LM 201
Feuille 1 - Exercices complémentaires

Avertissement : la rédaction de ce corrigé est un peu elliptique par rapport à celle exigée en LM 201. L'utilité de ces corrigés réside donc plutôt en les réponses qu'en la manière dont elles sont écrites.

Exercice 6. a) On calcule le discriminant $\Delta = -4 - 4(-1+2i) = -8i = \big(2(-1+i)\big)^2$, donc les solutions de l'équation sont $\frac{2i+2(-1+i)}{2} = -1+2i$ et $\frac{2i-2(-1+i)}{2} = 1$. Le trinôme se factorise donc en $(X-1)(X+1-2i)$.
b) On calcule $\Delta = 9 - 4 \cdot 2i(-1-3i) = -15+8i = \big(1+4i\big)^2$ d'après l'exercice précédent. L'équation admet pour solutions $-1-i/2$ et $1-i$, et le trinôme se factorise en $2i(X-1+i)(X+1-i/2)$.

Exercice 11. a) C'est un peu comme de la décomposition en éléments simples ; si l'on voit que pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, il n'y a plus qu'à écrire : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout n.
b) C'est encore le binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$, si $n \geq 1$, et 1 si $n = 0$.
c) Si $q = 1$, la somme vaut n. Sinon, $\sum_{k=1}^{n} q^k = q \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 12. a) On part du membre de droite : pour $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, $(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n$.
b) Cette fois, on écrit pour $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n} a^k (-b)^{2n-k}$ d'après a), en remplaçant b par $-b$ et n par $2n+1$. On conclut en notant que pour tout k, $(-1)^{2n-k} = (-1)^k$.

Exercice 13. On remarque que $-16 = 2^4 e^{i\pi}$. Ses racines quatrièmes sont donc les $2e^{i\pi/4}e^{ik\pi/2} = 2e^{(2k+1)pi/4}$, $k = 0, \ldots, 3$.

Exercice 16. a) L'équation est équivalente à : $z-i$ est une racine n-ème de l'unité, soit pour $k=0,\dots,n-1$, $z-i=e^{2ik\pi/n}$, ou encore $z=e^{2ik\pi/n}+i=e^{2ik\pi/n}+e^{i\pi/2}=2\cos\left(\frac{(4k-n)\pi}{4n}\right)e^{i\frac{(4k+n)\pi}{4n}}$, d'après l'exercice 14 (*cf. infra*).
b) Si l'on fait $z=1$, le membre de gauche est nul, tandis que celui de droite vaut 2^n, ce qui est contradictoire, donc $z\neq 1$, le membre de gauche est non-nul, et l'équation est équivalente à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$, soit, pour $k=1,\dots,n-1$, $\frac{z+1}{z-1}=e^{2ik\pi/n}$ (car $\frac{z+1}{z-1}=1$ est absurde), ou encore $z+1=e^{2ik\pi/n}(z-1)$. Cela s'écrit encore $\left(1-e^{2ik\pi/n}\right)z=-\left(1+e^{2ik\pi/n}\right)$, *i.e.*, en factorisant par $e^{ik\pi/n}$ à gauche et à droite, $z=i\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}=i\operatorname{cotan}(k\pi/n)$. Puisque cotan est strictement croissante sur $]0,\pi[$, on a bien $n-1$ racines distinctes et imaginaires pures.

Exercice 18. C'est, à peu de choses près, l'exercice 4.

Exercice 20. Il suffit d'écrire, pour $k\geq 1$, $1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$, et par télescopage on obtient $\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$.

Exercice 21. a) On récrit le produit $(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n)$ soit, en sortant les 2, $2^n\cdot 1\cdots n$, *i.e.* $2^n n!$.
b) On intercale un facteur 2 entre 1 et 3, un facteur 4 entre 3 et 5, et ainsi de suite ; on doit donc rediviser le tout, $1\cdot 2\cdots(2n+1)=(2n+1)!$ par $2\cdot 4\cdots(2n)=2^n n!$, et l'on obtient $\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

Exercice 22. On utilise l'écriture factorielle : $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{p\cdot(p-1)!\left((n-1)-(p-1)\right)!}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Exercice 24. Notons $S(z)$ la somme à calculer ; on a alors $1+zS(z)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}z^k$, soit $(1+z)^n$ par Newton. On a donc, pour $z\neq 0$, $S(z)=\frac{(1+z)^n-1}{z}$ et bien sûr $S(0)=n$.

