DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

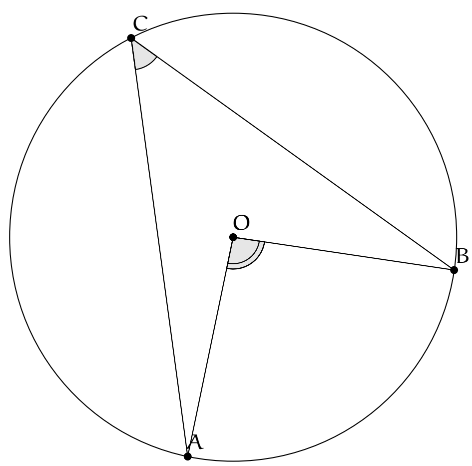
AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2012

Chasse aux angles

- La chasse aux angles -

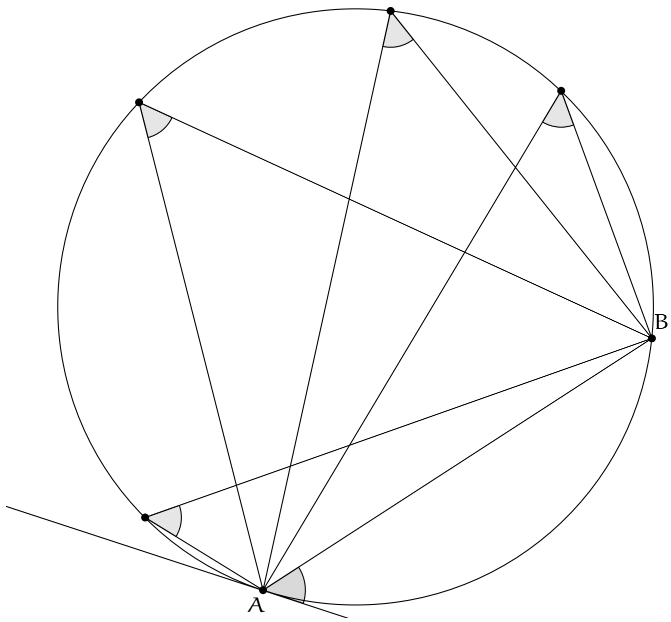
Il est bien souvent très pratique dans un problème de géométrie de savoir quels sont les angles égaux dans les figures, ou quelles sont les relations entre différents angles. Voici quelques techniques pour chasser les angles d'une figure.

Angle au centre - angle inscrit



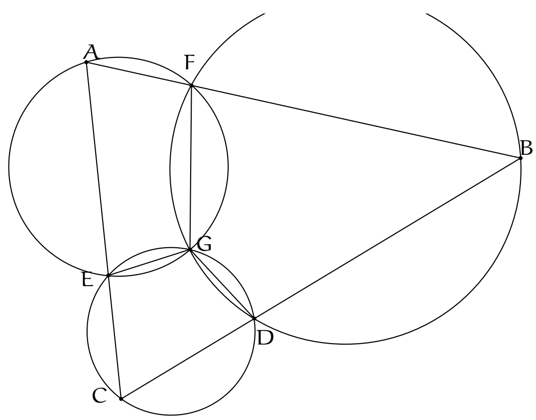
Théorème 1. $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$, l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre.

Le corollaire très pratique est le suivant :



Corollaire 2. Tous les angles inscrits sont égaux, y compris l'angle inscrit "limite" : l'angle formé par la tangente.

Exercice 1 Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle si et seulement si $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.



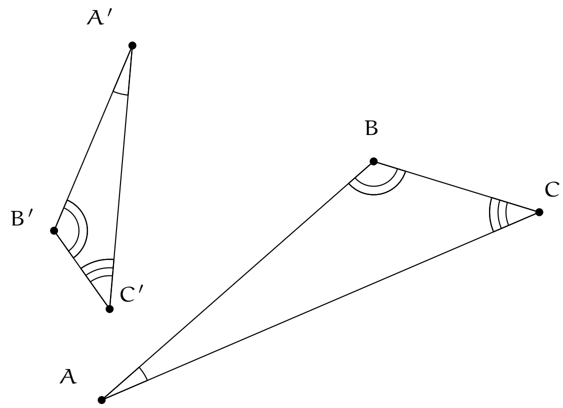
Exercice 2 (Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle et D, E, F trois points sur les trois côtés du triangles. Montrer que les cercles circonscrits à AEF, BDF et CDE se coupent en un même point.

