Géométrie algébrique réelle

2021

I Variétés algébriques réelles.

Objet d'étude : variétés algébriques réelles, supposées proj. lisses de dim. d.

$$X \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$$
$$= \{F_1 = \dots = F_m = 0\}, \qquad F_i \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_{N+1}] \text{ homogènes.}$$

A Point de vue analytique

$X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ les points complexes (solutions complexes), muni de la topologie euclidienne

$= \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \mid F_i(x) = 0 \ \forall i\}$

Prop : $X(\mathbb{C})$ est une variété analytique complexe compacte de dim complexe d (réelle $2d$).

Preuve : • $X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ compact car fermé d'un compact.

• $x \in X(\mathbb{C})$ $\quad x \in \mathbb{C}^N \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ carte affine.

$$\mathbb{C}^N \cap X(\mathbb{C}) = \{\underbrace{f_1 = \dots = f_m}_{\text{déshomogénéisation des } F_i} = 0\}$$

Par critère jacobien de lissité, $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j} = N-d$. Réordonnant les f_i, $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1 \le i \le N-d \\ j}} = N-d$. Soit $Y = \{f_1 = \dots = f_{N-d} = 0\} \subseteq \mathbb{C}^N$, $Y \supseteq X \cap \mathbb{C}^N$.

Par critère jacobien de lissité, Y est lisse de dim d dans un voisinage U (Zariski) de x.

Comme toute sous-variété stricte de $Y \cap U$ a dimension $< d$, on a $X \cap U = Y \cap U$.

Finalement, $X = \{f_1 = \dots = f_{N-d} = 0\}$ dans un voisinage de x. C'est le lieu des zéros d'une submersion holomorphe $\mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^{N-d}$, donc une variété analytique complexe.

B Involutions antiholomorphes

$$G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \sigma\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

σ : conjugaison complexe.

$G \curvearrowright \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ par $\sigma([x_0 : \dots : x_N]) = [\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_N]$.

C'est une involution antiholomorphe

$\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$ — différentiable $\mathbb{C}$-antilinéaire en tout point.

Comme les F_i sont à coefficients réels, σ préserve $X(\mathbb{C})$, et induit donc une involution antiholomorphe de $X(\mathbb{C})$.

Déf : Une variété analytique complexe G-équivariante est une variété analytique complexe avec action de G telle que σ agisse de manière antiholomorphe.

ex : $X(\mathbb{C})$.

Les deux points de vue algébrique / analytique sont équivalents

Th (GAGA réel) : Il y a une équivalence de catégories

$$\{\text{var. algébriques projectives lisses sur } \mathbb{R}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{var. analytiques complexes } G \text{ équivariantes projectives}\}$$

$$X \longmapsto X(\mathbb{C})$$

Preuve : plus tard.

C Points réels

$X(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ les points réels (= solutions réelles)

$\{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{R}) \mid F_i(x) = 0 \ \forall i\}$

On a $X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C})^G$, car $\mathbb{P}^N(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})^G$.

$X(\mathbb{R})$ est une variété C^∞ compacte de dim réelle d
car fermé dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$.

En effet :

Prop : Soit $G \curvearrowright Z$ une variété analytique complexe G-équivariante de dim $\mathbb{C}$ d. Alors $Z^G \subseteq Z$ est une ss-variété C^∞ de dim réelle d.

Preuve : $x \in Z^G$. L'inv. $d_x\sigma : T_xZ \to T_xZ$ est $\mathbb{C}$-antilinéaire, donc a d valeurs propres $+1$ et d valeurs propres -1 (car $i : (T_xZ)_1 \xrightarrow{\sim} (T_xZ)_{-1}$)

$$\text{Soit } \underset{d_x\sigma}{\overset{T_xZ}{\circlearrowleft}} \xrightarrow[\sim\ G\text{-éq}]{(\phi_1,\dots,\phi_d,\psi_1,\dots,\psi_d)} \underset{+1}{\overset{\mathbb{R}^d}{\circlearrowleft}} \oplus \underset{-1}{\overset{\mathbb{R}^d}{\circlearrowleft}}$$

Soit $x \in U \subseteq Z$ petit ouvert. Remplaçant U par $U \cap \sigma(U)$, on le suppose G-invariant.

Soit $f_i, g_i : U \to \mathbb{R}$ C^∞ avec $d_xf_i = \phi_i$ et $d_xg_i = \psi_i$.

