DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Vincent JUGÉ
STAGE : Montpellier 2013

Logique

- Introduction : pourquoi la logique ? -

Ce cours consiste en une introduction à la logique. Les concepts qui y sont présentés sont simples, mais à la base de tout raisonnement mathématique. Aussi est-il très important de les maîtriser si l'on tient à explorer, seul, en cours ou à l'aide d'un livre, le monde merveilleux des mathématiques.

À l'image de toutes les disciplines scientifiques, les mathématiques cherchent à fournir une modélisation du monde. Cependant, l'approche choisie est différente de celles de la plupart des disciplines dites expérimentales. Ainsi, en biologie, on travaille sur le vivant ; en chimie, sur les interactions entre les différents composants de la matière, tels que les atomes, les ions et les molécules ; dans les deux cas, l'objet d'intérêt peut être appréhendé par l'expérience, et un des buts de son étude est d'en trouver une modélisation aussi simple et précise que possible.

Au contraire, les mathématiques concernent l'étude d'objets entièrement issus de l'esprit humain, et dont on peut donc espérer qu'ils soient parfaitement définis. En particulier, la complexité d'une simple paramécie est terrifiante, tandis que celle de l'ensemble vide l'est beaucoup moins. Travailler sur des objets simples permet alors au mathématicien d'énoncer des assertions extrêmement précises : si le concept d'être vivant est très flou, ce n'est pas le cas du nombre π.

Il convient alors d'utiliser un vocabulaire adapté pour énoncer ces assertions que l'on peut rendre aussi précises que l'on souhaite. C'est le rôle de la *logique*, qui englobe en particulier le concept de *raisonnement*. Qu'est-ce qui peut faire qu'une assertion soit *vraie* ou *fausse* ? Ou bien simplement que cette assertion ait un sens ? C'est ce que nous allons voir ci-dessous.

Si Paris est la capitale du Mali…

Qu'est-ce qu'un raisonnement ? C'est une suite d'énoncés tels que, si le premier énoncé de la suite est vrai, alors on peut raisonnablement se convaincre que le deuxième énoncé est vrai, puis le troisième, etc, jusqu'au dernier énoncé, qui est donc vrai. En particulier, le concept de raisonnement n'est absolument pas réservé aux mathématiques : quand un papa dit à son enfant "**si tu ne manges pas ton gratin de courgettes, tu seras privé de glace au chocolat**", l'enfant en *déduit* qu'il a tout intérêt à manger son gratin de courgettes (sauf si, bien évidemment, il préfère la glace à la pistache).

Il a donc, ne serait-ce qu'intuitivement, élaboré le raisonnement suivant :

1. Si je ne mange pas mes courgettes, je n'aurai pas de chocolat.
2. Or, j'aime tant le chocolat que je serais prêt à manger également des courgettes pour pouvoir en déguster.
3. Je vais donc manger des courgettes, et ainsi je pourrai ensuite manger du chocolat.

Notons cependant que ce raisonnement est, en toute généralité, *faux* ! En effet, la seule chose que l'enfant sait est que, s'il ne mange pas ses courgettes, il ne mangera pas de chocolat non plus. Mais si son papa est un logicien sadique, il se peut très bien que l'enfant n'ait pas droit à de la glace au chocolat *même s'il a mangé ses courgettes* ! Et oui : le papa a simplement dit "**si tu ne manges pas ton gratin de courgettes, tu seras privé de glace au chocolat**", mais n'a pas rajouté "**si tu manges ton gratin de courgettes, tu auras le droit de manger de la glace au chocolat**".

C'est là l'une des difficultés que crée la langue française (de même que bon nombre d'autres langues) quand on essaie d'appréhender le raisonnement logique de manière précise : la deuxième partie de la phrase (celle que n'a pas rajoutée le papa) était sous-entendue dans ses propos : quel monstre oserait ainsi manipuler ses enfants, et surtout subir les pleurs assourdissants qui suivront à coup sûr la découverte d'un tel traquenard ? Il convient donc de faire très attention à distinguer *implication* et *équivalence*.

Dans notre exemple, l'assertion du papa était une simple implication : "**si A, alors B**". Mais son enfant l'a interprété comme une équivalence : "**si A, alors B, et si (non A), alors (non B)**". En outre, *implication* n'est pas *causalité*.

Ainsi, la phrase "**si Paris est la capitale du Mali, alors Paris est la capitale du Togo**" est. . .*vraie* !

Ce que je viens de dire peut vous paraître évident, mais l'expérience montre que c'est loin d'être le cas pour tout le monde. En particulier, notons bien que l'on a dit "**si Paris est la capitale du Mali, alors Paris est la capitale du Togo**", et non pas "**si Paris *était* la capitale du Mali, alors Paris *serait* la capitale du Togo**". Dans le premier cas, on dit qu'une assertion fausse implique une autre assertion fausse ; dans le deuxième cas, on essaie d'imaginer (de manière totalement floue) une situation où la première assertion serait vraie, et on se demande si la deuxième assertion serait vraie aussi : les deux cas de figure n'ont rien à voir !

Une fois encore, il faut donc se méfier des raccourcis de raisonnement auxquels on est habitué quand on parle dans la vie de tous les jours : on utilise un vocabulaire peu précis, parfois à mauvais escient, mais la situation est si simple que tout le monde comprend quand même ce que l'on veut dire, et ce même sans y faire attention. Cependant, quand on tient à énoncer des assertions précises et à les démontrer rigoureusement, et que ces assertions ne sont plus des évidences, alors il faut prendre garde de ne pas dire n'importe quoi, et choisir judicieusement les mots que l'on emploie devient indispensable !

C'est pour éviter cet écueil que les mathématiciens ont inventé leurs propres notations : chacun des symboles que l'on pourra ainsi utiliser a un sens bien précis, qu'il convient de connaître avant de l'utiliser, et qui permet d'énoncer des assertions aussi précises que possible, donc qui ont une chance d'être vraie. On pourrait se passer de telles notations et rédiger les mathématiques comme on le faisait dans l'Antiquité ou à la Renaissance. Mais le moindre exercice de 4$^{\text{ème}}$ prendrait alors des pages et des pages, ce qui ne serait guère pratique.