Exercice 3 Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 4 (droite de Simpson) Soit ABC un triangle et P un point. Soient P_1, P_2 et P_3 les projections de P sur les trois côtés du triangle. Montrer que P_1, P_2, P_3 alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit.

Triangles semblables

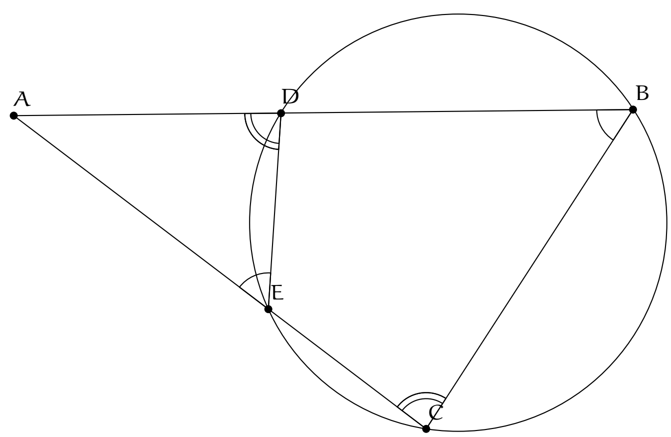
On dit que deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont la même forme.



Proposition 3. Les quatres propositions suivantes sont équivalentes :

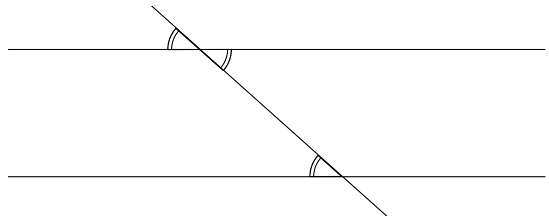
1. les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables
2. $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$
3. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$
4. $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

Remarque 4. Dans la dernière propriété, les quotients concernent les deux côtés de l'angle $\widehat{A}$, et pas n'importe quels côtés.



Proposition 5. Les triangles ABC et AED ci-dessus sont semblables.

Droites parallèles



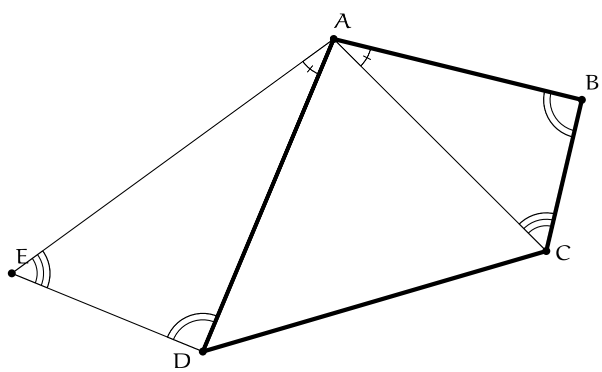
Lorsque deux droites sont parallèles, les angles alternes-internes et les angles correspondants sont égaux. Pour trouver des droites parallèles, n'oubliez pas que vous pouvez utiliser le théorème de Thalès.

- La géométrie du cercle -

Théorème de Ptolémée

Théorème 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Alors $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot BD + AD \cdot BC$, avec égalité ssi A, B, C, D cocycliques dans cet ordre.

Démonstration On commence la démonstration en construisant le point E tel que le triangle ADE soit semblable au triangle ABC.



