III) Courbes algébriques réelles.

Courbes algébriques proj. lisses $/\mathbb{C}$ $\xleftrightarrow[\text{de Riemann}]{\text{th. d'existence}}$ Surfaces de Riemann compactes.

Pour celles qui sont connexes, un invariant discret : le genre g.

$g = 0$ | $g = 1$ | $g \geqslant 2$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ | courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda \leftarrow$ réseau $\simeq \mathbb{Z}^2$ | quotients du disque unité.

A) Genre 0, i.e. formes réelles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$?

Point de vue analytique.

Lemme : $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = PGL_2(\mathbb{C})$. (où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{C})$ agit par $[x:y] \longmapsto [ax+by : cx+dy]$)

Preuve : Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Quitte à composer avec un élément de $PGL_2(\mathbb{C})$, qsq $f(\infty)=\infty$.

Alors $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction entière qui a au plus un pôle à l'infini,

i.e. $|f(z)| \leqslant C|z|^N$ pour $|z| >> 0$, C, N constantes.

Ecrivons $f(z) = \sum a_n z^n$. Si $n \geqslant N+1$ et $r >> 0$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \quad \text{donc} \quad |a_n| \leqslant \text{cste} \cdot r \frac{r^N}{r^{N+2}} = \frac{\text{cste}}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

Donc f est un polynôme. Comme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijection, ce polynôme est de degré 1, donc $\in PGL_2(\mathbb{C})$.

Prop : Il y a deux classes d'équivalence de formes réelles sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

(i) $z \longmapsto \bar{z}$ (points fixes : $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$)

(ii) $z \longmapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ (points fixes : $\emptyset$)

Preuve : Soit $\sigma : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ involution antiholomorphe.

Comme $\sigma \neq Id$, $\exists\, x$ tq $\sigma(x) \neq x$.

Soit $\phi \in PGL_2(\mathbb{C})$ tq $\begin{cases} \phi(0) = x \\ \phi(\infty) = \sigma(x) \end{cases}$. Remplaçons σ par $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$, qpsq $\begin{cases} \sigma(0) = \infty \\ \sigma(\infty) = 0 \end{cases}$.

Comme $\bar{\sigma} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ biholo, $\bar{\sigma} \in PGL_2(\mathbb{C})$ et échange 0 et ∞.

Ainsi, $\bar{\sigma}(z) = \frac{\alpha}{z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc $\sigma(z) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}}$.

Comme $\sigma \circ \sigma = Id$, $\frac{\bar{\alpha} z}{\alpha} = z \; \forall z \implies \alpha \in \mathbb{R}$.

Conjuguer par $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{C})$ change α en $\frac{\alpha}{\beta\bar{\beta}}$: qpsq $\alpha \in \{\pm 1\}$.

Ainsi, il y a au plus deux classes d'équivalence de formes réelles :

$$\underbrace{z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}}_{\text{conjugué à } z \longmapsto \bar{z}} \qquad \text{et} \qquad z \longmapsto -\frac{1}{\bar{z}}$$

Point de vue algébrique :

$X/\mathbb{R}$ courbe projective lisse de genre 0

Considérons le fibré en droites algébrique $\mathcal{L} = -K_X = T_X$

[Sur $\mathbb{C}$, $X_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(2) \qquad H^0(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}.x^2 \oplus \mathbb{C}xy \oplus \mathbb{C}y^2$$

le fibré $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ plonge $X_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})^\vee \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$[x:y] \longmapsto [\underset{a}{\underset{\shortparallel}{x^2}} : \underset{b}{\underset{\shortparallel}{xy}} : \underset{c}{\underset{\shortparallel}{y^2}}]$$

comme la conique d'équation $\{b^2 = ac\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.]

Ainsi, $\dim H^0(X, \mathcal{L}) = 3$ et $\mathcal{L}$ plonge $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ comme une conique.

