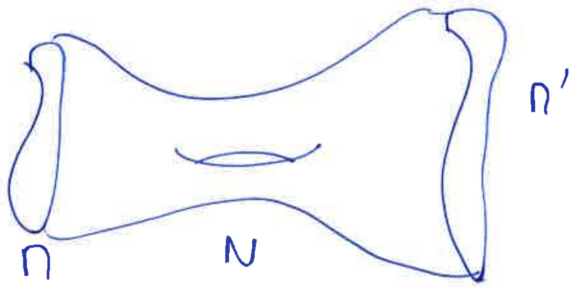
① Cobordisme

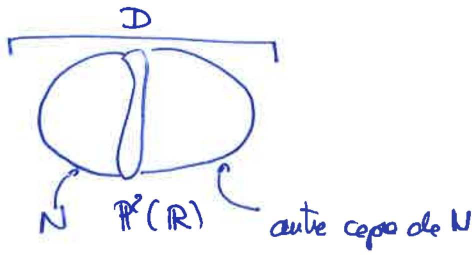
Def : Deux variétés C^∞ compactes M et M' de dimension d sont cobordantes si $\exists\, N$ C^∞ compacte à bord avec $\partial N = M \amalg M'$.



ex : S^1 cobordant au vide

ex : M cobordant à M car $\partial(M \times [0,1]) = M \amalg M$.

ex : $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ pas cobordant au vide. Sinon, on forme le "double" D de N :



et on calcule $\chi(D) = 2\chi(N) - \chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \equiv 1\,[2]$. Absurde par dualité de Poincaré pour D !

Def : on note $MO_d = \{$variétés C^∞ compactes de dim $d\} / $cobordisme.

C'est un groupe pour la somme disjointe.

On pose $MO_* = \bigoplus_d MO_d$: c'est un anneau pour le produit cartésien, gradué par la dimension. Comme $2M = 0\ \forall M$, c'est même une $\mathbb{Z}/2$-algèbre graduée.

Prop : On a $MO_0 = \mathbb{Z}/2$, $MO_1 = 0$, $MO_2 = \mathbb{Z}/2$, $MO_3 = 0$

nombre de points

S^1 cobordant à 0

classification des surfaces
+ les surfaces orientables sont des bords
+ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ cobordant à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \amalg \dots \amalg \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

NONTRIVIAL (Rokhlin ?) peut-être réf. précise = Thom

(plus généralement, en faisant la somme connexe de $M \times [0,1]$ et $N \times [0,1]$, on voit que $M \# N$ cobordant à $M \amalg N$).

Plus généralement, on sait calculer MO_* :

Th (Thom) : $MO_* = \mathbb{Z}/2\,[x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, \dots]$

est un anneau de polynômes en les $(x_i)_{i \neq 2^k-1}$ de degré i.

On connaît même des générateurs pour MO_* :

Th (Milnor) : Notons $H_{n,m}(\mathbb{R}) = \{ (x,y) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \}$

Alors $MO_* = \langle H_{n,m}(\mathbb{R}) \rangle_{0 \leq n \leq m}$.