Les triangles ABC et ADE sont semblables, donc

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

En prenant la seconde égalité on peut exprimer

$$DE = \frac{AD \cdot BC}{AB}.$$

Ensuite intéressons-nous aux triangles ABD et ACE. On se rend compte facilement que $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$, et en regardant la première égalité au-dessus on voit que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$, donc les deux triangles sont semblables.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \implies CE = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Ensuite on utilise simplement l'inégalité triangulaire :

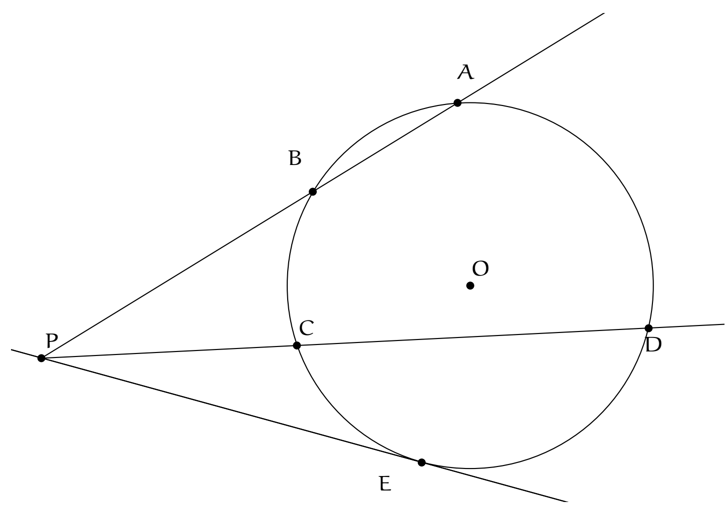
$$CE \leqslant CD + DE \implies AC \cdot BD \leqslant AB \cdot BD + AD \cdot BC.$$

Ensuite regardons le cas d'égalité. L'inégalité triangulaire est une égalité ssi les points C, D, E sont alignés, ie ssi

$$\widehat{CDA} = 180^\circ - \widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{ABC} \iff A, B, C, D \text{ cocycliques.}$$

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Considérons un cercle Γ et un point P quelconque comme dans la figure suivante :



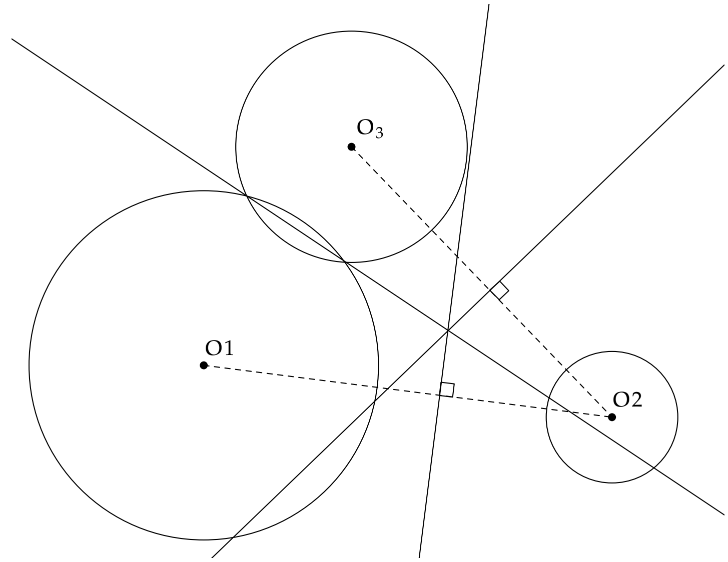
Proposition 7. $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2 = PO^2 - r^2$.

Démonstration Rappelez-vous que les triangles PAD et PCB sont semblables, donc $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, ou encore $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Cette quantité ne dépend pas de quelle droite passant par P on utilise, si on utilise la tangente on trouve PE^2, si on utilise la droite passant par O on trouve $(PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2$.

Cette quantité est appelée la puissance du point P par rapport au cercle Γ, on la note $\mathcal{P}_\Gamma(P)$. Lorsqu'on calcule la puissance d'un point on considère des longueurs algébriques : $PA \cdot PB$ est positif si PA et PB sont dans le même sens (si P est à l'extérieur du cercle) et négatif s'ils sont dans des sens opposés (si P à l'intérieur).

