

VI Géométrie algébrique

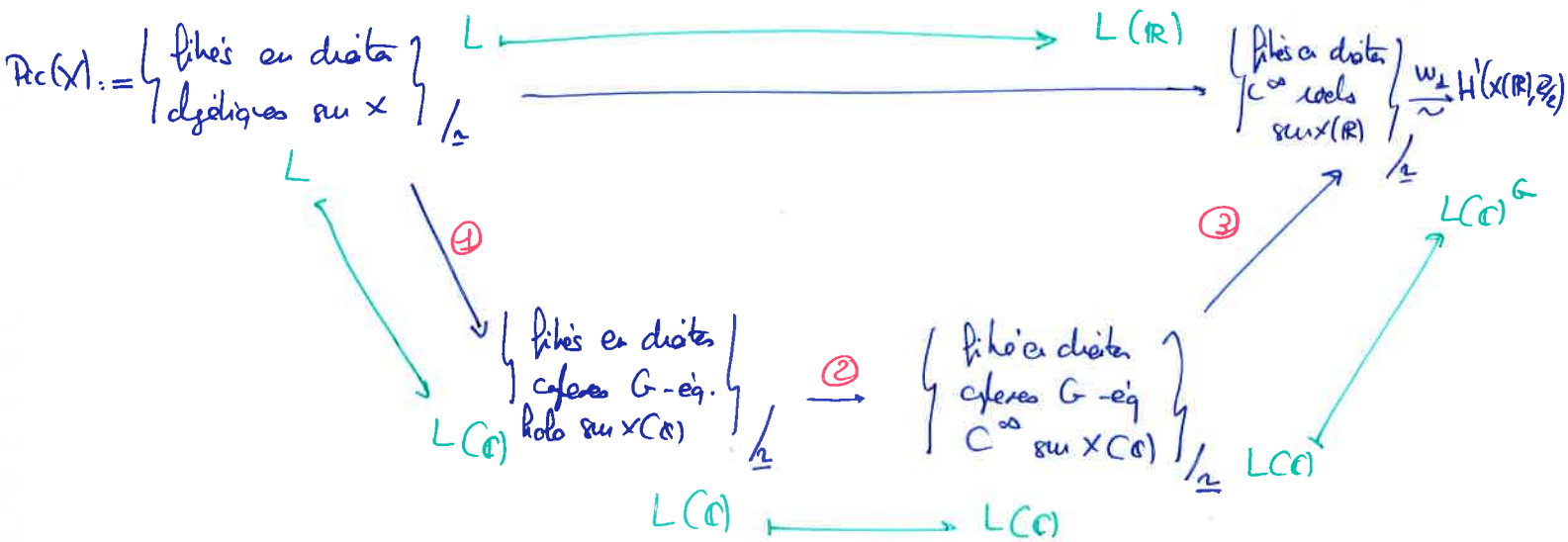
Pour pouvoir utiliser en pratique le :

th : X pg. lisse / \mathbb{R} , $H \subseteq X(\mathbb{R}) \subset C^\infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) H admet une géométrie algébrique

(ii) $[H] \in H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

il faut savoir calculer / contrôler $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, défini comme l'usage de :



Pour cela on étudie séparément ①, ② et ③.

GAGA

théorie de Hodge

topologie

A GAGA pour les fibres en droite.

th : l'application ① est bijective.

Preuve : On l'a déjà vu dans le Chapitre GAGA. On se ramène à l'étape c) ci-dessous

Th (Sere) : X proj. lisse / \mathbb{C} . On a une bijection (équivalence de catégories) :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{fibres en droite algébriques} \\ \text{sur } X \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{fibres en droite algébriques} \\ \text{holomorphes sur } X(\mathbb{C}) \end{array} \right\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{\quad} & L(\mathbb{C}) \end{array}$$

en interprétant les fibres en droite algébriques G -équivalents sur X comme un faisceau de G -algèbres de modules sur \mathbb{R} défini sur \mathbb{C} muni d'un isomorphisme avec le "fibré conjugué".

B Exemples avec $H_{alg}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$

En revanche ② et ③ peuvent se pas être surjectives.

