V Le théorème de Nash-Tognoli.

A Ensembles algébriques non singuliers

Dans la preuve du théorème de Nash-Tognoli, on peut ignorer le rôle des points complexes non réels. Pour cette raison, il est commode d'utiliser la définition suivante :

Déf : Un ensemble algébrique $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ est le lieu des zéros d'une famille de polynômes à coefficients réels.

C'est le lieu réel de la variété algébrique affine $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ qui est la clôture de Zariski de Z.

On dit que Z est non singulier en $x \in Z$ si X est lisse en x.

Exemple : la grassmannienne $G(k,n) = \{\text{sous-espaces de dimension } k \text{ de } \mathbb{R}^n\}$ peut être vue comme un ensemble algébrique non singulier via

$$\begin{array}{ccc} Gr(k,n) & \hookrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \\ V & \longmapsto & M = \text{projection orthogonale sur } V \end{array}$$

(car l'image peut être définie par les équations $M^2 = M$, ${}^tM = M$, $\mathrm{tr}(M) = k$).

Elle porte un fibré vectoriel tautologique

$$\begin{tikzcd} E(k,n) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ Gr(k,n) \arrow[r, hook] & \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

où $E(k,n) = \{(M,v) \mid M \in Gr(k,n) \text{ et } Mv = v\}$.

Th (Nash-Tognoli) : 1952 1973 M variété C^∞ compacte. Il existe Z ensemble algébrique non singulier avec
$$Z \underset{\text{difféo}}{\simeq} M$$

Remarque : Notons X une variété projective lisse$/\mathbb{R}$ obtenue en prenant une résolution des singularités d'une compactification projective de l'adhérence de Zariski de Z. Alors $X(\mathbb{R}) \underset{\text{difféo}}{\simeq} M$.

La preuve du théorème de Nash-Tognoli a trois étapes.

1. Trouver des "équations C^∞" pour M
2. Les approcher par des équations algébriques (quitte à ajouter à M des composantes connexes) [Nash]
3. Se débarasser des composantes connexes superflues [Tognoli]

B L'application de Gauss.

M C^∞ compacte. Par le théorème de Whitney, $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ pour un certain n.

Souvenons-nous de la construction d'un voisinage tubulaire de M dans $\mathbb{R}^n$.

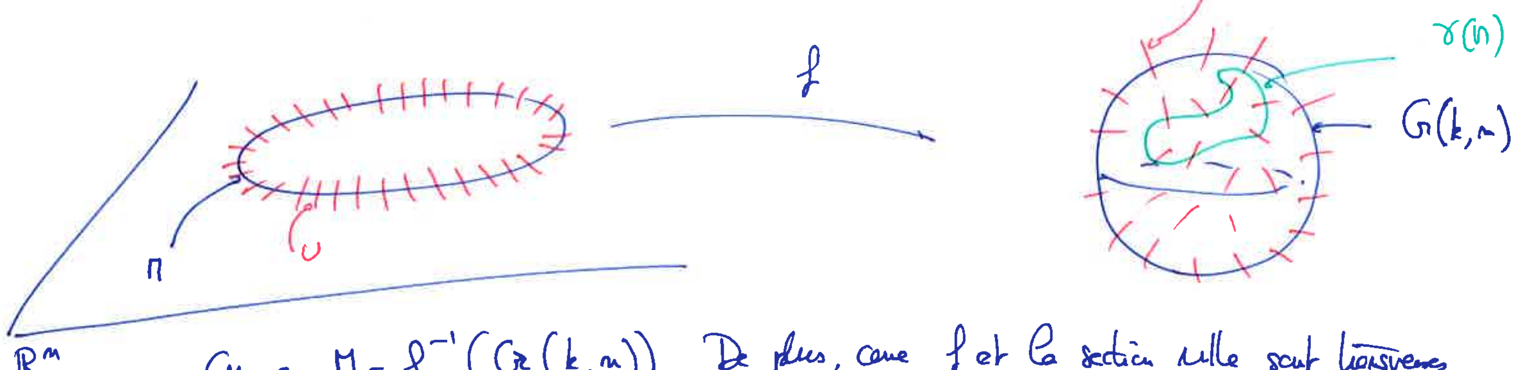
On a $N_{M/\mathbb{R}^n} = \{(x,v),\ x \in M \text{ et } v \in (T_xM)^\perp\}$,

et l'application $\begin{array}{ccc} N_{M/\mathbb{R}^n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x,v) & \longmapsto & x+v \end{array}$ induit un difféo $N_{M/\mathbb{R}^n} \supseteq \underset{\{(x,v),\ \|v\|<\varepsilon\}}{U} \xrightarrow{\sim} \overset{\text{ouvert}}{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ pour ε assez petit.