Axe radical de deux cercles

Il est intéressant de savoir, si on se donne deux cercles Γ_1 et Γ_2, quel est le lieu des point squi ont la même puissance par rapport à Γ_1 et à Γ_2. Je laisse au lecteur le soin de vérifiér que ces points forment une droite Δ perpendiculaire à O_1O_2 appelée l'*axe radical* de Γ_1 et Γ_2.



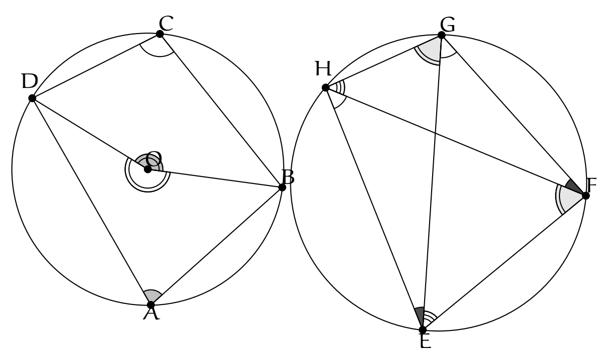
Proposition 8. Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles. Les axes radicaux Δ_{12}, Δ_{13} et Δ_{23} sont concourants.

Démonstration : Soit P le point d'intersection de Δ_{12} et Δ_{13}. Par définition, $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(P)$ et $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_3}(P)$, donc $\mathcal{P}_{\Gamma_2}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_3}(P)$.

Exercice 5 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en A et B. On trace une tangente commune qui rencontre les cercles en C et D. Montrer que (AB) coupe $[CD]$ en son milieu.

Solutions des exercices

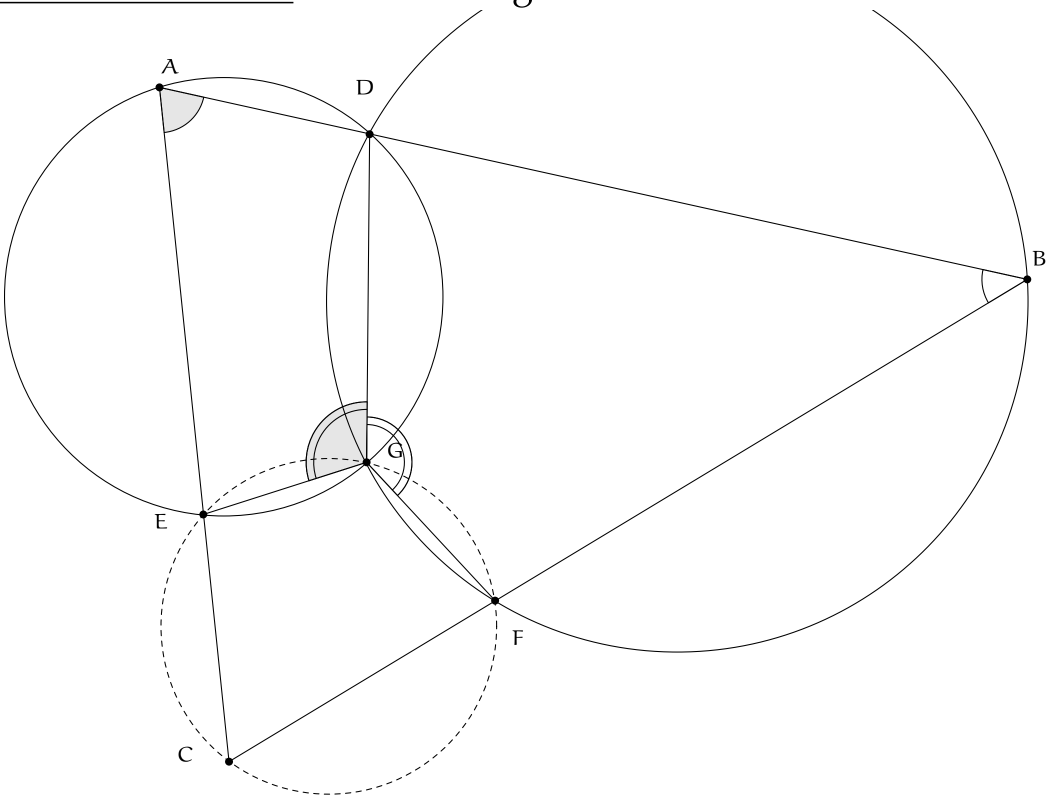
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Nous allons exposer deux façons de résoudre ce problème.