"théorie de topologie"

• Th (Lefschetz) : $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{m+1}$, $m \geq 3$, hypersurface lisse.

$$\text{Alors } \text{Pic}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{m+1}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)$$

" \cong $G(1)$

ex: Si $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)^a$, $a \geq 2$ possible: prends $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ avec $X(\mathbb{R}) \simeq S^1 \times S^1 \times S^1$ à l'aide de théorie d'opérations par les hypersurfaces C^∞ .

alors $\mathbb{Z} \simeq \text{Pic}(X) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)^a$ non surjectif

donc $H_{alg}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

Dans cet exemple, c'est ③ qui n'est pas surjective!

"théorie de Hodge"

• Th (Noether-Lefschetz): $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ hypersurface lisse de degré $d \geq 4$ très générale (hypothèse vraie pour un ensemble dense de $F \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]_d$)

$$\text{Alors } \text{Pic}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)$$

" \cong $G(1)$

ex: Si de plus $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)^a$, $a \geq 2$

alors $H_{alg}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$

possible, toujours par le th d'opérations par les hypo. On peut par ex avoir $X(\mathbb{R}) \simeq S^1 \times S^1$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Dans cet exemple, c'est ② qui n'est pas surjective!

Fibrés holomorphes vs fibrés C^∞

• Si \mathcal{F} ^{de pages abéliennes} faisceau sur espace topologique E , on définit $H^i(E, \mathcal{F})$, $i \geq 0$, avec les facteurs abéliens de $\left\{ \begin{array}{l} \text{faisceaux de pages} \\ \text{abéliens sur } E \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sections globales}} \left\{ \begin{array}{l} \text{pages} \\ \text{abéliennes} \end{array} \right\}$
 $\mathcal{F} \xrightarrow{\hspace{10em}} H^0(E, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(E)$

• On peut aussi définir, plus concrètement, la cohomologie de Čech de \mathcal{F} , avec suit.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de E . On définit

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i_0 < \dots < i_q} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}) \leftarrow \text{cochaînes de Čech}$$

$$\downarrow d$$

$$C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i_0 < \dots < i_{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{q+1}})$$

où $(d\alpha)_{i_0, \dots, i_{q+1}} = \sum_j (-1)^j \alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{q+1}}$, où on pose

cohomologie de Čech associée à \mathcal{U} $\rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Ker}[d: C^q \rightarrow C^{q+1}] / \text{Im}[d: C^{q-1} \rightarrow C^q]$

cohomologie de Čech $\rightarrow \check{H}^q(E, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

On a une application $\check{H}^q(E, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(E, \mathcal{F})$ qui est très souvent un isomorphisme (TOUJOURS si $q=0, 1$).

Soit L fibré en droites classes C^∞ . Soit $U_i \subseteq X(C)$ ouvert avec $L|_{U_i} \cong U_i \times C$.

et champs de transformations $(U_j, \nu_j) \xrightarrow{p_{ij}} (U_i, \nu_i) \times C$

$(e_c^\infty)^*(U_j, \nu_j)$
 faisceau des fonctions C^∞ à valeurs complexes non nulles.

Les (p_{ij}) font un cocycle de Čech et ont donc une classe $\in H^1(\mathcal{U}, (e_c^\infty)^*)$

Cela définit un isomorphisme $\left\{ \begin{array}{l} \text{fibrés en droites classes} \\ C^\infty \text{ sur } X(C) \end{array} \right\} \xrightarrow{\cong} H^1(X(C), (e_c^\infty)^*)$

De même, $\left\{ \begin{array}{l} \text{fibrés en droites classes} \\ \text{holomorphes sur } X(C) \end{array} \right\} \xrightarrow{\cong} H^1(X(C), \mathcal{O}_{X(C)}^*)$
 faisceau des fonctions holomorphes inversibles.

Pour calculer ces groupes, on considère les suites exactes de faisceaux "exponentielle":

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\pi i} & e_c^\infty & \xrightarrow{\exp} & (e_c^\infty)^* \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{ou } 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\pi i} & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0 \end{array}$$

surjectif car, local, on peut choisir une branche du logarithme.

} cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & H^1(X(C), e_c^\infty) & \rightarrow & H^1(X(C), (e_c^\infty)^*) & \xrightarrow{\cong} & H^2(X(C), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X(C), e_c^\infty) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & \uparrow \\ & & H^1(X(C), \mathcal{O}_X) & \rightarrow & H^1(X(C), \mathcal{O}_X^*) & \rightarrow & H^2(X(C), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X(C), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Argument de partition de l'unité.
 Si (p_j) partition adaptée à U_j ,
 et si $\alpha \in C^q(\mathcal{U}, e_c^\infty)$ tq $d\alpha = 0$,
 alors $\alpha = d\beta$ pour
 $\beta_{i_0, \dots, i_{q-1}} = \sum_j p_j \alpha_{i_0, \dots, i_{q-1}, j}$

||
 ↳ fibrés holomorphes ↳
 ↳ fibrés C^∞ ↳
 ↳ restriction à ce qui est fibré C^∞ ait une structure holomorphe.