Par classification des formes quadratiques réelles, plusieurs possibilités :

- $X = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ $\rightsquigarrow$ $X(\mathbb{R}) = \emptyset$
- $X = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ $\rightsquigarrow$ $X(\mathbb{R}) = S^1$ $(X \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$
- $X = \{x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$
- $X = \{-x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$

iso iso

(L'argument est général : sur tout corps, les courbes de genre 0 sont les coniques)

B Courbes elliptiques

Déf: Une courbe elliptique est une courbe de genre 1 avec un point. (on exclut donc les variétés sans points rationnels)

Point de vue analytique, cas complexe

Les courbes elliptiques sont de la forme $(\mathbb{C}/\Lambda, 0)$, $\underset{\mathbb{Z}^2}{\overset{}{\Lambda}} \subset \mathbb{C}$ réseau.

À changement de coordonnées près, qpsq $\Lambda = \mathbb{Z}.1 \oplus \mathbb{Z}.\tau$, $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$

Lemme: Tout isomorphisme $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow[\sim]{f} \mathbb{C}/\Lambda'$ est induit par une bijection linéaire $\mathbb{C} \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathbb{C}$ tq $\alpha\Lambda = \Lambda'$.

Preuve:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\ \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r, "f", "\sim"'] & \mathbb{C}/\Lambda' \end{tikzcd}$$

(avec $\tilde{f}(0) = 0$)

$\forall \lambda \in \Lambda$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists \lambda'(\lambda, z) \in \Lambda'$ tel que $\tilde{f}(z+\lambda) = \tilde{f}(z) + \lambda'$

indépendant de z car Λ' discret.

Donc $\tilde{f}'(z+\lambda) = \tilde{f}'(z)$.

Ainsi $\tilde{f}'$ est holomorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda$, donc constante par principe du maximum. Et $\tilde{f}$ est linéaire.

Lemme: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\tau'\mathbb{Z} \iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ tq $\tau = \dfrac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$.

Preuve:

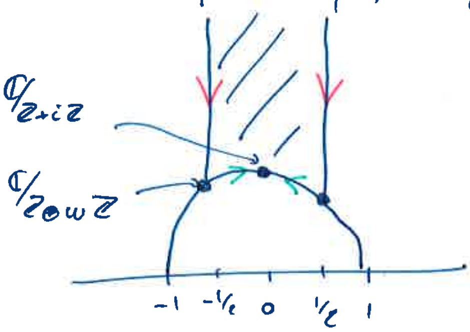
$\iff \exists \alpha \in \mathbb{C}^*$ tq $\alpha(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\tau'\mathbb{Z}$

$\iff \exists \alpha \in \mathbb{C}^*$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $\begin{cases} \alpha = c\tau' + d \\ \alpha\tau = a\tau' + b \end{cases}$

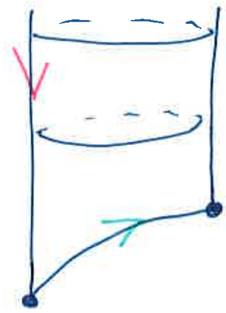
$\iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $\tau = \dfrac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$

nécessairement dans $SL_2(\mathbb{Z})$ pour que $\operatorname{Im}(\tau) > 0$.

Ainsi $\{\text{courbes elliptiques complexes}\}/_{\simeq} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$. On a un domaine fondamental:



, de sorte que $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z}) \simeq$



Point de vue analytique, cas réel.

Lemme : Toute courbe elliptique G-équivariante est isomorphe à $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}} \circlearrowleft G$ où $G = \mathbb{Z}/2$ agit par la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$, et où $\mathrm{Re}(\tau) \in \frac{1}{2}.\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$.

Preuve : . Soit $\sigma : \mathbb{C}/_{\Lambda} \to \mathbb{C}/_{\Lambda}$ involution anti-holomorphe fixant l'origine.

Alors $z \longmapsto \sigma(\bar{z}) : \mathbb{C}/_{\bar{\Lambda}} \xrightarrow{\text{conj}} \mathbb{C}/_{\Lambda} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}/_{\Lambda}$ iso holomorphe, donc induit par $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

i.e.
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}(z) = \alpha\bar{z}} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}/_{\Lambda} & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathbb{C}/_{\Lambda} \end{array}$$

. Changeant de coordonnées par $\mathbb{C} \xrightarrow[\beta]{} \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^*$, on remplace α par $\frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta}$.

On peut donc supposer que $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $\alpha\bar{\alpha} = 1$, $\alpha = 1$.

