III GAGA

A Enoncés

Th (Chow 1949) : Il y a une équivalence de catégories :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{variétés algébriques projectives}\\ \text{lisses } /\mathbb{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{variétés analytiques complexes}\\ \text{projectives}\end{array}\right\}$$

$$X \longmapsto X(\mathbb{C}).$$

Preuve : ADMISE

On va expliquer comment déduire :

Th (Chow réel) : Il y a une équivalence de catégories :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{variétés algébriques projectives}\\ \text{lisses } /\mathbb{R}\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{variétés analytiques complexes } G\text{-équiv.}\\ \text{projectives}\end{array}\right\}$$

Remarques : • complètement faux pour des variétés affines : $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}$ ne vient pas d'un morphisme de variétés algébriques $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

• il y a une variante pour des variétés singulières.

• Serre 1956 a démontré un résultat fameux, généralisant Chow, dit appelé GAGA.

Par ex :

Th (Serre). X proj. lisse $/\mathbb{C}$. Alors il y a une équivalence de catégories :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites algébriques}\\ \text{sur } X\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites holomorphes}\\ \text{sur } X(\mathbb{C})\end{array}\right\}$$

qui admet aussi une variante réelle

Th X proj. lisse $/\mathbb{R}$. Alors il y a une équivalence de catégories :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites algébriques}\\ \text{sur } X\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites holomorphes sur } X(\mathbb{C})\\ G\text{-équivariants}\end{array}\right\}$$

↳ munis d'une action de G compatible à l'action sur $X(\mathbb{C})$, et $\mathbb{C}$-antilinéaire sur les fibres.

B) Variété analytique conjuguée

Déf: Soit Z une variété analytique complexe. La variété conjuguée Z^σ de Z est l'unique variété analytique dont l'espace topologique sous-jacent est Z et tel que $Id : Z \longrightarrow Z^\sigma$ soit antiholomorphe.

Construction: Si $Z \supseteq U_i \xrightarrow[\sim]{\phi_i} V_i \subseteq \mathbb{C}^d$ sont des cartes holomorphes de Z, alors $Z \supseteq U_i \xrightarrow[\sim]{\phi_i} V_i \xrightarrow{\text{conj.}} \overline{V_i} \subseteq \mathbb{C}^d$ sont des cartes holomorphes de Z^σ.

Exemple: $$\left(\mathbb{C}/\Lambda\right)^\sigma = \mathbb{C}/\overline{\Lambda}$$ (en effet, conj : $\mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}/\overline{\Lambda}$ est une bijection antiholomorphe).

image de Λ par conj.

Lemme: $$\left\{ \begin{array}{c} \text{involutions antiholomorphes} \\ \text{sur } Z \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{bijection}} \left\{ \begin{array}{c} \text{biholomorphismes } \phi : Z^\sigma \xrightarrow{\sim} Z \\ \text{tels que } \phi \circ \phi^\sigma = Id : Z \simeq Z \end{array} \right\}$$

Preuve: Une bijection antiholo $Z \xrightarrow{\sigma} Z$ peut être vue comme une bijection holomorphe $Z^\sigma \xrightarrow{\phi} Z$ ou $Z \xrightarrow{\phi^\sigma} Z^\sigma$.

Que $\sigma \circ \sigma = Id$ se traduit par $\phi \circ \phi^\sigma = Id$.

Corollaire: On a une équivalence de catégories
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variétés analytiques complexes} \\ G\text{-éq projectives} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{var. analytiques complexes projectives } Z \\ + \ \phi : Z^\sigma \xrightarrow{\sim} Z \text{ tq } \phi \circ \phi^\sigma = Id \end{array} \right\}$$

c) Variété algébrique conjuguée

Soit Y une variété quasi-projective sur $\mathbb{C}$ (i.e. définie dans $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ comme $\left\{ \begin{matrix} f_i = 0 \\ g_j \neq 0 \end{matrix} \right\}$).

On voit Y comme un schéma muni d'un morphisme vers $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$: $Y \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$.

Déf : la variété conjuguée Y^σ de Y est égale à Y comme schéma, munie de $Y \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \xrightarrow[\text{conj.}]{} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$

Concrètement, si $Y = \{f_i = 0, g_j \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, on a $Y^\sigma = \{\overline{f_i} = 0, \overline{g_j} \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$.

on conjugue les coefficients des polynômes

Lemme : Si Y est lisse, $Y^\sigma(\mathbb{C}) = \overline{Y(\mathbb{C})}$.

Preuve : la conjugaison complexe induit une bijection antiholomorphe $Y(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} Y^\sigma(\mathbb{C})$.

On en déduit un biholomorphisme $Y^\sigma(\mathbb{C}) \simeq \overline{Y(\mathbb{C})}$.