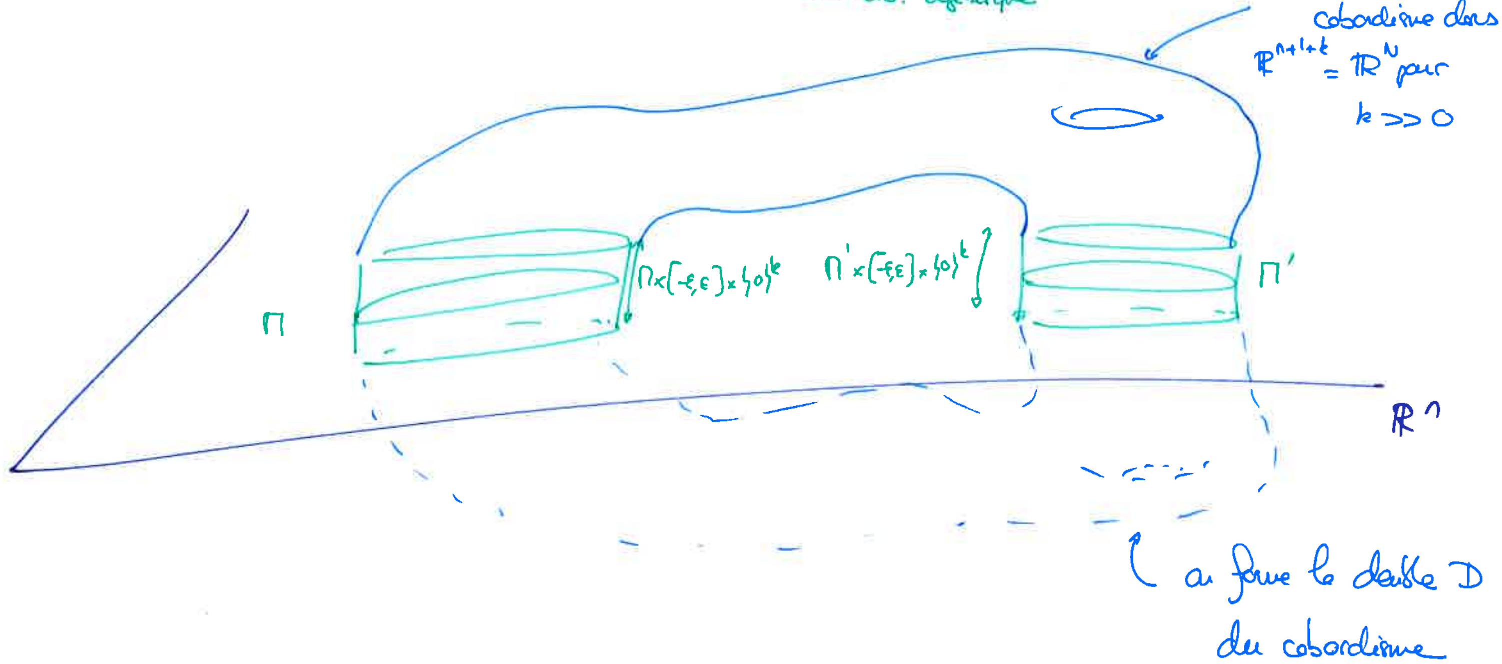
Corollaire : MO_* est engendré par des ensembles algébriques non singuliers

C'est cela que l'on va utiliser ! On l'admet

E Se débarrasser des composantes connexes parasites [Tognoli]

M C^∞ compacte. On fixe, par Milnor, un cobordisme entre M et un ensemble algébrique non singulier compact M'. Pour $n >> 0$, on a $M, M' \subseteq \mathbb{R}^n$ disjoints

ens. algébrique



On applique le théorème de Nash à D, et son amélioration à l'ensemble algébrique non singulier $M' \subseteq D$.

On déduit qu'il existe $\tau : D \longrightarrow \mathbb{R}^{N+m}$ $\begin{cases} \text{proche de } (Id, 0) \\ \text{égal à } (Id, 0) \text{ sur } M' \end{cases}$ tel que τ est un difféo entre D et une composante connexe non singulière d'un ensemble algébrique $W \subseteq \mathbb{R}^{N+m}$.

Alors l'hypersurface C^∞ $\underbrace{\tau(M) \amalg \tau(M')}_{= H} \subseteq W$ satisfait $[H] = 0 \in H^1(W, \mathbb{Z}/2)$ car c'est un bord. On a donc $[\tau(M)] = [\tau(M')] \in H^1_{alg}(W, \mathbb{Z}/2)$ car $\tau(M')$ ensemble alg. non singulier.

Par théorème d'approximation algébrique des hypersurfaces C^∞, il existe une petite perturbation $M'' \subseteq W$ de $\tau(M)$, qui est donc difféo à M, et qui est un ensemble algébrique non singulier.

Cela conclut !

F Quelques problèmes et questions ouvertes.

- On a vu que toute M C^∞ compacte est de la forme $X(\mathbb{R})$, X proj. lisse $/\mathbb{R}$.