Dans la suite, nous verrons donc quelques unes de ces notations mathématiques, mais surtout leur signification, ainsi que la manière de (ne pas) les utiliser : utiliser de telles notations à mauvais escient peut rendre un texte complètement inintelligible !

Exercice 1 Durant la première guerre mondiale, un militaire remarqua que, alors que presque toutes les parties des avions rentrés du combat portaient des traces d'impacts de balles, ce n'était jamais le cas du cockpit. Il annonça alors à ses supérieurs que le cockpit était fragile, et qu'il fallait le renforcer. Êtes vous d'accord avec cette conclusion ?

Si oui, donner un exemple de raisonnement aussi précis que possible, qui sera à même de convaincre n'importe quel général ; si non, expliquer tout aussi soigneusement pourquoi le militaire a tort.

De l'usage des symboles mathématiques

J'espère que les paragraphes précédents vous ont convaincu que les mathématiques étaient en fait du Français (ou de l'Anglais, de l'Allemand, de l'Esperanto, bref, votre langue préférée). Plus précisément, tous les symboles mathématiques, qui peuvent donner à cette discipline une apparence cryptique, sont en fait des raccourcis pour éviter de faire des vraies phrases tellement longues qu'elles en deviendraient illisibles.

Sans plus traîner, voyons donc les principaux de ces symboles, que l'on utilise en logique :

- $\neg$, la *négation* : on dit que "la négation de A" (ce que l'on note aussi "$\neg$ A", "$\overline{\text{A}}$" ou "non A") est vraie si et seulement si A est faux.
- $\wedge$, la *conjonction* : on dit que "A et B" (ce que l'on note aussi "A $\wedge$ B" ou "A $\cdot$ B") est vrai si et seulement si A et B sont tous les deux vrais.
- $\vee$, la *disjonction* : on dit que "A ou B" (ce que l'on note aussi "A $\vee$ B" ou "A + B") est vrai si et seulement si, au choix, soit A est vrai, soit B est vrai (soit les deux).
- $\Rightarrow$, l'*implication* : on dit que "A implique B" (ce que l'on note aussi "A $\Rightarrow$ B") si et seulement si, au choix, soit A est faux, soit B est vrai (soit les deux).
- $\Leftrightarrow$, l'*équivalence* : on dit que "A est équivalent à B" (ce que l'on note aussi "A $\Leftrightarrow$ B") si et seulement si, au choix, soit A et B sont tous les deux faux, soit ils sont tous les deux vrais.

Insistons une fois encore sur la locution "si et seulement si" : au paragraphe précédent, la papa disait "si A, alors B" alors qu'il pensait en fait "B si et seulement si A". En particulier, dans ses propos, rien ne l'empêchait de punir son enfant même si ce dernier était sage, alors qu'il pensait en fait récompenser le charmant bambin de sa sagesse éventuelle.

D'autre part, **attention** ! S'il est utile de connaître ces notations, au cas où on les rencontre un jour, il est très important de ne les utiliser qu'avec parcimonie ! En particulier, il est toujours plus sage de noter la négation, la disjonction et la conjonction avec des mots français (en écrivant "non", "ou" et "et") plutôt qu'en utilisant des symboles cabalistiques, surtout dans une copie écrite à la va-vite et à l'écriture chancelante.

En particulier, voici le modèle-type, mais maintes fois rencontré, de ce qu'il ne faut *surtout pas faire* :

Prouvons qu'il existe une infinité d'entiers pairs. Supposons qu'il existe un nombre fini d'entiers pairs. Donc n pair maximal $\Rightarrow$ n+2 pair $\Rightarrow$ n n'est pas maximal $\Rightarrow$ impossible, d'où le résultat.

Évidemment, cet extrait de copie d'élève est une caricature inventée pour l'occasion, mais les incorrections qu'elle contient sont cependant couramment rencontrées dans une copie mathématique. Le début de la solution proposée est correct, mais les choses se gâtent à la phrase "Donc n pair ..." En effet :

– L'entier n n'est nulle part défini : il faut *toujours* définir les objets que l'on utilise *avant* de les utiliser, ne serait-ce que de manière informelle ! Ici, l'entier n désigne implicitement l'entier pair maximal dont on a supposé (de manière erronée) l'existence.
– Marquer "impossible" en fin de ligne est sympathique ; faire une vraie phrase où l'on marque clairement que la situation évoquée ici est impossible serait beaucoup mieux !
– En faisant fi des précédentes remarques, on a montré que l'existence d'un entier pair maximal était impossible, mais le lien avec la finitude éventuelle de l'ensemble des entiers pairs n'apparait nulle part. En particulier, écrire "donc" en début de phrase laisse penser que la suite d'implications ici écrite dépend de la finitude supposée de l'ensemble des nombres pairs, alors que cette suite d'implications est vraie en toute généralité.

Il aurait plutôt fallu écrire quelque chose comme :

Prouvons qu'il existe une infinité d'entiers pairs. Supposons qu'il existe un nombre fini d'entiers pairs. Il en existe alors un maximal, que l'on note n. Puisque n est pair, alors n+2 est pair aussi, donc n ne peut pas être le plus grand entier pair, ce qui contredit sa définition. On en conclut que notre supposition aboutissait à une situation impossible, ce qui montre bien qu'elle était fausse, c'est-à-dire qu'il existe une infinité d'entiers pairs.

En particulier, notons bien que savoir s'exprimer en mathématiques, c'est avant tout s'avoir s'exprimer en Français ! Le but, quand on écrit une rédaction mathématique, n'est pas simplement d'avoir raison, mais de convaincre l'autre que l'on a raison. Une copie vraie mais inintelligible ne vaut donc guère mieux qu'une copie fausse.

Exercice 2 Montrer soigneusement qu'il existe une infinité d'entiers impairs divisibles par 2013.

Logique booléenne et tables de vérité

Maintenant que l'on a découvert quelques symboles logiques ainsi que leur signification et la manière de les utiliser, faisons le lien avec ce que l'on appelle la logique *booléenne*. Ici, on identifie une assertion fausse à l'entier 0, et une assertion vraie à l'entier 1. En effet, en logique, on ne s'intéresse qu'au caractère faux ou vrai des assertions étudiées !