De plus, on a un diagramme (où $k = n - \dim(X)$) :

$$\begin{tikzcd}
(x,v) \arrow[r, mapsto] & ((T_xM)^\perp, v) \\
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right] & E(k,n) =: E \subseteq \mathbb{R}^m \arrow[d, shift right] \\
M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, shift right, "\text{section nulle}"'] & G(k,n) \arrow[u, shift right, "\text{section nulle}"'] \\
x \arrow[r, mapsto] & (T_xM)^\perp
\end{tikzcd}$$

application de Gauss



On a $M = f^{-1}(G(k,n))$. De plus, comme f et la section nulle sont transverses, les équations que cela donne pour M dans U sont submersives.

Ainsi, si $f' : U \longrightarrow E$ perturbation C^1 de $f : U \to E$, alors $\underset{M'}{f'^{-1}(G(k,n))} \subseteq U$ est difféo à M (et proche de M).

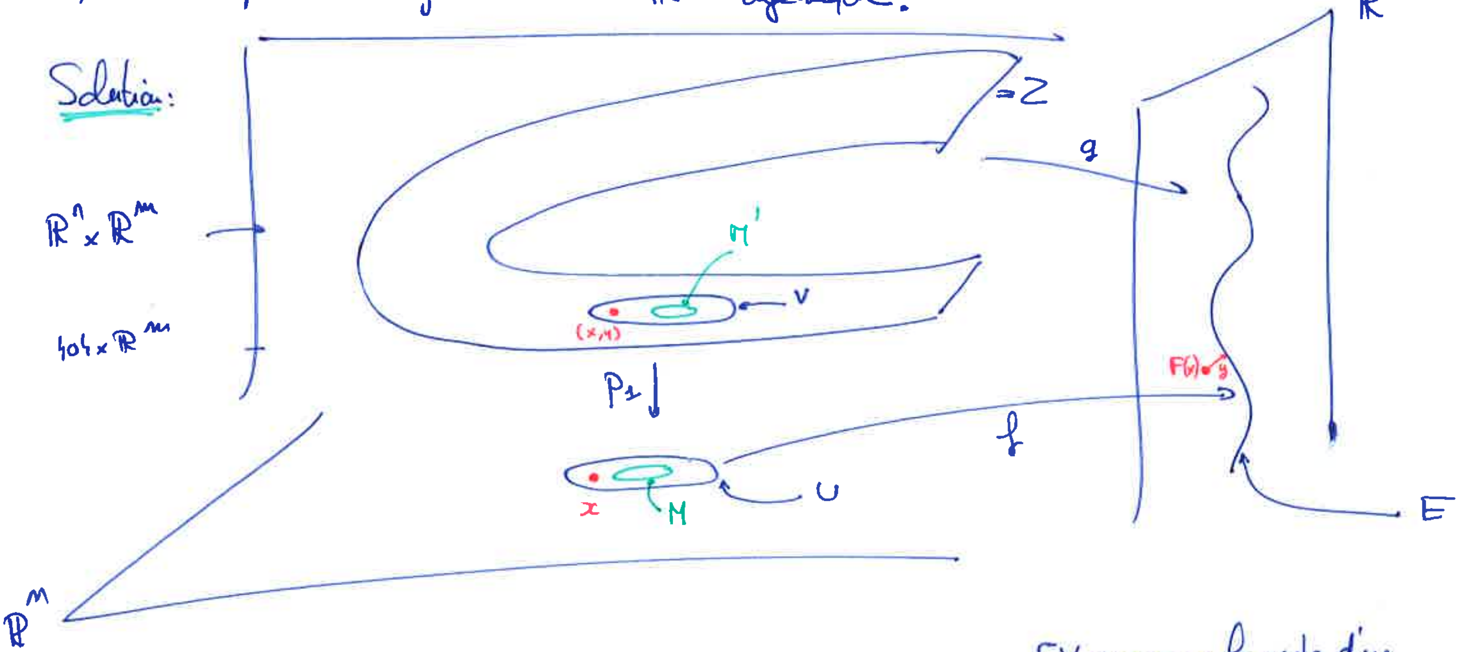
C) Approximation de Nash [Nash]

