F Le théorème de Stone-Weierstrass

Th : • $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact.

• Alors $\exists\ (g_j)_{j \geq 0} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\|g_j - f\|_{\infty, K} \xrightarrow{j \to \infty} 0$

Si f C^k, on peut même supposer que $\left\| \frac{\partial^\alpha g_j}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right\|_{\infty, K} \xrightarrow{j \to \infty} 0 \quad \forall\ |\alpha| \leq k$

Preuve : • On peut supposer que f est à support compact (quitte à la multiplier par une fonction plateau).

• Posons $$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n \sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\|y-x\|^2/\varepsilon^2} dy \underset{u = y-x}{=} \frac{1}{\varepsilon^n \sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(u+x) e^{-\|u\|^2/\varepsilon^2} du$$

Comme $\frac{1}{\varepsilon^n \sqrt{\pi}^n} e^{-\|u\|^2/\varepsilon^2}$ a intégrale 1 et une fraction arbitraire de la masse concentrée dans un voisinage arbitrairement petit de 0, on a $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ uniformément sur K.

A ε fixé, $e^{-\|u\|^2/\varepsilon^2}$ est approché uniformément sur tout compact par des polynômes $P_{\varepsilon, n}(u)$ [développer en série entière !].

On pose $$f_{\varepsilon, n}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n \sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) P_{\varepsilon, n}(y-x)\, dy \xrightarrow[\text{uniformément sur tt compact}]{n \to \infty} f_\varepsilon.$$

polynôme en x !

• Si f C^k, les $f_{\varepsilon, n}$ fonctionnent encore.

En effet, $$\frac{\partial^\alpha f_{\varepsilon, n}}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n \sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(u+x)\, P_{\varepsilon, n}(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n \sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(y)\, P_{\varepsilon, n}(y-x)\, dy$$

$$\xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ n \to \infty \\ \text{uniformément sur tt compact}}]{} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$$ par le résultat au-dessus appliqué à $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$.

Une amélioration du théorème de Stone-Weierstrass :

Prop : Supposons de plus que f C^∞ et qu'il existe une variété algébrique $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ lisse le long de $X(\mathbb{R})$ telle que $f = 0$ sur $X(\mathbb{R})$. Alors on peut supposer $g_j = 0$ sur $X(\mathbb{R})$.

Preuve : Lemme de Hadamard : $f : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{\mathring{U}}} \xrightarrow{} \mathbb{R}$ C^∞ nulle sur $\{0\} \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ ($\mathring{U}$: boule)

Alors $\exists\, g_i : U \to \mathbb{R}$ C^∞ avec $f = \sum_{i=1}^{n-k} x_i g_i$.

Preuve du lemme : Posons $g_i := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)\, dt$.

Pour voir que ça convient, appliquer $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)\,dt$ à $\phi(t) = f(tx_1, \dots, tx_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$.

Écrivons $X = \{h_1 = \dots = h_s = 0\}$, $h_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Soit $x \in K$. Alors $\exists\, U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de x sur lequel $f = \sum_i h_i \underbrace{\phi_{i,x}}_{C^\infty}$.

- si $x \notin X(\mathbb{R})$, c'est évident car un des h_i est $\neq 0$ en x.
- si $x \in X(\mathbb{R})$, comme X est lisse en x, on peut trouver $h_{i_1}, \dots, h_{i_c}$ tels que $X(\mathbb{R})$ est, au voisinage de x, le lieu des zéros de la sous-variété $(h_{i_1}, \dots, h_{i_c})$. On applique alors le lemme de Hadamard, au voisinage de x, dans un syst. de coordonnées $(h_{i_1}, \dots, h_{i_c}, x_{j_{c+1}}, \dots, x_{j_n})$.

On extrait un recouvrement fini (U_{x_j}) de K et on choisit (ψ_j) une partition de l'unité adaptée. Posons $\phi_i = \sum_j \phi_{i,x_j} \psi_j$, de sorte que

$$f = \sum_i h_i \phi_i \text{ au voisinage de } K.$$

Pour conclure, on applique Stone-Weierstrass aux fonctions ϕ_i. ∎

Preuve du théorème d'approximation.