Par exemple, les assertions "Paris est la capitale du Mali" et "Paris est la capitale du Togo" sont fausses, donc toutes les deux identifiées à 0 : du point de vue de la logique, ces deux assertions sont strictement équivalentes. Au contraire, l'assertion "si Paris est la capitale du Mali, alors Paris est la capitale du Togo" est vraie, donc identifiée à 1, et est logiquement équivalente à toute autre assertion vraie.

La logique booléenne a un avantage certain, puisque l'on peut considérer toutes les assertions étudiées comme appartenant à l'ensemble $\{0, 1\}$. En particulier, on peut ainsi redéfinir les *connecteurs logiques* mentionnés dans la partie précédente :

$\neg$: $\neg a = 1 - a$.

$\wedge$: $a \wedge b = a \times b$.

$\vee$: $a \vee b = \max\{a, b\}$.

$\Rightarrow$: $a \Rightarrow b = \max\{1 - a, b\}$.

$\Leftrightarrow$: $a \Leftrightarrow b = a \times b + (1 - a) \times (1 - b)$.

On peut aussi voir cela dans des *tables de vérité* :

$\mathbf{a}$	**0**	**1**
$\neg a$	1	0

$\mathbf{a}$	**0**	**0**	**1**	**1**
$\mathbf{b}$	**0**	**1**	**0**	**1**
$a \wedge b$	0	0	0	1
$a \vee b$	0	1	1	1
$a \Rightarrow b$	1	1	0	1
$a \Leftrightarrow b$	1	0	0	1

C'est de là que viennent les notations $\cdot$ et $+$ utilisées pour symboliser la conjonction et la disjonction : la conjonction peut vraiment être considérée comme un produit, tandis que la disjonction peut être vue comme une addition (à ceci près que l'on impose la relation $1 + 1 = 1$, car le résultat d'une disjonction ne peut prendre que les valeurs 0 et 1).

On reconnaît bien là le fait que l'assertion "si Paris est la capitale du Mali, alors Paris est la capitale du Togo" est vraie : puisque "Paris est la capitale du Mali" et "Paris est la capitale du Togo" sont identifiées à l'entier 0, alors l'assertion "si Paris est la capitale du Mali, alors Paris est la capitale du Togo" est identifiée à l'entier $(0 \Rightarrow 0) = \max\{1-0, 0\} = 1$.

En outre, l'utilisation de tables de vérité rend particulièrement efficace, dans certains cas, la démonstration de certaines propositions. Par exemple, on peut se demander à quelles conditions sur a, b et c la proposition $a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$ est vraie. Il suffit alors de faire une table de vérité, certes un peu plus grande que celles montrées ci-dessus :

a	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
b	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
c	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
$b \Leftrightarrow c$	1	0	0	1	1	0	0	1
$a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$	1	1	1	1	1	0	0	1

Ici, on constate que la proposition $a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$ est vraie dès lors que $a = 0$, ou bien que $b = c$ (ce dont on aurait certes pu se douter dès le départ), et faux dans les autres cas.

Exercice 3 Montrer que toute fonction $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ peut s'écrire à partir des connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$ et $\neg$. Peut-on généraliser le résultat aux fonctions $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$?

Quantificateurs exisentiel et universel

Deux autres symboles que vous avez pu déjà rencontrer, mais qui ne sont pas encore mentionnés ici, sont les symboles de *quantification* :

$\forall$, le quantificateur *universel* : si E est un ensemble et $P(x)$ est une propriété, dépendant d'un élément x de E (et qui peut donc être vraie ou fausse selon l'élément considéré), alors on dit que "pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie" (ce que l'on note "$\forall x \in E, P(x)$") si et seulement si la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E.

$\exists$, le quantificateur *existentiel* : si E est un ensemble et $P(x)$ est une propriété, dépendant d'un élément x de E (et qui peut donc être vraie ou fausse selon l'élément considéré), alors on dit que "il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie" (ce que l'on note "$\exists x \in E, P(x)$") si et seulement si la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.

Intuitivement, le quantificateur universel consiste en fait en une immense conjonction, qui regrouperait tous les éléments de E : par exemple, si E est un ensemble fini, contenant les trois éléments a, b et c, alors $\forall x \in E, P(x)$ est une assertion vraie si et seulement si $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$ sont toutes les trois vraies, ce que l'on peut aussi écrire $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$. Mais utiliser le quantificateur universel est pratique quand E est un ensemble très grand, voire un ensemble infini ! ou alors quand on ne connaît pas bien les éléments de E.

De même, le quantificateur exisentiel consiste en fait en une immense disjonction, qui regrouperait tous les éléments de E : dans le même exemple que précédemment, $\exists x \in E, P(x)$ est une assertion vraie si et seulement si au moins l'une des assertions $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$ est vraie, ce que l'on peut aussi écrire $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$.

Cependant, et de même que pour les connecteurs logiques tels que $\Rightarrow$ et $\vee$, il faut faire attention à la façon dont on utilise les symboles $\forall$ et $\exists$ et, dans le doute, mieux vaut mettre explicitement " pour tout x appartenant à l'ensemble E..." En particulier, il faut bien prendre garde de ne jamais utiliser ces quantificateurs si l'on ne sait pas dans quel ensemble E on peut choisir l'élément x. Et, bien sûr, de même qu'il faut à tout prix éviter d'écrire "$\Rightarrow$" au lieu de "donc", ou bien "$\Leftrightarrow$" au lieu de "ce qui est équivalent à" ou bien "c'est-à-dire", on n'utilise pas les symboles "$\forall$" et "$\exists$" en guise d'abbréviation : gare à celui qui écrira "`merci ∀ !`" à la fin d'une lettre de remerciements !

Enfin, il faut bien évidemment prendre garde de ne jamais définir deux fois le même objet, et de se rappeler que les *variables* définies à l'aide d'un quantificateur existentiel ou universel sont muettes :

- les assertions "$\forall x \in E, P(x)$" et "$\forall \zeta \in E, P(\zeta)$" sont équivalentes (quand bien même le symbole ζ fait beaucoup plus savant qu'un banal x) ;
- l'assertion "$\exists x \in E, \forall x \in F, P(x)$" n'a aucun sens, car la variable x était déjà définie (dans la partie "$\exists x \in E$") quand on tente de la redéfinir (dans la partie "$\forall x \in F$").