Ne retenons de la situation précédente que :

$$\mathbb{R}^n \supseteq \overset{\text{ouvert d'adhérence compacte}}{U} \xrightarrow{f} \overset{\text{ens. algébrique non singulier}}{E} \subseteq \mathbb{R}^m$$

On voudrait approcher f par $f' : U \to E$ algébrique. Mais tout ce que Stone-Weierstrass permet, c'est d'approcher en $f' : U \to \mathbb{R}^m$ algébrique !

Solution :



Th : Il existe $Z \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ensemble algébrique

$\varepsilon > 0$

$g : Z \longrightarrow E$ fonction polynomiale

[Y penser comme le graphe d'une application algébrique "multivaluée"]

On parle d'application Nash.

tels que :

- (i) $V := Z \cap (U \times [-\varepsilon, \varepsilon]^m)$ ouvert non singulier de Z
- (ii) $p_1|_V : V \xrightarrow{\sim} U$ difféo
- (iii) $g|_V$ C^1-proche de $f \circ p_1|_V$.

Conséquence : Posons $W = Z \cap g^{-1}(G(k,m))$. C'est un ensemble algébrique.

Alors $\underbrace{W \cap V}_{\text{union de composantes connexes de } W} =: M'$ est difféomorphe à M.

⚠ W a peut-être d'autres composantes connexes.

Preuve : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ polynôme C^1-proche de f sur $\overline{U}$.

Soit $\underset{\underset{E}{\cup\!\shortmid}}{T} \subseteq \mathbb{R}^m$ voisinage tubulaire de E. On peut supposer que $F(U) \subseteq T$

On pose
$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \quad (x, y) \longmapsto (F(x) + y) \\ \\ Z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid F(x)+y \in E \text{ et } y \in (T_{F(x)+y} E)^{\perp} \} \end{cases}$$

- Que, pour ε petit, $Z \cap U \times [-\varepsilon, \varepsilon]^m \xrightarrow[\text{difféo}]{p_1} U$ résulte de la construction d'un voisinage tubulaire de E dans $\mathbb{R}^m$: si $F(x)$ est assez proche de E, alors on peut l'écrire uniquement sous la forme $e - y$, $e \in E$, $\|y\|_\infty < \varepsilon$, $y \in (T_e E)^\perp$. De plus y et e dépendent de manière C^∞ de $F(x)$.

  Cela montre (ii), et (iii) est évident

- Reste à montrer que Z est non singulier le long de V.

  On remarque que $Z = \Phi^{-1}(N)$, où $N \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $N = \{(u,v) \mid u \in E, v \in T_u E^\perp\}$ et l'espace total du fibré normal $N_{E/\mathbb{R}^m}$, donc algébrique non singulier,

  et où $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $(x, y) \longmapsto (F(x)+y, y)$

  est transverse à N le long de V car $T_{(u,v)} N = T_u E \oplus (T_u E)^\perp$

  et $\mathrm{Im}(d\Phi) \supseteq \{(y,y),\ y \in \mathbb{R}^m\}$

  engendrent $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

  Ainsi, Z est non singulier.

Une amélioration : Supposons que $Y \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sont tels que $Y \subseteq M$ et $M = \Omega$ au voisinage de Y.

ensembles algébriques non singuliers

Alors on peut supposer que $Y \times \{0\} \subseteq V$, donc que $Y \times \{0\} \subseteq M'$.

En effet, $\gamma|_Y : Y \longrightarrow Gr(k,n)$ est donc algébrique (c'est la restriction à Y de l'application de Gauss algébrique de Ω).

Ainsi, $f|_Y = \gamma|_Y : Y \longrightarrow E(k,n)$ est algébrique. On peut donc choisir $F|_Y = f|_Y$ par l'amélioration de Stone-Weierstrass. Cela conclut.