. Comme $\sigma \circlearrowleft \mathbb{C} = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ avec une valeur propre $+1$ et une valeur propre -1, il agit sur $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ avec une vp $+1$ et une vp -1.

$\Rightarrow \exists\, \beta \in \mathbb{R} \cap \Lambda$. On choisit $\beta \in \mathbb{R}_+^* \cap \Lambda$ minimal.

Changeant de coordonnées par $\mathbb{C} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}$, qpq $\beta = 1$.

Alors $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, pour un τ, qu'on peut supposer avec $\mathrm{Im}\,\tau > 0$.

. Λ stable par conjugaison $\iff \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\bar{\tau}$
$\iff \tau + \bar{\tau} \in \mathbb{Z}$
$\iff \mathrm{Re}(\tau) \in \frac{1}{2}.\mathbb{Z}$.

Lemme : Si $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ avec $\mathrm{Re}(\tau), \mathrm{Re}(\tau') \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}} \overset{G\text{-eq}}{\simeq} \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\oplus\tau'\mathbb{Z}}$

$\iff \tau' = \tau + n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve : $\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{C}^*$ tq $\alpha(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\tau'\mathbb{Z}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\alpha\bar{z} - \overline{\alpha z}}_{\text{donc indépendant de } z\text{, donc nul.}} \in \Lambda'$

$\iff \exists\, a \in \mathbb{R}^*$ tq $a(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\tau'\mathbb{Z}$.

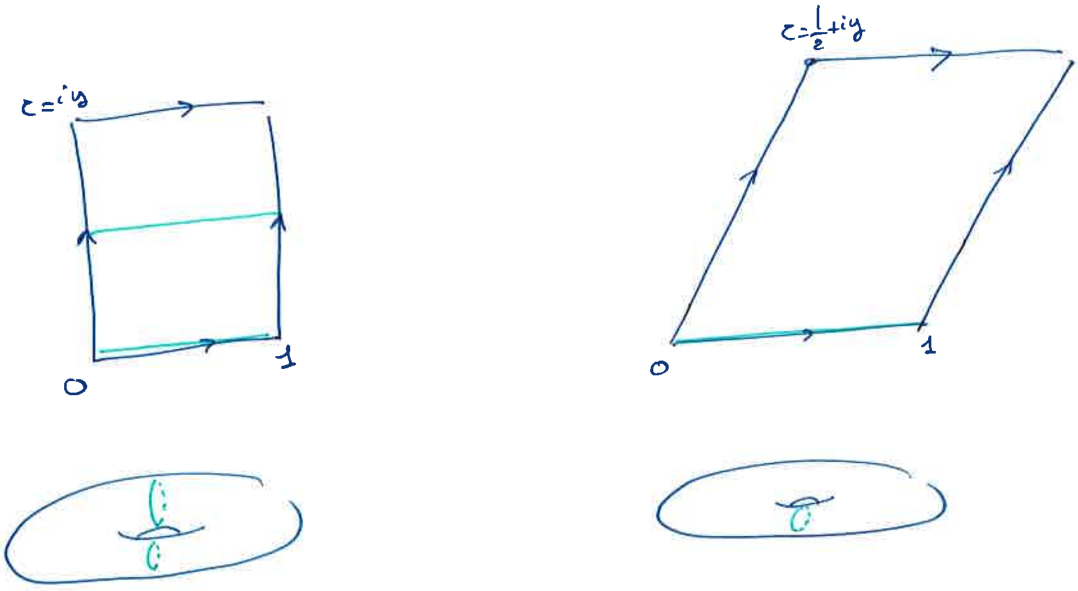
$\iff \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\oplus\tau'\mathbb{Z}$

$\iff \tau' = \tau + n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\left\{\begin{array}{c}\text{courbes elliptiques complexes} \\ G\text{-équivariantes}\end{array}\right\}/_{\simeq} \;\simeq\; i\mathbb{R}_+^* \amalg \left(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}_+^*\right)$