Jouer avec les formules logiques

L'intérêt des connecteurs logiques et des quantificateurs est d'exprimer simplement des formules mathématiques. Cependant, certaines formules peuvent être difficiles à manipuler, de même qu'il peut être difficile de se faire une intuition sur le sens mathématique de la proposition qu'elles représentent. Une idée est donc de simplifier les formules, et également de reconnaître certains cas où l'on aurait envie, mais à tort, de croire que certaines formules sont équivalentes alors qu'elles ne le sont pas.

Tout d'abord, voici quelques relations que l'on peut trouver entre les connecteurs logiques, et que l'on peut facilement vérifier à l'aide de tables de vérité :

– **A est équivalent à B** si et seulement si **A et B s'impliquent l'un l'autre**.
– **A implique B** si et seulement si **(non A) ou B** est vrai.
– **A ou B** est vrai si et seulement si **non ((non A) et (non B))** est vrai.
– **A et B** est vrai si et seulement si **non ((non A) ou (non B))** est vrai.
– **non(non A)** est vrai si et seulement si **A** est vrai.

Les deux dernières lignes sont aussi connues sont le nom de *relations de Moivre*, en hommage à celui qui les a identifiées pour la première fois, et du fait de leur importance.

a	**0**	**0**	**1**	**1**
b	**0**	**1**	**0**	**1**
$a \Leftrightarrow b$	1	0	0	1
$a \Rightarrow b$	1	1	0	1
$b \Rightarrow a$	1	0	1	0
$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	1	0	0	1

$a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

a	**0**	**0**	**1**	**1**
b	**0**	**1**	**0**	**1**
$a \Rightarrow b$	1	1	0	1
$\neg a$	1	1	0	0
$(\neg a) \vee b$	1	1	0	0

$a \Rightarrow b \equiv (\neg a) \vee b$

a	**0**	**0**	**1**	**1**
b	**0**	**1**	**0**	**1**
$a \vee b$	0	1	1	1
$\neg(a \vee b)$	1	0	0	0
$\neg a$	1	1	0	0
$\neg b$	1	0	1	0
$(\neg a) \wedge (\neg b)$	1	0	0	0

$\neg(a \vee b) \equiv (\neg a) \wedge (\neg b)$

a	**0**	**0**	**1**	**1**
b	**0**	**1**	**0**	**1**
$a \wedge b$	0	0	0	1
$\neg(a \wedge b)$	1	1	1	0
$\neg a$	1	1	0	0
$\neg b$	1	0	1	0
$(\neg a) \vee (\neg b)$	1	1	1	0

$\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a) \vee (\neg b)$

a	**0**	**1**
$\neg a$	1	0
$\neg(\neg a)$	0	1

$a \equiv \neg(\neg a)$

On peut faire encore plus fort et toujours transformer une formule logique en une formule équivalente, mais :

– sans symbole $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, et

– où les symboles $\neg$ apparaissent toujours aussi à droite que possible.

Concrètement, on commence par faire disparaître tous les symboles $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ en utilisant les relations ci-dessus. Puis il s'agit de faire passer un symbole $\neg$ "à droite" d'un connecteur $\neg$, $\vee$ ou $\wedge$, ou d'un quantificateur $\forall$ ou $\exists$. On procède alors en faisant les transformations suivantes :

– "$\neg(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{P}(\mathbf{x}))$" devient "$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})$".
– "$\neg(\exists \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{P}(\mathbf{x}))$" devient "$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})$".
– "$\neg(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$" devient "$(\neg \mathbf{a}) \vee (\neg \mathbf{b})$".
– "$\neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$" devient "$(\neg \mathbf{a}) \wedge (\neg \mathbf{b})$".
– "$\neg(\neg \mathbf{a})$" devient "$\mathbf{a}$".

On a déjà montré, ci-dessus, que les trois dernières simplifications étaient légitimes. Quant aux deux premières, on se convainc facilement qu'elles fonctionnes si on se rappelle que les quantificateurs existentiel et universel représentent respectivement des disjonctions et des conjonctions "géantes".

Cela dit, si on le préfère, on peut aussi constater directement que ces simplifications fonctionnent : dire "**il est faux que la proposition** $P(x)$ **soit vérifiée pour tout** $x \in E$" revient à dire "**il existe au moins un** $x \in E$ **tel que la proposition** $P(x)$ **n'est pas vérifiée**", ou encore "**il existe au moins un** $x \in E$ **tel que la proposition** $\neg P(x)$ **est vérifiée**". De même, dire "**il est faux que la proposition** $P(x)$ **soit vérifiée pour au moins un** $x \in E$" revient à dire "**pour tout** $x \in E$**, la proposition** $P(x)$ **n'est pas vérifiée**", ou encore "**pour tout** $x \in E$**, la proposition** $\neg P(x)$ **est vérifiée**". Devant la lourdeur de telles phrases, on comprend vite l'intérêt de l'utilisation du langage mathématique et de ses symboles.

Enfin, de même que l'ordre des mots est important en Français, l'ordre des mots ou des symboles est important en mathématique. Ainsi, les phrases "**La France a battu la Suisse 3 à 0**" et "**La Suisse a battu la France 3 à 0**" n'ont pas du tout la même signification, alors qu'on s'est contenté d'y échanger les places de deux mots. De même, l'ordre des connecteurs et quantificateurs est très important. Par exemple, on peut dire que tout enfant a une maman : "**pour tout élément E de l'ensemble des enfants, il existe un élément M de l'ensemble des mamans tel que M est la maman de E**". Cette phrase est très différente de la suivante, et qui signifie que tous les enfants du monde ont la même maman : "**il existe un élément M de l'ensemble des mamans tel que, pour tout élément E de l'ensemble des enfants, M est la maman de E**".