<u>Question ouverte</u> : Quels $f : M \longrightarrow N$ C^∞ (C^∞ compactes) peuvent être approchés, pour la topologie C^∞, par des $g(\mathbb{R}) : X(\mathbb{R}) \longrightarrow Y(\mathbb{R})$, $g : X \longrightarrow Y$ morphisme de variétés proj. lisses $/\mathbb{R}$?

<u>Remarques</u> : vrai si f plongement.
on ne sait pas si c'est vrai si f immersion (non nécessairement injective).
on sait que c'est pas le cas pour tous les f.

- Si on fixe la structure algébrique sur N, i.e. un Y proj. lisse tq $N \overset{\text{difféo}}{\simeq} Y(\mathbb{R})$, alors on a une réponse complète.

<u>Déf</u> : $f_1 : M_1 \longrightarrow N$ et $f_2 : M_2 \longrightarrow N$ (C^∞ compactes) sont <u>cobordantes</u> si il existe C C^∞ compacte à bord et $\Phi : C \longrightarrow N$ C^∞ avec $\partial C = M_1 \amalg M_2$ et $\partial\Phi = f_1 \amalg f_2$

On note $MO_d(N)$ le groupe $\{ f : M \xrightarrow{C^\infty} N \} /_{\text{cobordisme}}$ (M C^∞ compacte de dim. d). $\left(MO_d = MO_d(pt) \right)$

Si $N = Y(\mathbb{R})$, on note $MO_d^{alg}(Y(\mathbb{R})) \subseteq MO_d(Y(\mathbb{R}))$ le sous-groupe engendré par les $g(\mathbb{R}) : X(\mathbb{R}) \longrightarrow Y(\mathbb{R})$, $g : X \longrightarrow Y$ morphisme de variétés proj. lisses $/\mathbb{R}$.

<u>Th</u> (Akbulut-King 81) : Y proj. lisse $/\mathbb{R}$, M C^∞ compacte, $f : M \longrightarrow Y(\mathbb{R})$ C^∞. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) On peut approcher f par des applications de la forme $g(\mathbb{R}) : X(\mathbb{R}) \longrightarrow Y(\mathbb{R})$, ($M \simeq_{\text{difféo}} X(\mathbb{R})$), $g : X \to Y$ algébrique.

(ii) $[f] \in MO_d^{alg}(Y(\mathbb{R}))$.

<u>Remarque 1</u> : Si $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{R} = \{*\}$, c'est presque Nash-Tognoli (il faut juste savoir que MO_d est engendré par des $X(\mathbb{R})$ (Thom, Milnor))

<u>Remarque 2</u> : la preuve est identique à la preuve de Nash-Tognoli, en appliquant Stone-Weierstrass non pas à $U \xrightarrow{\text{Gauss}} E$ (U voisinage tubulaire, E fibré tautologique) mais à $U \xrightarrow[(\gamma, F)]{} E \times Y(\mathbb{R})$ où F étend $f : M \longrightarrow Y(\mathbb{R})$.

• Le groupe $MO_d^{alg}(X(\mathbb{R}))$ peut aussi être utile pour les problèmes d'approximation de sous-variétés.

Pour que $M \overset{i}{\subseteq} X(\mathbb{R})$ soit approximable, il <u>faut</u> que $[M] \in MO_d^{alg}(X(\mathbb{R}))$.

C'est une condition plus forte que la condition $[M] \in H_d^{alg}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

<u>Question ouverte</u> (Kucharz–Kurdyka) : X proj. lisse $/\mathbb{R}$, $M \subseteq X(\mathbb{R})$ C^∞ compacte. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) $[i : M \hookrightarrow X(\mathbb{R})] \in MO_d^{alg}(X(\mathbb{R}))$.

(ii) Pour tout voisinage $\mathcal{U} \subseteq C^\infty(M, X(\mathbb{R}))$ de i, il existe $j \in \mathcal{U}$ et une sous-variété algébrique $Y \subseteq X$ dont le lieu lisse et $Y^{lisse} \subseteq Y$, tels que

$$j : M \xrightarrow[\text{difféo}]{\sim} Y^{lisse}(\mathbb{R}).$$