Posons $f_i' = \dfrac{f_i + f_i\circ\sigma}{2}$ et $g_i' = \dfrac{g_i - g_i\circ\sigma}{2}$.

$d_xf_i' = d_xf_i = \phi_i$ $\qquad d_xg_i' = d_xg_i = \psi_i$.

Alors $U \xrightarrow{(f',g')} \underset{+1}{\overset{\mathbb{R}^d}{\circlearrowleft}} \oplus \underset{-1}{\overset{\mathbb{R}^d}{\circlearrowleft}}$ difféo local G-équivariant.

Ainsi, quitte à restreindre U, $Z^G \cap U \subseteq Z$ ss-var C^∞ de dim d.

ex 1 : $\mathbb{P}^N(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

ex 2 : $X(\mathbb{R})$ peut être vide ! Par exemple si $X = \{X_0^2 + \dots + X_N^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$

ex 3 : $X(\mathbb{R})$ peut être de dim $\oplus$ petite, ou pas une variété, si X n'est pas lisse.
Par exemple, $X = \{X_1^2 + \dots + X_N^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^N \leadsto X(\mathbb{R}) = \{[1:0\dots:0]\}$.

Le point de vue algébrique est adapté aux questions algébriques,
e.g. étude des fonctions algébriques ≥ 0 sur $X(\mathbb{R})$.

17^e problème de Hilbert : écrire des fonctions algébriques ≥ 0 comme sommes de carrés.

Th (Artin 1927) : $F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tel que $F(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$.
Alors F est somme de carrés dans $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_N)$.

Le point de vue analytique est adapté aux questions topologiques,
e.g. topologie de $X(\mathbb{R})$.

16^e problème de Hilbert : classifier les topologies de $X(\mathbb{R})$ possibles pour une classe donnée de variétés.

Un des buts du cours est d'expliquer :

Th (Nash-Tognoli 1973) : Soit M une variété C^∞ compacte de dim. d.
Alors il existe une var proj. lisse $X/\mathbb{R}$ avec $X(\mathbb{R}) \underset{\text{difféo}}{\simeq} M$.

C'est remarquable car la topologie de $X(\mathbb{C})$ est très contrainte !
(ex : par théorie de Hodge, $\dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ est pair).

En revanche, et c'est un des buts du cours, la théorie de Hodge influe beaucoup sur la topologie des sous-variétés algébriques de X, i.e. des $N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ss-var } C^\infty}}{\subseteq} M$ avec $N = Y(\mathbb{R})$, $Y \subseteq X$.

D Formes réelles

Fixons une variété analytique complexe projective Z.

Def : Une *forme réelle* de Z est une variété algébrique réelle projective lisse X telle que $X(\mathbb{C}) \simeq Z$.

On dit que deux formes réelles X et X' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $X \simeq X'$ de variétés algébriques réelles.

Prop : $\{\text{formes réelles de } Z\} / \text{équivalence} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{involutions antiholomorphes} \\ \text{de } Z \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{l} \text{conjugaison par des} \\ \text{automorphismes holomorphes de } Z \end{array}$

Preuve : Une forme réelle donne bien lieu à une involution, bien définie modulo automorphismes holomorphes de Z.

Surjectivité : Une involution antiholomorphe donne lieu, par GAGA réel, à une forme réelle de Z.

Injectivité : Deux formes réelles X et X' dont les involutions antiholomorphes σ et σ' sont conjuguées ($\sigma' = f \sigma f^{-1}$) sont équivalentes. En effet, $\sigma' f = f \sigma$, donc $(Z, \sigma) \xrightarrow[\sim]{f} (Z, \sigma')$ est G-équivariant, de sorte que f provient de

$$X \xrightarrow[\sim]{g} X'$$ par l'équivalence de catégories.

Une variété an cx projective Z peut avoir $0, 1, 2, \ldots$ formes réelles distinctes.

ex : l'union de deux points $\cdot \;\; \cdot = Z$ a deux formes réelles et

Elles correspondent aux variétés algébriques $\{XY = 0\} \subseteq \mathbb{P}^1$: $[1:0]$ et $[0:1]$

et $\{X^2 + Y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^1$ $[1:i]$ et $[1:-i]$

Et même :

Th (Lesieutre 2018) Il existe une var proj cplexe Z avec une infinité de formes réelles distinctes.