Pour résumer, notons que :

– on peut toujours échanger deux occurrences successives du quantificateur universel : les assertions "$\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$" et "$\forall y \in F, \forall x \in$

$E, P(x,y)$" sont équivalentes ;
- on peut toujours échanger deux occurrences successives du quantificateur existentiel : les assertions "$\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$" et "$\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$" sont équivalentes ;
- on ne peut *pas* échanger deux quantificateurs universel et existentiel (a priori) : les assertions "$\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$" et "$\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$" ne sont en général pas équivalentes ;
- on peut toujours faire passer les symboles $\neg$ le plus à droite possible (en faisant comme indiqué ci-dessus) ;
- on peut toujours modifier le nom d'une variable introduite à l'aide d'un quantificateur existentiel ou universel (mais alors il faut faut faire attention de modifier le nom de cette variable à chaque fois qu'elle apparait ensuite, et à ne pas réutiliser un nom de variable déjà utilisé) ;
- on peut toujours faire passer le quantificateur universel à gauche des connecteurs **ou** et **et** : les assertions "$(\forall x \in E, P(x,y)) \vee Q(y))$" et "$\forall x \in E, (P(x,y) \vee Q(y)$" sont équivalentes, de même que les assertions "$(\forall x \in E, P(x,y)) \wedge Q(y))$" et "$\forall x \in E, (P(x,y) \wedge Q(y))$" sont équivalentes ;
- on peut toujours faire passer le quantificateur exitentiel à gauche des connecteurs **ou** et **et** : les assertions "$(\exists x \in E, P(x,y)) \vee Q(y))$" et "$\exists x \in E, (P(x,y) \vee Q(y))$" sont équivalentes, de même que les assertions "$(\exists x \in E, P(x,y)) \wedge Q(y))$" et "$\exists x \in E, (P(x,y) \wedge Q(y))$" sont équivalentes.

On peut se dire qu'il y a là beaucoup de règles à retenir : ce n'est pas totalement faux, mais on peut aussi les réinventer en direct tant elles sont naturelles : une méthode pratique est de regarder ce que de telles règles (celles-ci ou d'autres qu'on aura voulu inventer) donnent sur des exemples simples, ou encore de se rappeler que les quantificateurs ne sont rien d'autre que des conjonctions et des disjonctions géantes.

Exercice 4 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $L \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \varepsilon$. Cette définition est-elle équivalente aux définitions suivantes ?

1. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \leqslant 0 \vee (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |L - u_n| \leqslant \varepsilon \vee n < N)$;
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \varepsilon$;
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n > N) \Rightarrow |L - u_n| < \varepsilon$;
4. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \varepsilon$.

- Différents types de raisonnements -

Le raisonnement par équivalences successives

Nous avons raconté, ci-dessus, en quoi la logique traitait des assertions qui sont soit vraies, soit fausses. En outre, nous avons vu comment lier certaines de ces assertions à d'autres, au moyen de *connecteurs logiques* comme la disjonction et l'équivalence. Il nous faut maintenant nous intéresser au *raisonnement*, c'est-à-dire à ce qui permet de dire, sachant que certaines propositions sont vraies, qu'une autre proposition est vraie (ou fausse).

Le premier de ces modes de raisonnement est le raisonnement *par équivalences successives*. Il vise à répondre à des questions du type : "**Quels sont les entiers** n **tels que la propriété** $P(n)$ **soit vraie ?**" Pour répondre à une telle question, on cherche des propriétés $P_1, P_2, \ldots, P_k$ telles que, quel que soit l'entier n considéré, $P(n) \Leftrightarrow P_1(n) \Leftrightarrow P_2(n) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_k(n)$. Alors on peut dire que les entiers n tels que la propriété $P(n)$ est vraie sont exactement les entiers n tels que la propriété $P_k(n)$ est vraie.

Notons, au passage, que ce genre de raisonnements n'a d'intérêt que si la propriété P_k apparaît comme plus simple ou plus naturelle que la propriété P elle-même. Sinon, point n'était besoin de s'embêter, on aurait pu se contenter de l'assertion (évidente mais peu informative) selon laquelle "**Les entiers** n **tels que la propriété** $P(n)$ **est vraie sont les entiers tels que la propriété** $P(n)$ **est vraie.**"

Le raisonnement par analyse et synthèse

Dans certains cas, il est difficile de procéder par équivalences successives : comment trouver la suite de propriétés $P_1, P_2, \ldots, P_k$ qui fonctionnera ? On peut alors recourir à un autre type de raisonnement, *a priori* plus facile à trouver : le raisonnement *par analyse et synthèse*. Lui aussi vise à répondre aux questions du type : "**Quels sont les entiers** n **tels que la propriété** $P(n)$ **soit vraie ?**" Cependant, le processus suivi est différent.

Dans un premier temps, on cherche des propriétés $P_1, P_2, \ldots, P_k$ telles que, quel que soit l'entier n considéré, $P(n) \Rightarrow P_1(n) \Rightarrow P_2(n) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_k(n)$: il s'agit de la phase d'*analyse*. Puis, dans un deuxième temps, on cherche d'autres propriétés $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\ell$ telles que, quel que soit l'entier n considéré, $P_k(n) \Rightarrow Q_1(n) \Rightarrow Q_2(n) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_\ell(n) \Rightarrow P(n)$: c'est la phase de *synthèse*.

On peut alors en déduire que $P(n) \Rightarrow P_k(n)$ et que $P_k(n) \Rightarrow P(n)$, ce qui signifie que $P(n)$ et $P_k(n)$ sont des propriétés équivalentes. Notons que le raisonnement par équivalences successives est, dans un sens, un cas particulier du raisonnement par analyse et synthèse, où l'on aurait choisi $Q_1 = P_{k-1}, Q_2 = P_{k-2}, \ldots, Q_\ell = P_1$. Cependant, s'il est possible de procéder directement par équivalences successives, il est alors souvent plus simple d'exposer le résultat obtenu.

En outre, il est bien sur possible d'inverser l'ordre des phases d'analyse et de synthèse, voire de mélanger les deux. De manière générale, on pourra toujours se permettre de mélanger plusieurs types de raisonnement différents ; mais alors il faudra veiller à rester très clair sur le type de raisonnement que l'on est en train de suivre : il faut que le lecteur ait toujours une idée assez précise du cheminement suivi dans le raisonnement, ce sans quoi il sera vite perdu, donc dans l'impossibilité de le comprendre.

Exercice 5 Identifier l'ensemble des paires (x, y) de nombres réels telles que $2x + y = 5$ et $x - 3y = 6$. On procédera de deux manières différentes :

1. par équivalences successives ;
2. par analyse et synthèse.

