LM 201 - Examen

8 décembre 2012

Durée : 2 heures. Documents et calculatrices interdits ; téléphones portables rangés. Le soin apporté à la rédaction entre pour partie non négligeable dans la notation.

Exercice 1. Calculer, en fonction de n et $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_{n,k} = \int_0^\pi \cos nt \cos kt \, dt$.

Exercice 2. Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $k \leq n$. Montrer que : $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$. En déduire $\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell+1}\binom{n}{\ell}$.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

où pour tout $k \geq 1$, $u_k = \frac{1}{k}$ si $k \equiv 1$ ou $2 \bmod 3$, et $u_k = \frac{-2}{k}$ si $k \equiv 0 \bmod 3$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{\ell=1}^{E(n/3)} \frac{1}{3\ell}.$$

On rappelle que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$ pour une certaine $\gamma \in \mathbb{R}$. En déduire la convergence de (S'_n), et donner sa limite.

Exercice 4. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 5. Décomposer en éléments simples $F = \frac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2}$.

Exercice 6. Vrai ou (en général) faux : une fonction qui admet en un point un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ est n fois dérivable en ce point ? On pourra penser à la fonction f définie par $f(x) = x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

Qu'en est-il, sans justification, du cas $n = 1$?

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $f(0) = 1$, et dérivable en 0. Donner un développement limité de f en 0, et en déduire que $f(x)^{1/x}$ a un sens pour $x > 0$ proche de 0. Justifier l'existence de $\lim_{x \to 0^+} f(x)^{1/x}$, et calculer cette limite.

Exercice 8. Montrer que la fonction argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ est bien définie et est réciproque de la fonction sinus hyperbolique. En justifier la dérivabilité, et en calculer la dérivée.

Exercice 9. Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y'(t) = ty(t)+(1+t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 8 en cours de résolution.

Exercice 10. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. Montrer par un changement de variable adéquat que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta \, d\theta.$$

On admet que (I_n) converge vers $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$; pouvez-vous donner une idée de preuve pour ce fait (facultatif) ?

On rappelle en outre que $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta \, d\theta \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ (intégrales de Wallis). En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.