D Courbes planes

Question : Quels types topologiques (g,s,t) peuvent être réalisés par une courbe plane lisse de degré d $\quad C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$?

On sait que le genre d'une telle courbe est $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Une restriction évidente : si d impair, alors $s \geq 1$.

En effet, l'intersection de C avec une droite définie$/\mathbb{R}$ est le lieu des zéros d'un polynôme réel de degré impair, qui a un zéro réel $\Rightarrow C(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ i.e. $s \geq 1$.

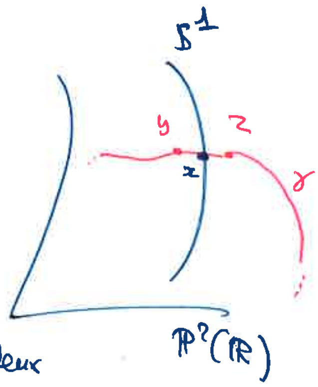
Une restriction subtile :

Th (Rokhlin, ~1974) : Si $t = 2$, on a $s \geq \left\lfloor \dfrac{d+1}{2} \right\rfloor$.

• $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ engendré par la classe ℓ d'une droite $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Toute courbe fermée dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a une classe dans $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Compter le nombre de points d'intersection modulo 2 de deux courbes induit une forme d'intersection sur $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ avec $\ell^2 = 1$.

• Soit $S^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ lisse plongé. Deux cas :



(i) $[S^1] = 0 \in H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Alors $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus S^1$ a deux composantes connexes : on ne peut joindre y et z de part et d'autre de $x \in S^1$ car cela créerait une courbe γ avec $\gamma.[S^1] = 1$.

Découpant $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le long de S^1, on voit que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est obtenu en recollant deux surfaces compactes à bord le long de S^1. Pas le choix : l'une est un disque
l'autre est un $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ épointé

On dit que ce S^1 est un ovale et que le disque est son intérieur.

(ii) $\underset{\ell}{[S^1]} \neq 0 \in H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. On dit que S^1 non ovale.

• Si $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est lisse de degré d, $[C(\mathbb{R})].\ell = d \pmod{2}$ [nombre de solutions réelles d'un polynôme de degré d

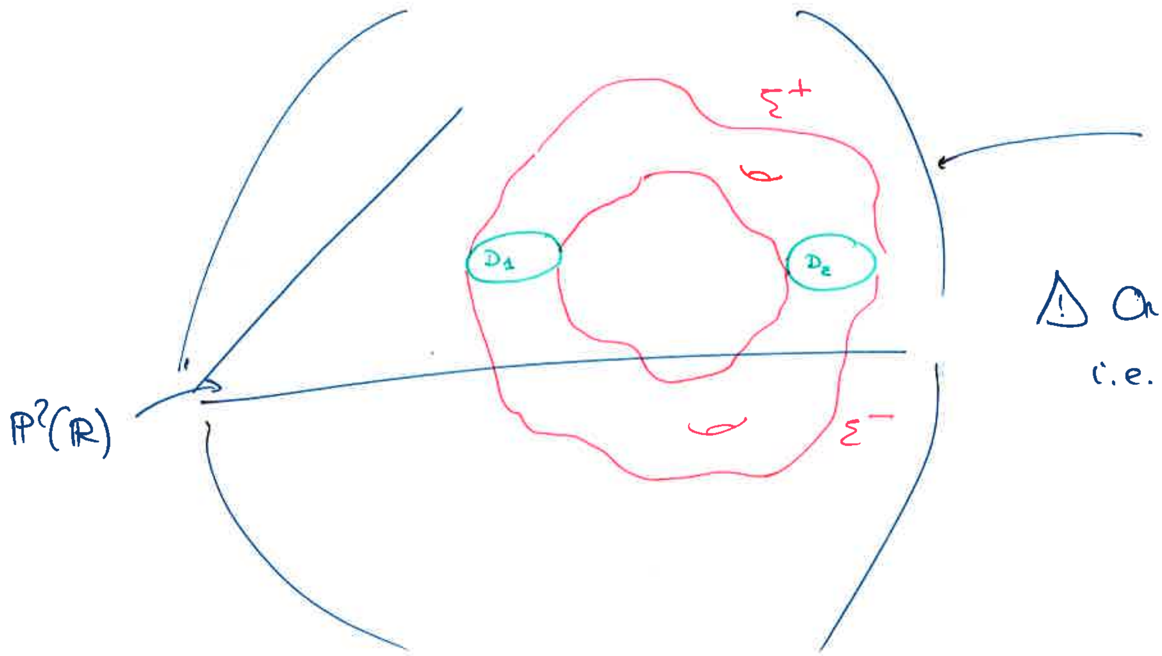
De plus, il y a au plus deux composantes de $C(\mathbb{R})$ non ovales (car elles devraient s'intersecter !)