Le raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposée est utile quand on veut démontrer des implications. Il vise à répondre à une question du type : "**Montrer que A** $\Rightarrow$ **B.**"

Il consiste simplement à montrer une *autre* implication que celle demandée, à savoir l'implication "(non B) $\Rightarrow$ (non A)". En effet, en utilisant une table de vérité, on constate aisément que les deux propriétés "A $\Rightarrow$ B" et "(non B) $\Rightarrow$ (non A)" sont équivalentes :

A	**0**	**0**	**1**	**1**
B	**0**	**1**	**0**	**1**
$A \Rightarrow B$	1	1	0	1
$\neg A$	1	1	0	0
$\neg B$	1	0	1	0
$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	1	1	0	1

$A \Rightarrow B \equiv (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe du *tiers exclus* : soit une propriété A est vraie, soit elle est fausse. Le raisonnement par l'absurde vise à répondre à une question du type : "**Montrer que la propriété A est fausse.**"

Il consiste alors à supposer que la propriété A est vraie, puis, sous cette hypothèse, à aboutir à une absurdité. En d'autres termes, il s'agit de trouver des propriétés $P_1, P_2, \ldots, P_k$ telles que $A \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_k$, où P_k est une propriété notoirement fausse. On en déduit alors que la propriété A ne pouvait être vraie et, puisqu'elle est nécessairement soit vraie soit fausse, elle est fausse.

En particulier, dès lors que l'on souhaite montrer qu'une propriété A est fausse, on peut toujours supposer, sans perte de généralité. En effet, dans la vie, il y a deux cas de figure : soit la propriété A est fausse, auquel cas on a déjà gagné ; soit elle est vraie, et c'est le seul cas intéressant, donc le cas dans lequel on décide de se placer.

On notera cependant que de nombreux lecteurs tendent à considérer l'utilisation du raisonnement par l'absurde comme assez lourd : si on peu montrer directement que A est fausse, pourquoi s'embêter à supposer d'abord que A est vraie, et ainsi s'encombrer d'une hypothèse inutile ? De manière générale, en effet, plus une preuve est simple, mieux elle sera comprise, et plus son auteur sera content.

Enfin, notons le raisonnement par l'absurde n'est qu'un cas particulier du raisonnement par contraposée : en effet, pour montrer la propriété "non A" — c'est-à-dire la propriété "**Vrai** $\Rightarrow$ (non A)" — on a en fait montré la propriété "A $\Rightarrow$ **Faux**".

Exercice 6 Identifier l'ensemble des entiers naturels non nuls n tels que n^n est pair.

Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence fait suite à la question naïve : jusqu'où savez-vous compter ? Poser cette question à un enfant en bas-âge est généralement délectable, car quand il annonce un nombre (par exemple "un million"), on peut lui demander : "alors tu ne sais pas compter jusqu'à un million un ?" Ce à quoi il répondra invariablement "si, bien sûr !"

De manière générale, quand on sait compter de 1 jusqu'à n et qu'on sait compter de n jusqu'à $n+1$, alors on sait compter de 1 jusqu'à $n+1$. Puis, si l'on sait compter de $n+1$ jusqu'à $n+2$, alors on sait en fait compter de 1 jusqu'à $n+2$. Et ainsi de suite. C'est cet *ainsi de suite* que le raisonnement par récurrence permet de formaliser.

Le raisonnement par récurrence vise à répondre à une question du type : "**Montrer que la propriété** $P(n)$ **est vraie pour tout entier naturel** n**.**" Il consiste en 3 étapes (que l'on peut traiter dans l'ordre qu'on veut, mais qui sont usuellement présentées dans cet ordre) :

1. L'initialisation : On montre que la propriété $P(0)$ est vraie.
2. L'hérédité : On montre que, si n est un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie aussi.
3. La conclusion : On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels.

Pourquoi cela marche-t-il ? Montrons-le avec un raisonnement par l'absurde, et supposons qu'il existe moins un entier naturel n tel que $P(n)$ est fausse. Alors l'ensemble $E = \{n \in \mathbf{N} : P(n) \text{ fausse}\}$ des entiers naturels n tels que $P(n)$ est fausse est un ensemble non vide. Par conséquent, il admet un élément minimal, que l'on notera m. Puisque $P(0)$ est vraie, on sait que $m > 0$. En particulier, puisque $m-1$ est un entier naturel strictement inférieur à m, on en conclut que $P(m-1)$ est vraie. Mais alors la phase d'hérédité nous prouve que $P(m)$ est vraie aussi, ce qui contredit le fait que m appartienne à l'ensemble E ! Notre supposition était donc fausse, ce qui clôt notre démonstration.

Notons ici que, dans tous les cas, on pourra remplacer un raisonnement par récurrence par un raisonnement par l'absurde similaire à celui présenté ci-dessus. En particulier, de manière générale, quand on veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturel n, il peut toujours être pratique de procéder par l'absurde, en supposant que l'ensemble E est non vide, puis se concentrer sur un élément remarquable de E : son minimum, son maximum (si E est nécessairement fini, par exemple dans le cas d'une propriété $P(n)$ vraie dès que $n \geqslant 2013^{2013}$), un nombre premier qui appartiendra éventuellement à E, etc.

Ce type de généralisation nous permet d'ailleurs d'utiliser un raisonnement par *récurrence forte*, analogue au raisonnement par récurrence :

1. L'initialisation : On montre que la propriété $P(0)$ est vraie.

2. L'hérédité : On montre que, si n est un entier naturel tel que $P(k)$ est vraie pour tous les entiers naturel $k \leqslant n$, alors $P(n+1)$ est vraie aussi.
3. La conclusion : On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels.

Une fois encore, la légitimité du raisonnement par récurrence s'observe facilement si l'on considère l'ensemble E des entiers naturels n tels que $P(n)$ est fausse.