Prop : On a des équivalences de catégories :

$$\left\{ \begin{matrix} \text{variétés analytiques complexes } Z \\ \text{projectives } + \phi : \overline{Z} \xrightarrow{\sim} Z \text{ tq } \phi \circ \overline{\phi} = \mathrm{Id} \end{matrix} \right\} \underset{(1)}{\simeq} \left\{ \begin{matrix} \text{variétés alg. proj. lisses } Y/\mathbb{C} \\ + \psi : Y^\sigma \xrightarrow{\sim} Y \text{ tq } \psi \circ \psi^\sigma = \mathrm{Id} \end{matrix} \right\} \underset{(2)}{\simeq} \left\{ \begin{matrix} \text{var. alg. proj. lisses } Y/\mathbb{C} \\ + \text{action } G \curvearrowright Y \text{ tq} \\ \sigma \in G \text{ agit } \mathbb{C}\text{-antilinéairement} \\ \text{sur les fonctions} \end{matrix} \right\}$$

Preuve : (1) Dans l'équivalence de catégories donnée par le théorème de Chow, on note Y la variété associée à Z. Par le lemme, Y^σ est la variété associée à $\overline{Z}$. On note ψ le morphisme associé à ϕ.

(2) Le morphisme
$$\begin{tikzcd} Y^\sigma \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$
ψ peut être vu, via l'isomorphisme $Y^\sigma \simeq Y$,

comme un morphisme
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[r, "\text{conj.}"'] & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \end{tikzcd}$$
Que $\psi \circ \psi^\sigma = \mathrm{Id}$ se traduit par $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$, i.e. donne lieu à une action de G sur Y comme souhaité.

D. Descente galoisienne

Th : Il y a une équivalence de catégories :

$$\{\text{variétés quasi-projectives } X/\mathbb{R}\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l}\text{variétés quasi-projectives } Y/\mathbb{C} + \text{action } G \curvearrowright Y \\ \text{tq } \sigma \in G \text{ agit } \mathbb{C}\text{-antilinéairement sur les fonctions}\end{array}\right\}$$

schéma de type fini

$$X \longmapsto Y = X_{\mathbb{C}} := X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C} \circlearrowleft G$$

Remarque 1 : Cette équivalence préserve les variétés lisses / projectives. En combinant avec les précédentes, on déduit Chow réel.

Remarque 2 : C'est un cas particulier de la descente fidèlement plate (appliquée à $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$).

Remarque 3 : C'est faux si on enlève l'hypothèse "quasi-projective". En effet, on peut trouver $G \curvearrowright Y$ et $y \in Y$ tels que y et $\sigma(y)$ n'ont pas de voisinage affine commun dans Y. Mais si $Y = X_{\mathbb{C}}$, dans notant $\pi : Y = X_{\mathbb{C}} \longrightarrow X$, on a $\pi(y) = \pi(\sigma(y))$. Soit $U \subseteq X$ un voisinage affine de $\pi(y)$. On voit que $U_{\mathbb{C}} \subseteq X_{\mathbb{C}}$ voisinage affine de y et de $\sigma(y)$. Absurde.

Preuve : Cas affine : On a une équivalence de catégories :

$$\{\mathbb{R}\text{-algèbres de type fini } A\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}\text{-algèbres de type fini } B + G \curvearrowright B \text{ tq} \\ \sigma \in G \text{ agit } \mathbb{C}\text{-antilinéairement sur } B\end{array}\right\}$$

$$A \longmapsto A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$B^G \longleftarrow\!\shortmid B$$

Cas général : ① fidélité : $X, Y/\mathbb{R}$, $f, g : X \longrightarrow Y$ tels que $f_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow Y_{\mathbb{C}}$.
Cela implique que $f = g$ ensemblistement. Soit $V \subseteq Y$ affine et $U \subseteq f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$ affine. Alors $f|_U$ et $g|_U : U \longrightarrow V$ coïncident sur $\mathbb{C}$ donc sont égales par le cas affine. Et $f = g$.

② pleine fidélité. $X, Y/\mathbb{R}$, $h : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow Y_{\mathbb{C}}$ commutant avec l'action de G.
Soit $x \in X_{\mathbb{C}}$. Soit $V \subseteq Y$ ouvert affine tq $h(x) \in V_{\mathbb{C}} \subseteq Y_{\mathbb{C}}$. Alors $h^{-1}(V_{\mathbb{C}})$ est un ouvert stable par G. Le fermé complémentaire peut donc être défini (localement) par des équations réelles, et $\exists\, U \subseteq X$ ouvert tel que $U_{\mathbb{C}} = h^{-1}(V_{\mathbb{C}})$.
Soit $W \subseteq U$ affine tel que $x \in W_{\mathbb{C}}$. Alors $h|_{W_{\mathbb{C}}} : W_{\mathbb{C}} \longrightarrow U_{\mathbb{C}}$ commute à l'action de G, donc est induit, par le cas affine par un unique morphisme $g : W \to U$.
Les $(g : W \to U)$ obtenus en faisant varier x sont compatibles sur les $W_i \cap W_j$ par fidélité ① donc se recollent en $f : X \to Y$ tel que $f_{\mathbb{C}} = h$.