On a besoin de variété équivariante!

Si $G = \mathbb{Z}/2$, $G \curvearrowright E$, et \mathcal{F} faisceau G -équivariant de types de fibres sur E

[donnée de $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sigma^*} \mathcal{F}(\sigma^{-1}(U))$ tq $\sigma^* \circ \sigma^* = \text{Id}$]

on définit $H_G^q(E, \mathcal{F})$ comme l'anneau des sections des \mathcal{F} G -équivariants abéliens sur E \longrightarrow $\mathcal{F}(E)^G$

et $H_G^q(E, \mathcal{F})$ comme $\varinjlim_{U=(U_i)_{i \in \mathbb{Z}/2}, G\text{-invariant}} H_G^q(U, \mathcal{F})$
 $L = \text{Ker}[d: (\mathbb{C}^q)^G \rightarrow (\mathbb{C}^{q+1})^G] / \text{Im}[d: (\mathbb{C}^{q-1})^G \rightarrow (\mathbb{C}^q)^G]$

On a encore des suites exactes exponentielles:

\mathbb{Z} agit par -1

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}(\pm) \xrightarrow{2i\pi} \mathcal{E}_\sigma^\alpha \xrightarrow{\text{exp}} (\mathcal{E}_\sigma^\alpha)^* \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}(1) \rightarrow G_{x(\sigma)} \rightarrow G_{x(\sigma)}^* \rightarrow 0$$

de faisceaux G -éq,

et, en adoptant les arguments au début:

\mathcal{H} fibres ex/dates q les G -éq / \mathcal{H} fibres ex/dates q les \mathbb{C}^* -éq

$$H_G^1(X(\sigma), G_{x(\sigma)}^*) \xrightarrow{\textcircled{2}} H_G^2(X(\sigma), \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H_G^2(X(\sigma), G_{x(\sigma)})$$

|| GAGA réel
 $H^2(X, G_x)$
 ↗
 distinction à ce qu'un fibré \mathbb{C}^* ait une structure holomorphe.

cette flèche est celle qui apparaît en théorie de Hodge.

Pour ce qui est de $\textcircled{2}$ est surjective si $H^2(X, G_x) = 0$.

D) Restriction au lieu réel

Il reste à comparer

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fibrés en droites complexes} \\ C^\infty G\text{-éq sur } X(\mathbb{C}) \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{③}]{L(\mathbb{C}) \longleftarrow L(\mathbb{R})} \left. \begin{array}{l} \text{Fibrés en droites réels} \\ C^\infty \text{ sur } X(\mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

$$\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$H_G^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \qquad \qquad \qquad H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

Cette flèche peut être décrite topologiquement comme suit: Notes $S^\infty = \bigcup_{n \geq 0} S^n \xrightarrow{\text{carrés}} \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$H_G^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H_G^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_G^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

\downarrow ← invariance par homotopie
 $H_G^2(X(\mathbb{R}) \times S^\infty, \mathbb{Z}/2)$
 \parallel ← G - G $X(\mathbb{R}) \times S^\infty$ sous point fixe
 $H^2(X(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$
 \parallel K\"{a}mmerer
 $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$
 \downarrow
 $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$

\searrow ③

Preuve: Tout fibré ~~complexe~~ en droites sur $X(\mathbb{C})$ est quotient d'un fibré vectoriel complexe G -éq trivial: construction des sections "bump" = "plateau" localisés.

On déduit que L provient par pull-back des fibrés topologiques sur $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. On se ramène donc au cas $X = \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$.

Comme l'inclusion $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ induit

$$H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \simeq H^1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

$$H_G^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \simeq H_G^2(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))$$

etc

on est donc ramené au cas où $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, où c'est un calcul.

$\left[\text{On se ramène à vérifier que le fibré } C^\infty \text{ complexe } G\text{-éq } \begin{array}{c} G(\pm 1) / \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \end{array} \text{ est trivial} \right]$