Ainsi d pair $\Rightarrow$ que des ovales

d impair $\Rightarrow$ une unique composante non ovale.

Preuve du théorème de Rokhlin : On suppose $d = 2\delta$ pair. (l'autre cas est similaire).

$$\begin{cases} C(\mathbb{C}) \setminus C(\mathbb{R}) = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_- \\ C(\mathbb{R}) \text{ est union de } s \text{ ovales qui bordent des disques } D_1, \dots, D_s \text{ de } \mathbb{P}^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$



⚠ On peut avoir $D_1 \subseteq D_2$, i.e., des ovales emboîtés !

On note S la "surface" orientée $\Sigma^+ \sqcup D_1 \sqcup \dots \sqcup D_s$.

On a une classe $[S] \in H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.\lambda$ — classe de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

— munie d'une forme d'intersection à valeurs entières (compter les points d'intersection avec signes). On a $\lambda^2 = 1$.

Comme σ renverse l'orientation de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\sigma(\lambda) = -\lambda$.

On calcule $[S]^2$ de deux façons différentes.

Méthode 1 : $[S] = -[\sigma(S)]$

$$2[S] = \underbrace{[S]}_{\Sigma^+ \sqcup D_1 \sqcup \dots \sqcup D_s} - \underbrace{[\sigma(S)]}_{\Sigma^- \sqcup -D_1 \sqcup \dots \sqcup -D_s} = [\Sigma^+ \sqcup \Sigma^-] = [C(\mathbb{C})] = 2\delta.\lambda$$

$$\Rightarrow [S]^2 = \delta^2.$$

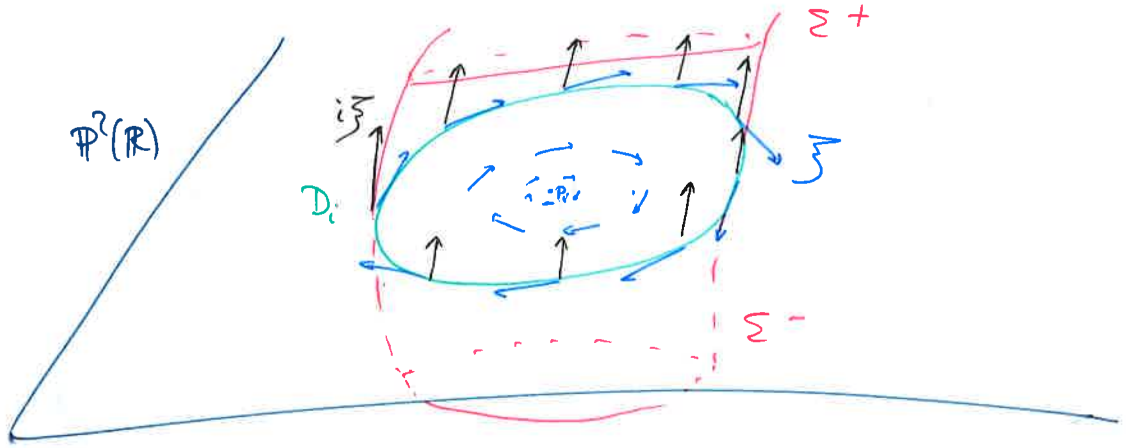
Méthode 2 : $[S]^2 = -[S][\sigma(S)]$. Pour calculer ça, on perturbe un peu S pour qu'elle intersecte $\sigma(S)$ en un nombre fini de points. On fait ça pour calculer l'intersection ~~de~~ ε_{ij} "au vois. de D_i" et de $\sigma(S)$ "au vois. de D_j". $[S]^2 = -\sum_{i,j} \varepsilon_{ij}$.

Bien sûr, $\varepsilon_{ij} = 0$ si $D_i \cap D_j = \emptyset$.

On va montrer que $\varepsilon_{ij} \in \{\pm 1\}$ si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$. On déduit $[S]^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq s} 1 = s^2$

donc $\delta^2 \leq s^2$ et $\delta \leq s$, comme voulu !

Faisons seulement la preuve (et le dessin) quand $i=j$. Les autres cas sont entièrement identiques.



On choisit un champ de vecteurs ξ le long du bord de D_i, tangent à ce bord.