3 essentielle surjectivité

Fixons $G \curvearrowright Y/_{\mathbb{C}}$. Comme Y est quasiprojective, on peut trouver, pour tout $y \in Y$, un ouvert affine $U \subseteq Y$ tel que $y, \sigma(y) \in U$.

[Soit $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ un plongement et soit $\overline{Y} \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ l'adhérence de Y. Pour $\ell \gg 0$, il existe $s \in H^0(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(\ell))$ tel que $\begin{cases} s = 0 \text{ sur } \overline{Y} \setminus Y \\ s \neq 0 \text{ sur } y \text{ et } \sigma(y) \end{cases}$. On pose $U = \overline{Y} \setminus \{s = 0\}$.]

En remplaçant U par $U \cap \sigma(U)$, on peut supposer que U est G-invariant.

Pour le cas affine $U = V_{\mathbb{C}}$ comme variété affine munie d'une action de G, pour un $V/_{\mathbb{R}}$.

On a donc recouvert Y par des ouverts affines de la forme $V_{i,\mathbb{C}}$. De même $V_{i,\mathbb{C}} \cap V_{j,\mathbb{C}}$ est de la forme $W_{i,j,\mathbb{C}}$ pour $W_{i,j}/\mathbb{R}$. Les données de recollement $\begin{matrix} W_{i,j,\mathbb{C}} \longrightarrow V_{i,\mathbb{C}} \\ W_{i,j,\mathbb{C}} \longrightarrow V_{j,\mathbb{C}} \end{matrix}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par 2. Recollant les V_i, on obtient $X/_{\mathbb{R}}$ tel que $X_{\mathbb{C}} = Y$ (G-équivariamment).

On montre que X est quasi-projective (cf page suivante)

Ce théorème permet de parler de "forme réelle" d'une variété quasiprojective $Y/_{\mathbb{C}}$, non nécessairement projective ou lisse : c'est une variété quasiprojective $X/_{\mathbb{R}}$ tq $X_{\mathbb{C}} \simeq Y$.

Question ouverte : Pour $n \geqslant 3$, existe-t-il une forme de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ qui est distincte de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$?

De manière équivalente, existe-t-il une $\mathbb{R}$-algèbre de type fini A avec $\begin{cases} A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots x_n] \\ A \not\simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \end{cases}$?

On sait qu'il n'y a pas de telles formes pour $n \leq 2$ (Shafarevich, 1966).

On a utilisé (page précédente) le lemme suivant :

Lemme : $X/_{\mathbb{R}}$ variété (i.e. schéma de type fini $/_{\mathbb{R}}$). Si $X_{\mathbb{C}}$ quasi-projective $/_{\mathbb{C}}$, alors X quasi-projective $/_{\mathbb{R}}$.

Preuve : Soit $i : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ immersion. Notons $\mathcal{L} := i^*\mathcal{O}(1)$ le fibré inversible très ample qui induit cette immersion.

On choisit un recouvrement (U_i) de X tel que $\mathcal{L}$ est trivialisé sur les $U_{i,\mathbb{C}}$. On peut supposer U_i affine. Notons $\mathcal{L}|_{U_{i,\mathbb{C}}} \xrightarrow[\sim]{\phi_i} \mathcal{O}_{U_{i,\mathbb{C}}}$ la trivialisation ; le changement de trivialisation $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j, \mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j, \mathbb{C}}$ est la multiplication par $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij,\mathbb{C}})^*$.

Posons $\beta_{ij} := \alpha_{ij}\, \sigma^*(\alpha_{ij}) \in \mathcal{O}(U_{ij,\mathbb{C}})^{*\,G} = \mathcal{O}(U_{ij})^*$. On note $\mathcal{M}$ le fibré inversible sur X obtenu en recollant les $\mathcal{O}_{U_i}$ sur U_i par multiplication par β_{ij} le long de $U_i \cap U_j$.

Une section $s \in H^0(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L})$ est la donnée de $s_i \in H^0(U_{i,\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{U_{i,\mathbb{C}}})$ tq $\alpha_{ij} s_j = s_i$. Si $s = (s_i)$ et $t = (t_i)$ sont deux éléments de $H^0(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L})$, alors $s\,\sigma^* t = (s_i\, \sigma^* t_i)$ forme une section de $H^0(X, \mathcal{M})$ car $s_i\, \sigma^* t_i = \beta_{ij}\, s_j\, \sigma^* t_j$.

On produit ainsi beaucoup de sections de $H^0(X, \mathcal{M})$; assez pour induire une immersion $X \longrightarrow \mathbb{P}^M_{\mathbb{R}}$.