Enfin, voici une chose à laquelle il convient de faire extrêmement attention : dans la plupart des cas, le problème que vous étudierez ne vous demandera pas de montrer une propriété que l'on montre directement par récurrence. Souvent, ce sera à vous d'inventer une propriété, que vous prouverez par récurrence, puis à l'aide de laquelle vous pourrez résoudre l'exercice. Il convient alors d'être vigilant et d'exprimer très clairement quelle est la propriété que l'on veut montrer par récurrence : on ne saurait trop vous conseiller, avant toute démonstration par récurrence, d'énoncer explicitement la propriété $P(n)$ que l'on entend démontrer. En effet, en pratique, il n'est pas rare de voir un élève prétendre démontrer une propriété P par récurrence, mais ne pas utiliser la bonne initialisation (montrant une propriété $Q(0)$ plus faible que la propriété $P(0)$) ou se tromper dans la phase d'hérédité (en utilisant une hypothèse du type "**si** $Q(n)$ **est vraie, alors** $P(n+1)$ **est vraie**" pour une propriété $Q(n)$ plus forte que la propriété $P(n)$) !

Exercice 7 Soit (u_n) la suite réelle telle que $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et strictement décroissante.

- Conclusion : a-t-on tout raconté ici ? -

Ce cours constitue une simple introduction à la logique : on y a donc donné quelques idées simples à la base du raisonnement mathématique, et qu'il est absolument nécessaire de maîtriser si l'on tient à mener quelque raisonnement que ce soit. En particulier, rappelons ici les quelques grands principes qu'il convient de ne jamais oublier :

– ne jamais utiliser une notion ou un objet non encore défini ;
– dans le doute, toujours préférer écrire une phrase claire en Français plutôt que d'aligner des symboles dont la signification sera douteuse ;
– ne pas confondre implication, corrélation et équivalence ;
– toujours rester aussi clair que possible sur le déroulement de la démonstration que l'on est en train d'écrire : si l'on parle de raisonnement par

l'absurde au lieu de parler de raisonnement par analyse et synthèse, on perdra le lecteur à coup sûr !
– ne pas oublier qu'une démonstration non comprise par le lecteur est assimilable à une démonstration fausse.

Si ce domaine vous intéresse, vous découvrirez plus tard qu'il est en effet très profond, et passionnant, avec des résultats tels que :
– l'étude des propriétés exprimables dans un certain vocabulaire (par exemple avec les connecteurs logiques et les quantificateurs mentionnés ci-dessus) ;
– l'apparition de paradoxes, qui montrent qu'on peut facilement énoncer des définitions dénuées de sens (que dire de l'ensemble de tous les ensembles ?) ;
– l'existence de propriétés vraies mais non démontrables, ou encore "ni vraies ni fausses" (ce sont des propriétés dont on peut supposer qu'elles sont vraies ou fausses, et ce sans aboutir à une contradiction) : et oui, ça parait fou, mais c'est pourtant vrai !

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 Nous allons montrer ici que le militaire a **raison**. On peut supposer, sans prendre trop de risques, que les balles ennemies arrivent à peu près uniformément sur la surface de l'avion ; en particulier, il est certain que les cockpits doivent recevoir des balles, comme toutes les autres parties de l'avion. Or, nul avion dont le cockpit a été touché par une balle n'est rentré à bon aéroport. On en conclut donc que, dès lors qu'un avion est touché par une balle, il est condamné au crash. Cela signifie que le cockpit est **très** fragile, et donc qu'il faut en effet songer à le renforcer !

Solution de l'exercice 2 On pourrait procéder en utilisant un raisonnement par l'absurde, comme dans le cours qui précède. Cependant, on peut également fournir une preuve directe. En effet, pour tout entier naturel n, notons que $2013(2n+1)$ est un entier impair divisble par 2013 ; en outre, ces entiers sont deux à deux distincts. Il s'ensuit donc que ces entiers sont en nombre infini et que, *a fortiori*, il existe une infinité d'entiers impairs divisibles par 2013.

Solution de l'exercice 3 On va ruser un peu, et fournir une construction générique permettant de représenter toute fonction $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ à partir des connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$ et $\neg$. En effet, rien que dans le cas $n = 2$, on a 2 valeurs possibles pour chacun des 2^2 éléments de $\{0,1\}^2$, soit $2^{2^2} = 16$ fonctions possibles : dans le cas général, il existe 2^{2^n} fonctions $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ possibles, et il serait peine perdue d'exxayer de les énumérer toutes.

La construction que nous allons utiliser est la *forme normale disjonctive*. Elle est très pratique, puisque deux formules de logique propositionnelle (sans quantificateurs) sont identiques si et seulement si elles ont même forme normale disjonctive : et, puisque deux formules de logique propositionnelle peuvent être interprétées comme des fonctions $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, il nous suffit de définir la forme normale disjonctive pour ces 2^{2^n} fonctions possibles.

Pour ce faire, fixons une fonction f. On note F l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Ensuite, à chaque tel n-uplet x, on associe une conjonction X, appelée *forme normale disjonctive* de f : on choisit $X = \left(\bigwedge_{x_i=0} (\neg v_i)\right) \wedge \left(\bigwedge_{x_i=1} v_i\right)$. Puis on associe à f la disjonction $\bigvee_{x \in F} X$. Remarquons que, alors que nous avons noté les variables de f par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les variables utilisées dans la formule associée à la fonction f sont $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Cependant, à ce renommage près (délibérément choisi ici, pour ne pas confondre les x_i et les v_i), on vérifie facilement que $\bigvee_{x \in F} X$ représente effectivement la fonction f.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Nous allons montrer que la définition d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant une limite $L \in \mathbb{R}$ — que nous noterons "définition 0)" pour des raisons pratiques — est équivalente aux définitions 1) et 3), mais pas aux définitions 2) et 4).

1. Transformons progressivement notre définition 0) en des définitions qui lui sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} 0) & \text{équivaut à } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \neg(\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \vee |L - u_n| \leqslant \varepsilon \\ & \text{équivaut à } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon \leqslant 0 \vee n < N \vee |L - u_n| \leqslant \varepsilon \\ & \text{équivaut à } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \leqslant 0 \vee (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < N \vee |L - u_n| \leqslant \varepsilon) \\ & \text{équivaut à } 1). \end{array}$$

2. Il nous suffit de remarquer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que tout $u_n = 0$ et le réel $L = -2$ satisfont la définition 2) mais pas 0) :
   - Dans la définition 0), si on prend $\varepsilon = 1$, alors $|L - u_N| > \varepsilon$ (alors que $\varepsilon > 0$ et que $N \geqslant N$) quelque soit $N \in \mathbb{N}$.
   - Dans la définition 2), si on prend de manière systématique $N = n + 1$, on remarque que l'assertion $\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N$ est nécessairement fausse, donc que la définition 2) est nécessairement satifsaite.