Lemme : X variété projective sur $\mathbb{R}$. Alors il existe $U \subseteq X$ affine tel que $U(\mathbb{R}) = X(\mathbb{R})$.

Preuve :
$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N'}_{\mathbb{R}}$$
plongement de Veronese.

$$[x_0 : \dots : x_N] \longmapsto [\underbrace{x_0^2}_{y_0} : x_1^2 : \dots : \underbrace{x_N^2}_{y_N} : \underbrace{x_0x_1}_{y_{N+1}} : x_0x_2 : \dots : x_{N-1}x_N]$$

Posons $U = X \setminus \{x_0^2 + \dots + x_N^2 = 0\} = X \setminus \{y_0 + \dots + y_N = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{N'}_{\mathbb{R}} \setminus \{y_0 + \dots + y_N = 0\} \simeq \mathbb{A}^{N'}_{\mathbb{R}}$.

Preuve du théorème : (i) $\Rightarrow$ (ii) : on a déjà vu cela.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : supposons dans un premier temps, pour simplifier, que $[H] = 0$.

Alors $H = \{z = 0\}$ où $z : U(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ submersive le long de H.

Fixons un plongement $U \hookrightarrow \mathbb{A}^N_{\mathbb{R}}$ qui induit $U(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Etendons z en une fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. On approche f par une fonction polynomiale f', pour la topologie C^1, sur un compact contenant $U(\mathbb{R})$.

On pose $V = \{f' = 0\} \subseteq U$ et $Y \subseteq X$ l'adhérence de Zariski de V dans X.
Que Y convient si f' est C^1-assez proche de f suit des résultats du paragraphe "Perturbations".

(ii) $\Rightarrow$ (i) dans le cas général. Soit $L \to X$ un fibré en droites algébrique avec $w_1(L(\mathbb{R})) = [H] \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

Soit $z : U(\mathbb{R}) \longrightarrow L(\mathbb{R})$ section C^∞ de $L(\mathbb{R})$ transverse à la section nulle telle que $H = \{z = 0\}$.

Comme tout faisceau cohérent sur une variété affine, $L|_U$ est engendré par ses sections globales : il existe $k \geq 0$ et une surjection $\mathcal{O}_U^{\oplus k} \twoheadrightarrow L|_U$. Celle-ci induit une surjection de fibrés vectoriels réels C^∞ :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \times U(\mathbb{R}) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & L(\mathbb{R}) \arrow[dl] \\ & U(\mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

On relève z en des fonctions $f_1, \dots, f_k : U(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ qu'on étend à $\mathbb{R}^N$.

On approche chacune des f_i, pour la topologie C^1 sur $U(\mathbb{R})$ qui est compact, par $f'_1, \dots, f'_k$.

(H) Cycles de codimension supérieure.

Soit X projective lisse $/\mathbb{R}$ de dimension n

Pour étudier les sous-variétés de codim. ≥ 2 de X, c'est plus efficace de travailler en homologie.

<u>Def</u>: On note $H_d^{alg}(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2) \subseteq H_d(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$ le sous-groupe engendré

par les classes de la forme $f_*[Y(\mathbb{R})] \in H_d(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$,

où $f: Y \longrightarrow X$ morphisme de var. proj. lisses $/\mathbb{R}$ avec $\dim(Y) = d$.

<u>Remarque 1</u>: Quand $d = n-1$, l'isomorphisme de Poincaré $H^1(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2) \simeq H_{n-1}(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$

induit bien un isomorphisme $H^1_{alg}(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} H^{alg}_{n-1}(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$.

<u>Remarque 2</u>: En général (pour $d \neq n-1$), $H_d^{alg}(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$ est difficile à calculer.

↳ on traitera ce cas plus tard, par théorie de Hodge.

<u>Th</u> (Akbulut-King): Pour $N \subseteq X(\mathbb{R})$ sous-variété C^∞ de dim $d=1$, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) N admet une approximation algébrique.

(ii) $[N] \in H_1^{alg}(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$.

En revanche:

<u>Th</u>: $N = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Alors $[N] = 0 \in H_2(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2)$. Mais N n'admet pas d'approximation algébrique.

<u>Question ouverte</u> (Nash): Est-ce que toutes les sous-variétés C^∞ fermées $N \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ admettent une approximation algébrique?