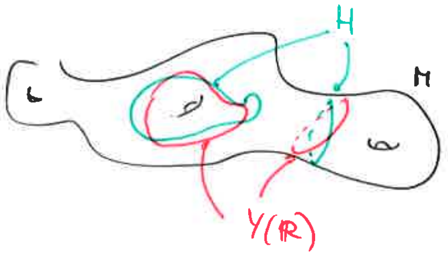
IV Hypersurfaces réelles.

But : $X/\mathbb{R}$ v.q. lisse, $M = X(\mathbb{R})$. $H \subseteq M$ hypersurface C^∞. Peut-on trouver $Y \subseteq X$ sous-variété algébrique réelle avec $Y(\mathbb{R})$ "proche" de H ?



A) Fibrés en droites réels.

M variété C^∞ compacte.

Prop : Il y a des bijections naturelles

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites réels}\\ \text{topologiques } L/M\end{array}\right\}/_{\simeq} \xrightarrow[\text{(C)}]{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{revêtements doubles}\\ \text{topologiques } \tilde{M}\to M\end{array}\right\}/_{\simeq} \xrightarrow[\text{(B)}]{\sim} H^1(M, \mathbb{Z}/2) = \mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}/2), \mathbb{Z}/2)$$

$$\wr\uparrow \text{(A)}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites réels}\\ C^\infty \;\; L/M\end{array}\right\}/_{\simeq} \xrightarrow[\text{(D)}]{\sim} \left\{\begin{array}{c}\text{revêtements doubles}\\ \tilde{M}\to M \text{ de}\\ \text{variétés } C^\infty\end{array}\right\}/_{\simeq}$$

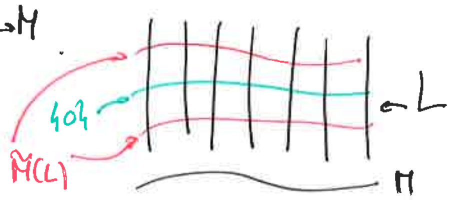
Preuve : (A) $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ revêtement double. Comme c'est un homéomorphisme local, il existe une unique structure de variété C^∞ sur $\tilde{M}$ telle que π soit C^∞.

(B) On peut supposer M connexe. Soit $x \in M$.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{revêtements doubles}\\ \tilde{M}\to M\end{array}\right\}/_{\simeq} \underset{\text{déf de } \pi_1}{=} \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x), \mathbb{Z}/2) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x)^{ab}, \mathbb{Z}/2) \overset{\text{Hurewicz}}{=} \mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \underset{\text{coefficients universels}}{=} H^1(M, \mathbb{Z}/2)$$

(C) À $L \to M$, on associe $\tilde{M}(L) := (L - \{0\})/\mathbb{R}_+^* \longrightarrow M$.

Autre construction : si une métrique $\|.\|$ sur L est donnée, on note $L_{\|.\|=1} \hookrightarrow L$ le fibré unitaire. Alors la projection $L_{\|.\|=1} \xrightarrow{\sim} \tilde{M}(L)$ est un isomorphisme.



Injectivité de (C) : Si $\tilde{M}(L_1) \xrightarrow{\sim} \tilde{M}(L_2)$ isomorphisme, alors $L_{1,\|.\|=1} \simeq L_{2,\|.\|=2}$ s'étend radialement en un isomorphisme $L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.

Surjectivité de (C) : Si $\tilde{M} \to M$ est donné, on choisit un recouvrement ouvert $U_i \subseteq M$ avec $\tilde{M}|_{U_i} = U_i \sqcup U_i$. Sur $U_i \cap U_j$, la différence entre les deux trivialisations est donnée par une fonction continue $U_i \cap U_j \xrightarrow{\varepsilon_{ij}} \mu_2 = \mathbb{Z}/2$. Par compatibilité, $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$.

On définit L en recollant $L|_{U_i} = \mathbb{R} \times U_i$ le long des $U_i \cap U_j$ à l'aide des identifications

$$L|_{U_i} = \mathbb{R}\times U_i \xrightarrow{\times \varepsilon_{ij}} \mathbb{R}\times U_j = L|_{U_j}.$$

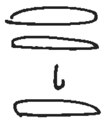
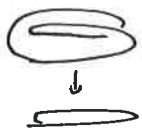
(D) Même argument.

Déf : Si $\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ M \end{array}$ fibré en droites, son image dans $H^1(M, \mathbb{Z}/2)$ est sa première classe de Stiefel-Whitney.

On la note $w_1(L) \in H^1(M, \mathbb{Z}/2)$.

ex : Si $M = S^1$, on a $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.

Les deux fibrés en droites sont le fibré trivial et le ruban de Möbius.

Les deux revêtements doubles sont le revêtement trivial  et .

B Voisinages tubulaires

Lemme : M variété C^∞, $E \to M$ fibré vectoriel réel C^∞, $F \hookrightarrow E$ sous-fibré C^∞.
Alors il existe $G \hookrightarrow E$ sous-fibré C^∞ tel que $F \oplus G \xrightarrow{\sim} E$.

Preuve : A l'aide de partitions de l'unité, on construit une métrique $\|\cdot\|$ sur E (i.e. une métrique euclidienne $\|\cdot\|_x$ sur les fibres E_x de E variant de manière C^∞ avec $x \in M$.

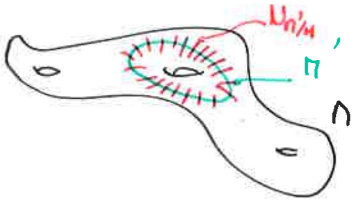
On prend pour G l'orthogonal de F dans E.