3. Montrons que les définitions 0) et 3) s'impliquent mutuellement :

$$
\begin{array}{rll}
0) & \text{équivaut à} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \varepsilon \\
 & \text{équivaut à} & \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\epsilon/2 > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \epsilon/2 \\
 & \text{équivaut à} & \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\epsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \epsilon/2 \\
 & \text{implique} & \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\epsilon > 0 \wedge n \geqslant N) \Rightarrow |L - u_n| < \epsilon \\
 & \text{implique} & \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\epsilon > 0 \wedge n > N) \Rightarrow |L - u_n| < \epsilon \\
 & \text{implique} & 3)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
3) & \text{équivaut à} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n > N) \Rightarrow |L - u_n| < \varepsilon \\
 & \text{équivaut à} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N + 1) \Rightarrow |L - u_n| < \varepsilon \\
 & \text{implique} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant M) \Rightarrow |L - u_n| < \varepsilon \\
 & \text{implique} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant M) \Rightarrow |L - u_n| \leqslant \varepsilon \\
 & \text{implique} & 0).
\end{array}
$$

4. Il nous suffit de remarquer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que tout $u_n = \frac{1}{n+1}$ et le réel $L = 0$ satisfont la définition 0) mais pas 3) :
   - Dans la définition 3), si on prend $\varepsilon = \frac{1}{N+2}$, alors $|L - u_N| > \varepsilon$ (alors que $\varepsilon > 0$ et que $N \geqslant N$) quelque soit $N \in \mathbb{N}$.
   - Dans la définition 0), si on prend de manière systématique $N = 1$ quand $\varepsilon \leqslant 0$ et $N > \frac{1}{\varepsilon}$ quand $\varepsilon > 0$, on remarque que soit l'assertion $\varepsilon > 0 \wedge n \geqslant N$ est fausse, soit l'assertion $|L - u_n| \leqslant \varepsilon$ est vraie, de sorte que la définition 0) est nécessairement satifsaite.

Solution de l'exercice 5 Comme demandé dans l'énoncé, identifions l'ensemble des paires (x, y) de nombres réels telles que $2x + y = 5$ et $x - 3y = 6$ en procédant d'abord par équivalences successives, puis par analyse et synthèse.

1. Transformons ici le système d'équations $\{2x + y = 5, x - 3y = 6\}$ en des systèmes d'équations qui lui sont équivalents :

$$
\begin{array}{rll}
\{2x + y = 5, x - 3y = 6\} & \text{équivaut à} & \{y = 5 - 2x, x = 3y + 6\} \\
 & \text{équivaut à} & \{y = 5 - 2x, x = 21 - 6x\} \\
 & \text{équivaut à} & \{y = 5 - 2x, 7x = 21\} \\
 & \text{équivaut à} & \{x = 3, y = -1\}
\end{array}
$$

   Donc l'ensemble des paires (x, y) solutions de notre système d'équation est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(3, -1)\}$.

2. Recommençons le travail en procédant par analyse et synthèse : si $2x+y = 5$ et $x-3y = 6$, alors $x = 3y+6$, donc $2(3y+6)+y = 7y+12 = 5$; il s'ensuit que $7y = -7$, c'est-à-dire $y = -1$, puis $x = 3y + 6 = 3$. Réciproquement, on vérifie aisément que la paire $(x, y) = (3, -1)$ est bien une solution au problème, donc que l'ensemble des solutions recherché est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(3, -1)\}$.

Solution de l'exercice 6 Nous allons montrer que l'ensemble recherché est l'ensemble des entiers pairs. Pour ce faire, nous allons procéder par analyse et synthèse. Dans un premier temps (l'analyse), montrons que les entiers recherchés sont nécessairement pairs ; nous aboutirons à ce résultat en démontrant sa contraposée : si n est impair, alors n^n est impair aussi.

Ce dernier résultat est obtenu à la suite d'une récurrence, où nous montrons en fait la propriété $P(k)$ suivante : si n est impair, alors n^k est impair aussi. L'initialisation, pour $k = 0$, est évidente : en effet, $n^0 = 1$ est bien impair ; il s'ensuit que $P(0)$ est effectivement vraie. De surcroit, soit k un entier naturel tel que $P(k)$ est vraie : si n est impair, alors $n^{k+1} = n \times n^k$ est le produit de deux nombres impairs, donc est un nombre impair lui-même ; cela prouve la propriété $P(k)$. On en déduit que la propriété $P(k)$ set vraie quel que soit l'entier naturel k considéré : en particulier, si n est impair, $P(n)$ montre bien que n^n est impair également.

Procédons maintenant à la phase de synthèse, et montrons que, si n est pair, n^n est pair aussi : si n est pair, alors 2 divise n, donc 2 divise $n \times n^{n-1} = n^n$ aussi, et n^n est bien pair !

En conclusion, l'ensemble recherché est bien l'ensemble des entiers pairs.

Solution de l'exercice 7 Que peut signifier le fait que la suite (u_n) soit *bien définie* ? Cela veut tout simplement dire que chacun des termes $2 + u_n$ doit être positif ou nul, de sorte que l'on puisse en extraire la racine carrée. Prouvons donc tout cela à l'aide d'une unique récurrence, et prouvons la propriété $P(k)$ = "les termes u_k et u_{k+1} sont bien définis, et tels que $u_k > u_{k+1} \geqslant 0$".

Tout d'abord, notons que $u_0 = 3$, donc que $u_1 = \sqrt{5}$, de sorte que $P(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $P(k)$ est vraie, et montrons $P(k + 1)$. D'une part, d'après $P(k)$, on sait que $u_{k+1} \geqslant 0$ est bien défini, de sorte que $2 + u_{k+1} \geqslant 0$ et que $u_{k+2} = \sqrt{2 + u_{k+1}}$ est également bien défini. En outre, $P(k)$ indique également que $u_k > u_{k+1}$; puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{2 + x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on en déduit que $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} > \sqrt{2 + u_{k+1}} = u_{k+2}$, ce qui montre $P(k + 1)$. Ainsi, la propriété $P(k)$ est vraie pour tout entier naturel k, ce qui clôt cette solution.