C) Cas de genre ≥ 2 (Klein 1882)

Soit Z une surface de Riemann compacte connexe de genre g G-équivariante.

$$Z^G \subseteq Z \supseteq Z - Z^G$$

Notons s le nombre de composantes connexes de Z^G $\left(Z^G \underset{\text{difféo}}{\simeq} \underbrace{S^1 \amalg \dots \amalg S^1}_{s \text{ fois}} \right)$

et t le nombre de composantes connexes de $Z - Z^G$.

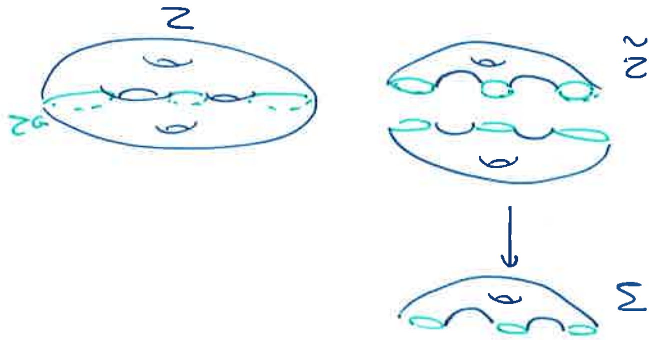
Prop : • $t \in \{1,2\}$ [si $t=2$, on dit que Z est séparante]

• Si $t = 1$, on a $0 \leq s \leq g$

• Si $t = 2$, on a $1 \leq s \leq g+1$ et $g \not\equiv s\,[2]$

Preuve : Notons $\tilde{Z}$ la surface compacte C^∞ à bords obtenue en découpant Z le long de Z^G.

Alors $G \curvearrowright \tilde{Z}$ sans points fixes, et on peut considérer le quotient $\Sigma := \tilde{Z}/G$. C'est une surface compacte C^∞ à bords. De plus, car $G \curvearrowright \tilde{Z}$ renverse l'orientation (σ antiholomorphe), $\tilde{Z} \to \Sigma$ est le revêtement des orientations de Σ.



• On a une application $Z \longrightarrow \Sigma$ surjective. Donc Σ connexe. Ainsi, $\tilde{Z}$ a une ou deux composantes connexes suivant que Σ est orientable (2) ou pas (1). Donc $t \in \{1,2\}$.

• Si l'on rebouche les s composantes de bord de Σ par des disques, on obtient une surface compacte connexe de genre γ, orientable ssi Σ l'est.

↳ $t=2$, Σ orientable. Alors Z a genre $g = 2\gamma + s - 1$, donc $g \not\equiv s\,[2]$, et $g+1-s = 2\gamma \geq 0$. De plus, $s \geq 1$ car Z séparante !

↳ $t=1$, Σ non orientable. Alors, par Mayer-Vietoris, $\chi(\Sigma) = 2-\gamma-s$, donc $\chi(Z) = 4-2\gamma-2s = 2-2g$. Et $g-s = \gamma-1 \geq 0$.

[**Rappel :** les surfaces compactes C^∞ non orientables de genre γ sont les $\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{\gamma \geq 1 \text{ copies}}$.]

Th : Toutes les valeurs (g,s,t) comme au-dessus peuvent être réalisées par des surfaces de Riemann compactes G-équivariantes.

Idée de preuve algébrique :

• Pour certaines valeurs de (g,s,t), on peut donner des équations pour la courbe à construire.

Ainsi, $(g,0,1)$ est réalisable par la courbe projective lisse $/\mathbb{R}$, dont un modèle affine est $\{z^2 = -x^{2g+2} - 1\}$. (Le modèle projectif est $C := \mathrm{Proj}\left(\mathbb{R}[\underbrace{X,Y}_{\text{degré } 1},\underbrace{Z}_{\text{degré } g+1}] / Z^2 + X^{2g+2} + Y^{2g+2}\right)$).

Elle est munie d'un revêtement $C \xrightarrow[x = \frac{X}{Y}]{} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ de degré 2, ramifié en les racines $(2g+2)$-èmes de -1.

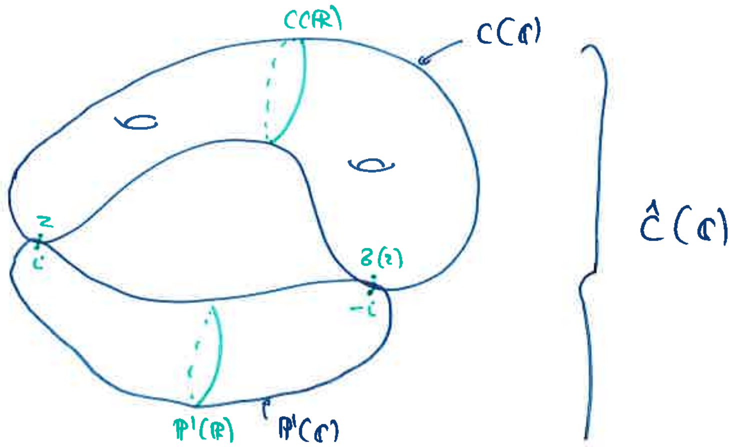
Par Hurwitz, elle a genre g. Vu l'équation, $C(\mathbb{R}) = \emptyset$.

De même, $(g,1,2)$ pour g pair est réalisé par la courbe projective lisse $/\mathbb{R}$ dont un modèle affine est $\{z^2 = x^{2g+2} + 1\}$. Comme au-dessus, le genre est g. Mais maintenant $C(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est un revêtement double. Donc $s = 1$ ou 2. De plus $C(\mathbb{C}) \setminus C(\mathbb{R})$ non connexe (considérer les images inverses par $C(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des composantes connexes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$). Ceci montre $t = 2$. Par Klein, $s \equiv g+1 \equiv 1\,[2]$. Comme $s = 1$ ou 2, $s = 1$.