Remarque : Si G et G' sont deux tels sous-fibrés, la projection depuis F induit un iso $G \simeq G'$.
Ainsi, G est unique à isomorphisme près. On le note E/F.

Def : $M' \hookrightarrow M$ sous-variété C^∞. Le fibré normal de M' dans M est $N_{M'/M} = T_M|_{M'} / T_{M'}$

voisinage tubulaire

Prop : $M' \hookrightarrow M$ sous-variété C^∞ fermée. Alors $\exists\, U \subseteq M$ voisinage de M',
$V \subseteq N_{M'/M}$ voisinage de M' = section nulle, et $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ difféo induisant l'identité sur M'.



orthogonal de $\mathbb{R}^m$

Preuve : • Si $M = \mathbb{R}^m$, alors $N_{M'/M=\mathbb{R}^m}$ s'identifie à $\bigcup_{x\in M'} (T_xM')^\perp \subseteq M' \times \mathbb{R}^m$, et l'application naturelle $N_{M'/M=\mathbb{R}^m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a différentielle bijective en tout point de M'. On déduit du théorème d'inversion locale l'existence des U et V désirés.

• En général, $M' \hookrightarrow M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ (Whitney). Par le cas traité au-dessus, il existe un voisinage $W \subseteq \mathbb{R}^N$ de M et une rétraction C^∞ $W \xrightarrow{\pi} M$ de $M \hookrightarrow W$.

orthogonal des $T_xM \subseteq \mathbb{R}^m$

Le fibré $N_{M'/M}$ s'identifie à $\bigcup_{x\in M'} (T_xM')^\perp \subseteq M' \times \mathbb{R}^m$.

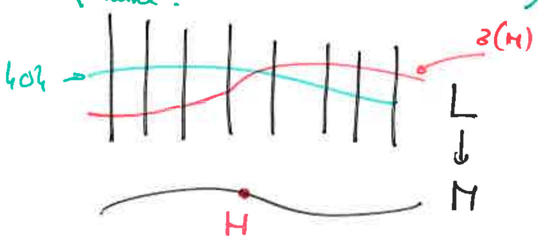
Composant l'application naturelle $N_{M'/M} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^N$ restreinte à $i^{-1}(W)$ avec $W \xrightarrow{\pi} M$, on obtient une application C^∞ $i^{-1}(W) \longrightarrow M$ de différentielle bijective en tout point de M'. On déduit du théorème d'inversion locale l'existence des U et V désirés.

C) Hypersurfaces C^∞.

Soit $\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ M \end{array}$ fibré en droites C^∞. Soit $s : M \longrightarrow L$ une section C^∞ de L, transverse à la section nulle. (i.e. si des trivialisations locales, s est donnée par une fonction f, alors df est nulle part nulle.)

Alors $H := \{s = 0\} \subseteq M$ est une hypersurface C^∞ de M

(car définie localement comme lieu des zéros d'une submersion).



Prop: Toute hypersurface C^∞ fermée $H \subset M$ est de cette forme.

Preuve: Donnons-nous un voisinage tubulaire de H dans M :

$$\begin{tikzcd} M \supseteq U \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "f"'] & V \subseteq N_{H/M} \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

Sur U, on a le fibré en droites $f^* N_{H/M}$. Il admet une section tautologique qui s'annule exactement sur H, transversalement à la section nulle.

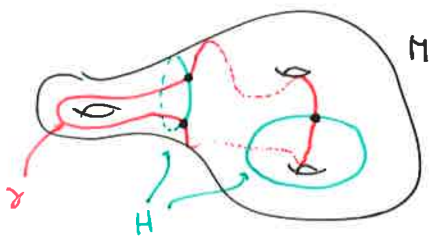
Sur $M - H$, on dispose du fibré trivial $\mathbb{R} \times (M-H)$ et de sa section constante 1 nulle part nulle.

On recolle ces deux fibrés le long de $U - H$ de sorte à faire coïncider les deux sections (qui ne s'annulent pas sur $U - H$). On obtient un fibré en droites L sur M et une section $s : M \to L$ transverse à la section nulle telle que $\{s = 0\} = H$.

Prop: Soit $\gamma : S^1 \longrightarrow M$ lacet transverse à H.

Alors $\gamma^* w_1(L) = \#\{x \in S^1 \mid \gamma(x) \in H\}$

$$\gamma^* w_1(L) \in H^1(S^1, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$$



Preuve: Par functorialité, on se ramène au cas où $M = S^1$ et $\gamma = \mathrm{Id}$.

Il faut alors voir que le nombre de zéros d'une section transverse de $\mathbb{R} \times S^1$ (resp. du fibré de Möbius) sur S^1 est pair (resp. impair). C'est clair : dans le cas de $\mathbb{R} \times S^1$, on compte le nombre de changements de signes d'une fonction $S^1 \to \mathbb{R}$, dans le cas de Möbius, on le compte à 1 près.

Corollaire: Le fibré en droites L est déterminé par H. On note $[H] := w_1(L)$.

Preuve: $H_1(M, \mathbb{Z}/2)$ est engendré par des lacets $\gamma : S^1 \longrightarrow M$ C^0. On peut les supposer C^∞ et transverses à H après perturbation. Par la Prop. ci-dessus, $\langle w_1(L), [\gamma] \rangle = \gamma^* w_1(L)$ est déterminé par H. Donc $w_1(L)$ est déterminé par H, donc L aussi.