Sur la figure de gauche, on voit que $\widehat{BOD} = 2\widehat{A}$ et $\widehat{DOB} = 2\widehat{C}$. Donc $\widehat{A}+\widehat{C} = \frac{\widehat{BOD}+\widehat{DOB}}{2} = 180^\circ$.

Sur la figure de droite, on peut trouver quatre couples d'angles inscrits. Donc $\widehat{F}+\widehat{H} = \widehat{GHF}+\widehat{HFG}+\widehat{FGE}+\widehat{EGH} = 180^\circ$ puisque ce sont tous les angles du triangle FGH.

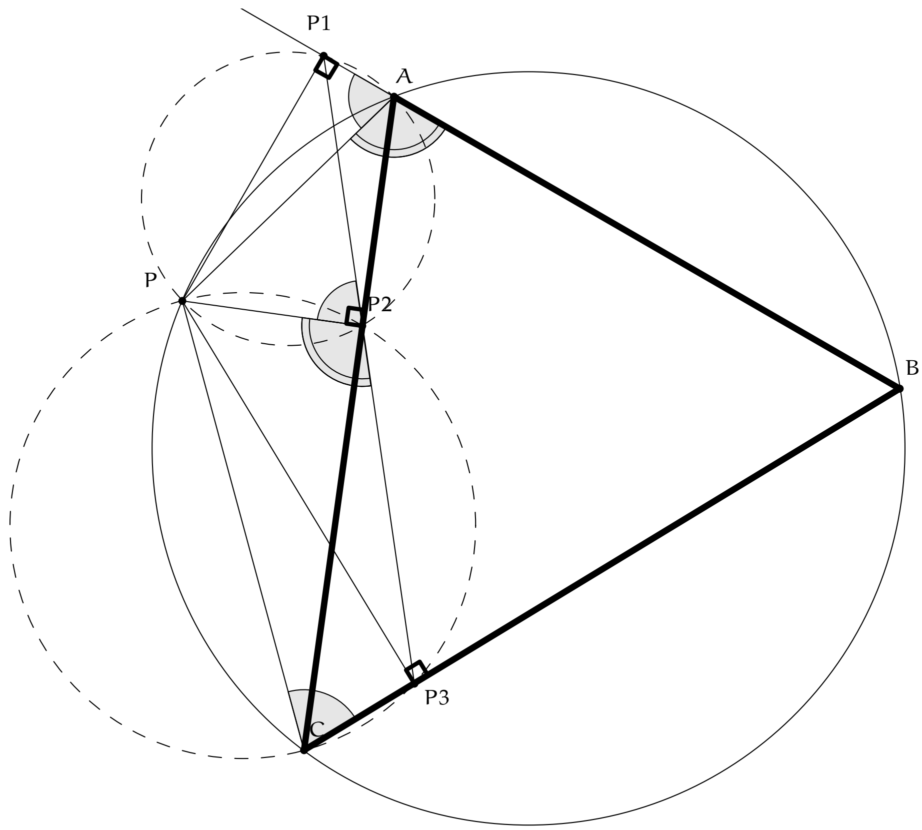
Solution de l'exercice 2 Faisons la figure :



Définissons G l'intersection des cercles circonscrits à ADE et à BDF, et nous montrerons que G est sur le cercle circonscrit de CEF. Soient α, β et γ les trois angles de ABC. Comme A, D, G, E cocycliques, $\widehat{DGE} = 180^\circ - \alpha$. De même, $\widehat{EGF} = 180^\circ - \beta$. Donc $\widehat{FGD} = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 180^\circ - \beta)$ et donc $\widehat{FGD} + \gamma = 180^\circ$. Les points C, D, G, F sont donc cocycliques.