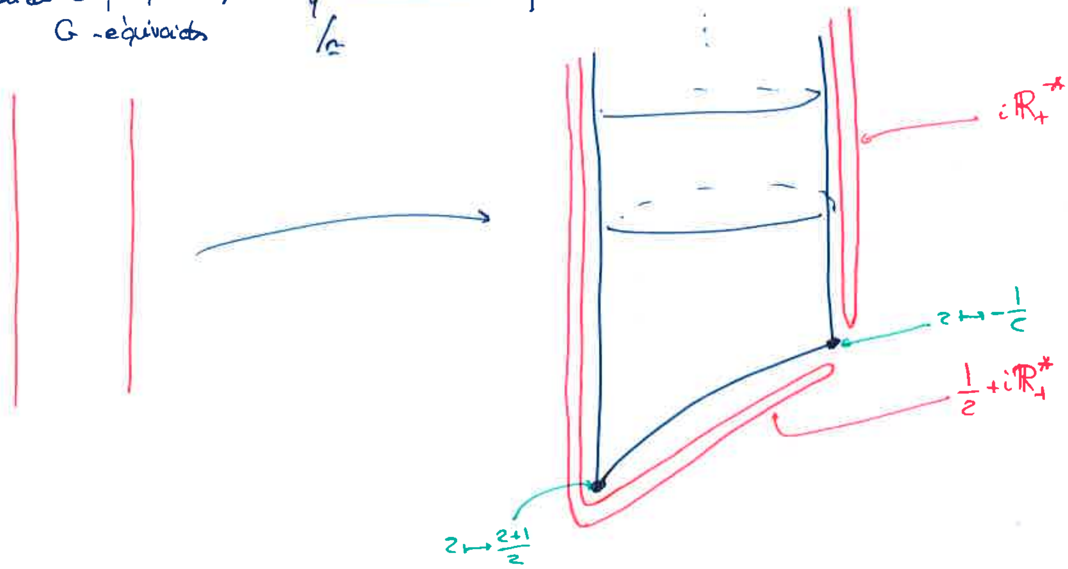
Lemme :
$$\begin{cases} \text{Si } \tau \in i\mathbb{R}_+^*, & (\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})^G \simeq S^1 \sqcup S^1 \\ \text{Si } \tau \in \frac{1}{2}+i\mathbb{R}_+^*, & (\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})^G \simeq S^1. \end{cases}$$

Preuve :



L'application $\left\{ \begin{array}{c} \text{Courbes elliptiques complexes} \\ G\text{-équivariantes} \end{array} \right\}/\simeq \longrightarrow \{\text{Courbes elliptiques complexes}\}/\simeq$

ressemble à



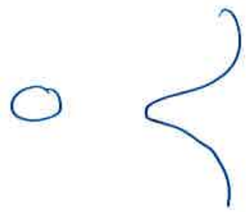
Corollaire : Il y a quatre cas pour Σ courbe elliptique sur $\mathbb{C}$:

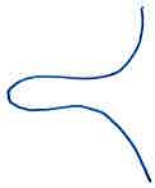
- Σ a zéro formes réelles.
- Σ a deux formes réelles. Pour les deux, $\Sigma^G \simeq S^1$.
- Σ a deux formes réelles. Pour les deux, $\Sigma^G \simeq S^1 \sqcup S^1$.
- $\Sigma \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}i$. Pour une forme réelle, $\Sigma^G \simeq S^1$, pour l'autre $\Sigma^G \simeq S^1 \sqcup S^1$.

Point de vue algébrique

Une courbe elliptique réelle admet une équation de Weierstrass

$$X = \{ y^2 = \underbrace{x^3 + ax + b}_{P(x)} \}$$ la réalisation comme cubique lisse dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

Si $P(x)$ a trois racines réelles, alors $X(\mathbb{R}) =$  $\simeq S^1 \sqcup S^1$

Si $P(x)$ a une racine réelle, alors $X(\mathbb{R}) =$  $\simeq S^1$.

ex : voici les deux courbes elliptiques réelles, avec topologies différentes, qui sont formes réelles de la même courbe elliptique complexe :

$$E = \{ y^2 = x^3 - x \} \qquad E' = \{ y^2 = x^3 + x \}$$

$$E_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} E'_{\mathbb{C}}$$
$$(x, y) \longmapsto (-ix, \zeta y) \qquad (\zeta^2 = i).$$