_n et celui-ci est de degré $\leq n-1$. Or toujours par Newton, le coefficient de X^{n-1} est n dans $(X+1)^n$, tandis qu'il est de $-n$ dans $(X-1)^n$, et est donc de $n - (-n) = 2n \neq 0$ dans P_n. Ainsi P_n est de degré $n-1$, de coefficient dominant $2n$, et ce pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1. Un premier examen intuitif de $\frac{n}{n^2+k}$, avec $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$, nous dit que k étant petit devant n^2, $\frac{n}{n^2+k}$ est de l'ordre de $\frac{n}{n^2}$, soit $\frac{1}{n}$; en sommant sur $k = 1, \ldots, n$, on a donc que S_n est de l'ordre de $n \cdot \frac{1}{n}$, c'est-à-dire 1. Précisons cela (J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, chapitre 0, *Majorer, minorer, comparer*). Pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$, on a $n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc en passant à l'inverse, $\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1}$. En sommant sur $k = 1, \ldots, n$, il vient $1 \leq S_n \leq \frac{n}{n+1}$, et l'on en déduit par encadrement que (S_n) tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 2. On remarque que pour $1 \leq k \leq 2n-1$, $n \geq 1$, $2 - \frac{k}{2n} > 1$, et donc U_n est un produit de $2n-1$ facteurs strictement plus grands que 1 ; on ne peut toutefois pas en déduire directement que (U_n) tend vers l'infini, car par exemple $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, produit de n facteurs tous strictement plus grands que 1, tend vers e. On va affiner notre analyse, en remarquant que pour $n+1 \leq k \leq 2n-1$, $2 - \frac{k}{2n} \geq 1$ (ceci reste vrai), tandis que pour $1 \leq k \leq n$, $2 - \frac{k}{2n} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, et c'est gagné puisque l'on peut alors écrire $U_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$, donc (U_n) tend vers l'infini, puisque $\frac{3}{2} > 1$. Quand vous « coupez » comme ceci une somme ou un produit en deux pour mieux cerner le comportement des termes ou produits dans chacune des sommes ou chacun des produits, essayez de couper d'abord au milieu, avant de tenter quelque chose de plus compliqué.

Exercice 3. a) C'est du cours ; puisque l'on a une suite qui est (la suite des sommes partielles d') une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, la suite diverge. Je vous rappelle que ce résultat se démontre par comparaison avec une intégrale, technique donnant souvent des résultats très pointus (donc à bien maîtriser) lorsque l'on travaille sur des séries.
b) Ici, on peut pour tout $n \geq 1$ écrire S_n comme la différence $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Or les deux termes convergent lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite finie (qui est $\frac{\pi^2}{6}$), car on a affaire à la série de Riemann d'exposant $2 > 1$ (entraînez-vous à jongler entre le vocabulaire des suites et celui des séries pour savoir en éviter les écueils). La différence converge donc vers la différence des limites, *i.e.* 0. Sans faire appel à cette théorie des séries de Riemann, on peut, à $n \geq 1$ fixé, majorer chaque $\frac{1}{k^2}$ par $\frac{1}{n^2}$ pour k compris entre $n+1$ et $2n$, et en sommant sur ces k, S_n est donc majorée par $n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ (et minorée par 0) et notre suite tend ainsi vers 0.

Exercice 5. a) On calcule, pour tout $n \geq 1$, la différence $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n =& \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \\ =& \frac{(n-(n+1))u_1 + \cdots + (n-(n+1))u_n + nu_{n+1}}{n(n+1)} \\ =& \frac{-u_1 - \cdots - u_n + nu_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(u_{n+1} - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

et comme (u_k) est croissante, $u_1, \ldots, u_n \leq u_{n+1}$, et donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$, pour tout $n \geq 1$. La suite (v_n) est donc croissante.
b) On écrit $v_{2n} = \frac{(u_1+\ldots+u_n)+(u_{n+1}+\ldots+u_{2n})}{2n} = \frac{v_n}{2} + \frac{u_{n+1}+\ldots+u_{2n}}{2n}$. Toujours par croissance de (u_k), le deuxième terme est plus grand que $\frac{u_n+\ldots+u_n}{2n} = \frac{u_n}{2}$, d'où le résultat.
c) On voit facilement que (v_n) est majorée par (u_n), elle-même majorée par sa limite l pusiqu'elle est croissante. La suite (v_n) étant elle-même croissante, et majorée, elle est donc convergente, de limite disons L, et $L \leq l$. En passant à la limite dans b), il vient $L \geq \frac{L+l}{2}$, soit $L \geq l$, et $L = l$. Ce résultat est vrai aussi si (u_n) n'est pas supposée croissante (mais toujours convergente) : c'est le théorème de Cesàro.