DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Irène MARCOVICI
STAGE : Montpellier 2012

Equations fonctionnelles

- Énoncés -

Exercice 1 Déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f(x^3 + x) \leqslant x \leqslant (f(x))^3 + f(x).$$

Exercice 2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous entiers m, n :

$$f(m + f(f(n))) = -f(f(m+1)) - n.$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait $|f(x)| \leqslant 1$ et

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Montrer que f est périodique.

- Corrigé -

Solution de l'exercice 1 Soit $g : x \mapsto x^3 + x$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Par suite, g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g^{-1} sa bijection réciproque. Alors, g^{-1} est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit f une solution éventuelle. Alors, l'énoncé devient : pour tout réel x, on a $f(g(x)) \leqslant x \leqslant g(f(x))$. En appliquant la première égalité à $g^{-1}(x)$, il vient $f(x) \leqslant g^{-1}(x)$. En composant par g^{-1} (qui est croissante) la seconde inégalité, il vient $g^{-1}(x) \leqslant f(x)$.

Et donc $f(x) = g^{-1}(x)$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que g^{-1} est bien solution du problème.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> L'idée est de "créer" de la symétrie dans l'équation fonctionnelle. Soit f une solution éventuelle. On note f^k la k-ième itérée de f. Pour tous entiers m, n, on a alors

$$f(f^2(m) + f^2(n)) = -f^2(f^2(m) + 1) - n.$$

Le membre de gauche étant symétrique en m et n, celui de droite doit l'être également, d'où

$$f^2(f^2(m) + 1) + n = f^2(f^2(n) + 1) + m$$

c.à.d.

$$m - n = f^2(f^2(m) + 1) - f^2(f^2(n) + 1).$$

Or, d'après l'équation fonctionnelle initiale $f^2(f^2(m) + 1) = f(-f^2(2) - m) = f(-k - m)$, où $k = f^2(2)$. Donc, pour tous entiers m, n, on a :

$$m - n = f(-k - m) - f(-k - n).$$

Pour $n = -k$ et $p = -m - k$, on déduit que pour tout entier p, $f(p) = f(0) - p$. Notons qu'en particulier, $f(f(p)) = f(f(0) - p) = f(0) - (f(0) - p) = p$. Réciproquement, si $f : p \mapsto q - p$ où $q \in \mathbb{Z}$ est constante, alors pour tous entiers m, n, on a d'une part $f(m + f(f(n))) = f(m + n) = q - m - n$ et, d'autre part $-f(f(m + 1)) - n = -m - 1 - n$. Par suite, la seule solution du problème est $f : p \mapsto 1 - p$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé (notons qu'il existe bien de telles fonctions, par exemple la fonction $x \mapsto k$ où $k \in [-1, 1]$ est une constante).

On pose $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{6}) - f(x)$. D'après l'équation fonctionnelle, pour tout réel x, il vient :

$$g\left(x + \frac{1}{7}\right) = f\left(x + \frac{13}{42}\right) - f\left(x + \frac{1}{7}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) - f(x) = g(x).$$

Par suite, la fonction g est $\frac{1}{7}$-périodique. Elle est donc également 1-périodique (puisque $1 = 7 \times \frac{1}{7}$). Ainsi, pour tout réel x, on a $g(x + 1) = g(x)$, c.à.d $f(x + 1 + \frac{1}{6}) - f(x + 1) = f(x + \frac{1}{6}) - f(x)$, ou encore

$$f\left(x + 1 + \frac{1}{6}\right) - f\left(x + \frac{1}{6}\right) = f(x + 1) - f(x).$$

Cela signifie que la fonction $h : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est $\frac{1}{6}$-périodique. Et donc elle est aussi 1-périodique. Par suite, pour tout réel x, on a $h(x+1) = h(x)$ c.à.d. :

$$f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, on en déduit que la quantité $f(a+n) - f(a+n-1)$ est indépendante de n. Notons c cette valeur commune. Alors, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$f(a+k) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} f(a+i) - f(a+i-1) = kc + f(a).$$

Si l'on fait tendre k vers $+\infty$, on constate que, puisque f est bornée, c'est donc que $c = 0$. Mais alors $f(a+1) - f(a) = 0$, et ce pour tout réel a. Par suite, f est 1-périodique.