On l'étend à un champ de vecteurs sur D_i, nul en un unique point p_i intérieur à D_i.

On considère le champ de vecteurs $i\xi$. Le long de D_i, il est tangent à $C(\mathbb{C})$. Il pointe dans la direction de Σ^+ ou de Σ^-. On peut supposer que c'est Σ^+ (quitte à changer ξ en $-\xi$).

On pousse S un petit peu à l'aide du flot de $i\xi$. Notons S' cette petite déformation. Alors S' et $\sigma(S)$ ne s'intersectent (localement) qu'en le point p_i, transversalement.

Donc $\varepsilon_{i,i} \in \{\pm 1\}$.

Th (Gabard 2000) : Il existe une courbe plane lisse $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de type topologique (g,s,t) ssi :

(i) $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

(ii) Si d est impair, $s \geqslant 1$

(iii) Si $t=1$, $0 \leq s \leq g$

Si $t=2$, $\left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \leq s \leq g+1$ et $s \equiv g+1\ [2]$.

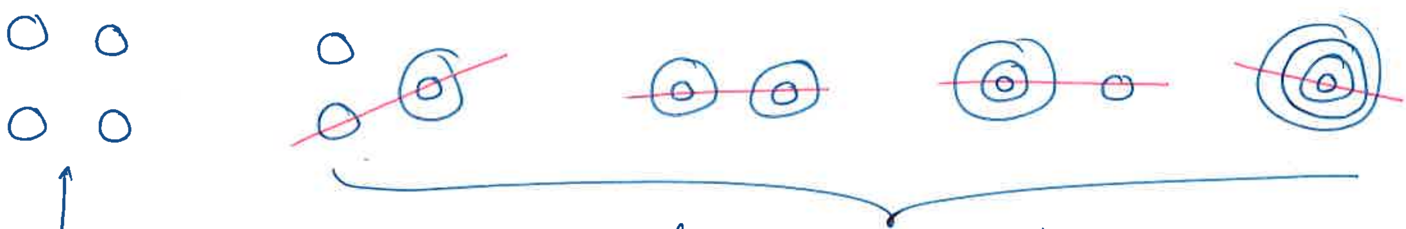
Preuve : algébrique, théorie des déformations. On l'omet.

Remarque : Rokhlin montre un résultat plus précis en calculant tous les $\varepsilon_{i,j}$. Supposons $d = 2\delta$ pair. Notons Π^+ (resp. Π^-) le nombre de paires d'ovales emboîtés dont les orientations induites par Σ^+ sont compatibles (resp. non compatibles). Alors $\boxed{2(\Pi^+ - \Pi^-) = s - \delta^2}$

(E) 16e problème de Hilbert

On veut classifier les types topologiques de courbes planes réelles $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Mais quelles peuvent être les topologies des plongements $C(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

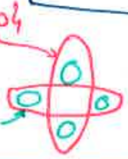
exemple 1 : Si $d=4$, le nombre maximum de composantes connexes de $C(\mathbb{R})$ est $g+1 = 3+1 = 4$.
Il y a a priori cinq possibilités :



Seule possibilité !

Réalisable par $\{(x^2+2y^2-1)(2x^2+y^2-1)+\varepsilon=0\}$

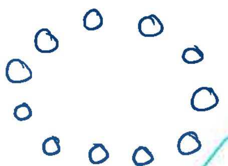
$\{(x^2+2y^2-1)(2x^2+y^2-1)=0\}$



Impossible car il existe une droite coupant $C(\mathbb{R})$ en > 4 points (or un polynôme de degré 4 a ≤ 4 zéros réels).

exemple 2 : Si $d=6$, le nombre maximum de composantes connexes de $C(\mathbb{R})$ est $g+1 = 10+1 = 11$.

La configuration



est impossible. En effet, la formule de Rokhlin raffinée

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = s - \delta^2$$ montre donc

$$0 = 2(0-0) = 11 - 9 = 2.$$ Absurde !

Cette formule s'applique bien car, comme $s = g+1$, on est nécessairement dans le cas séparant !

En général, la réponse est connue pour $d \leq 5$ (XIXe siècle)
$d = 6$ (Gudkov 1969)
$d = 7$ (Viro 1979)
inconnue pour $d \geq 8$.

Même pour des types topologiques simples, peu est connu :

Question ouverte : Considérons l'ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}[X,Y,Z]_d)$ l'ensemble des équations de courbes projectives lisses $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de degré d telles que $C(\mathbb{R})$ connexe.

L'ensemble Ω est-il connexe ?