• Il semble difficile de donner des équations algébriques concrètes pour tous (g,s,t).

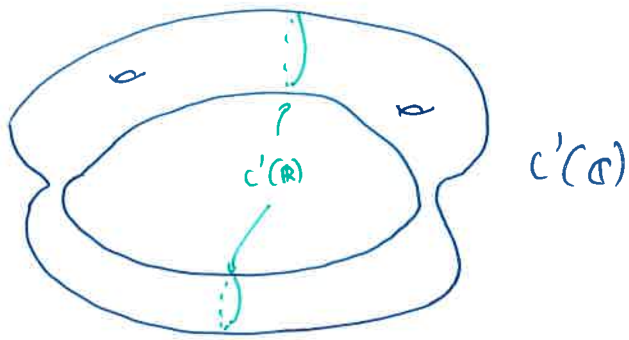
Voici une idée pour conclure. Supposons que C réalise (g,s,t). Soit $z \in C(\mathbb{C})$ tq $\sigma(z) \neq z$.

Considérons la courbe singulière $\hat{C}$ obtenue en "recollant" transversalement $\begin{cases} z \in C(\mathbb{C}) \text{ et } i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \sigma(z) \in C(\mathbb{C}) \text{ et } -i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \end{cases}$



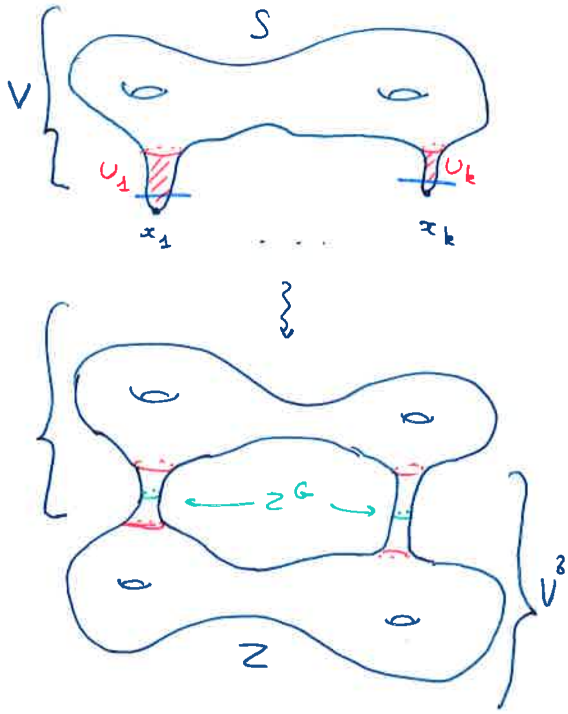
En "déformant" $\hat{C}$, on obtient une courbe projective lisse C' réalisant $(g+1, s+1, t)$.

Itérant cette construction à partir des exemples au-dessus, on réalise tous les types (g,s,t) possibles.



Preuve analytique :

Fixons une surface de Riemann compacte S de genre γ et k points $x_1, \dots, x_k \in S$



On choisit un petit voisinage U_i de x_i et un biholomorphisme $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, U_i disjoints

On note $V = S \setminus \bigcup_i \varphi_i^{-1}(\{z \mid |z| < 1/2\})$.

On va recoller deux copies de V pour obtenir Z. Pour cela, il faut changer la structure de surface de Riemann sur la seconde copie de V.

Notons V^σ la surface de Riemann égale à V comme espace topologique, mais telle que, si $V \supseteq W \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$ carte de V, alors $V \supseteq W \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{conj}} \mathbb{C}$ carte de V^σ.

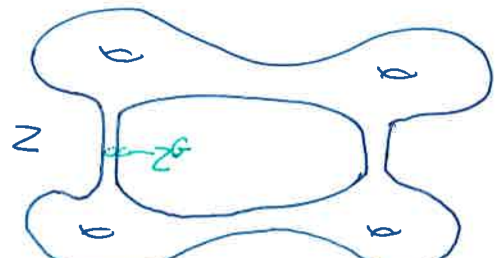
On recolle V et V^σ en identifiant $\varphi_i^{-1}(z) \in U_i \cap V$ avec $\varphi_i^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \in U_i \cap V^\sigma$. Ce recollement est holomorphe, par choix de la structure complexe sur V^σ.

On obtient ainsi une surface de Riemann compacte Z, munie d'une involution antiholomorphe échangeant V et V^σ, de type topologique $(2\gamma + k - 1, k, 2)$: tous les types séparants !

Pour obtenir les types non séparants, on choisit $0 \leq l < k$ et on recolle $U_i \cap V$ et $U_i \cap V^\sigma$ par

$$\begin{cases} z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}} & \text{pour } 1 \leq i \leq l \\ z \longmapsto -\frac{1}{\bar{z}} & \text{pour } l+1 \leq i \leq k \end{cases}$$

Le type topologique obtenu est $(2\gamma + k - 1, l, 1)$.
On obtient tous les types non séparants !



(ici, $\begin{cases} \gamma = 2 \\ k = 2 \\ l = 1 \end{cases}$

Remarque 1 : On n'obtient pas d'équations algébriques concrètes.

Remarque 2 : On a vu les deux étapes typiques des questions de classification topologique des variétés réelles : (i) recherche d'obstructions
(ii) construction d'exemples.