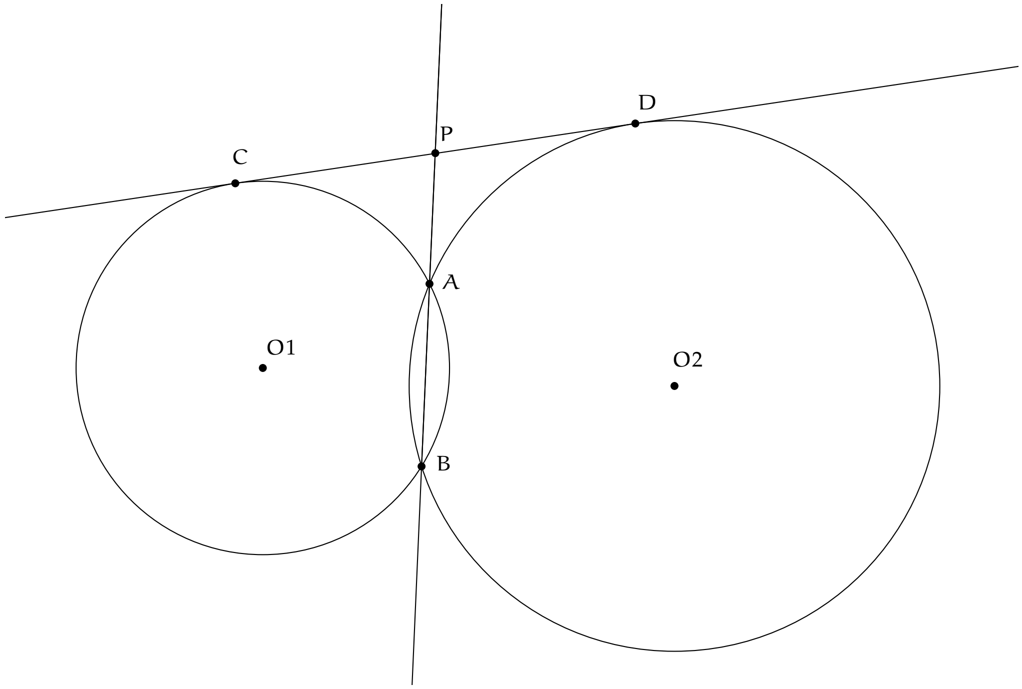
Solution de l'exercice 3 Définissons G l'intersection des cercles circonscrits à ADE et à BDF, et nous montrerons que G est sur le cercle circonscrit de CEF. PSoient α, β et γ les trois angles de ABC. Comme A, D, G, E cocycliques, $\widehat{DGE} = 180^\circ - \alpha$. De même, $\widehat{EGF} = 180^\circ - \beta$. Donc $\widehat{FGD} = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 180^\circ - \beta)$ et donc $\widehat{FGD} + \gamma = 180\circ$. Les points C, D, G, F sont donc cocycliques.

Solution de l'exercice 4 Commençons par faire la figure :



Comme il y a des angles droits en P_2 et P_1, le quadrilatère PP_1AP_2 est inscrit dans un cercle, donc $\widehat{P_1AP} = \widehat{P_1P_2P} = 180^\circ - \widehat{PAB}$. Comme P est sur le cercle circonscrit de ABC, $\widehat{PCB} = 180^\circ - \widehat{PAB} = \widehat{P_1P_2P}$. Enfin, comme P, P_2, P_3, C sont cocycliques, on a $\widehat{PP_2P_3} = 180^\circ - \widehat{PCP_3} = 180^\circ - \widehat{P_1P_2P}$. Donc $\widehat{P_1P_2P_3} = \widehat{P_1P_2P} + \widehat{PP_2P_3} = 180^\circ$, les trois points sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Voyons ce que donne la figure.



Comme A est sur l'intersection des deux cercles, il a une puissance nulle par rapport aux deux cercles, il est donc sur l'axe radical. De même pour B, donc AB est l'axe radical des deux cercles. Soit P le point d'intersection de (AB) avec $[CD]$.

$$PC^2 = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = PD^2.$$