Exercice 25. Pour la somme, c'est l'exercice 4. Pour le produit, puisque l'exponentielle transforme somme en produit — on dit que c'est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$—, on a $\prod_{k=0}^n e^{2ik\pi/n}=\exp\left(2i(\sum_{k=0}^n k)\pi/n\right)$; or, $\sum_{k=0}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$, donc $\prod_{k=0}^n e^{2ik\pi/n}=e^{i(n+1)\pi}=(-1)^{n+1}$.

Exercice 26. Puisque $1+j+j^2=0$, en sommant les trois lignes on obtient $3x=a+b+c$, soit $x=\frac{a+b+c}{3}$. Si l'on multiplie la seconde ligne par j et la troisième par j^2, z joue le rôle que jouait précédemment x, tandis que jb remplace b et j^2c remplace c, d'où $z=\frac{a+jb+j^2c}{3}$. De même, $y=\frac{a+j^2b+jc}{3}$. Si les solutions sont réelles, alors $\bar{b} = \overline{x + jy + j^2 z} = x + j^2 y + jz = c$, et de même $\bar{a} = a$, a est réel. Réciproquement, si $\bar{b} = c$ et a est réel, $\bar{y} = \overline{\frac{a+j^2b+jc}{3}} = \frac{a+\bar{j^2}\bar{b}+\bar{j}\bar{c}}{3} = \frac{a+jc+j^2b}{3} = y$, donc y est réel, et de même pour z ; quant à x, c'est encore plus immédiat. La CNS recherchée est donc : a réel et $\bar{b} = c$.

Exercice 27. C'est encore la même technique, il faut juste faire un peu plus attention dans les calculs après avoir utilisé la formule du binôme ; on écrit :

$$\begin{aligned}\cos^{2p} x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{(2p-k)ix} e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2(p-k)ix} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2(p-k)ix} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2(p-k)ix} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \left(e^{2(p-k)ix} + e^{-2(p-k)ix} \right) \right)\end{aligned}$$

en utilisant la réindexation $k \to 2p - k$ et l'égalité $\binom{2p}{2p-k} = \binom{2p}{k}$. En remettant les dénominateurs à la bonne place il vient : $cos^{2p}x = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\binom{2p}{k}}{2^{2k}} \cos 2(p-k)x = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\binom{2p}{p+k}}{2^{2(p-k)}} \cos 2kx$.

De même, $\cos^{2p+1} x = \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{2p+1}{p+k+1}}{2^{2(p-k)}} \cos(2k+1)x$.

Exercice 28. 1) Aucun problème pour la définition de cette intégrale, puisque pour tout t, $1 + t^2 \geq 1 > 0$. En outre, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ admet arctan pour intégrale, donc $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.
2) On utilise, pour tout $t \in [0, 1]$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$, car $-t^2 \neq 1$. On intègre entre 0 et 1 ; il vient $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \; dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2} dt}{1+t^2}$, et on remplace la première intégrale par $\frac{\pi}{4}$ d'après le 1).
3) Puisque pour $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \geq 1$, on peut écrire $0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$ pour de tels t. On intègre ensuite l'inégalité entre 0 et 1, et on parvient au résultat en remarquant que $\int_0^1 t^{2n+2} = \frac{1}{2n+1}$.
4) Un rapide calcul dit que le membre de gauche de l'égalité démontrée en 2) vaut pour tout n $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (il suffit d'intervertir $\sum$ et $\int$). Il s'agit donc de voir ce qui se passe dans cette égalité lorsque l'on fait tendre n vers l'infini. Or, d'après 3), l'intégrale du membre de droite est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{2n+1}$, et tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit que le membre de droite tend donc vers $\frac{\pi}{4}$, et la limite recherchée existe et vaut $\frac{\pi}{4}$.