DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2013

Récurrence, principe de l'extrémum

- Raisonnement par récurrence -

Le raisonnement par récurrence vise à répondre à une question du type : "**Montrer que la propriété** $P(n)$ **est vraie pour tout entier naturel** n." Il consiste en 3 étapes :

1. L'initialisation : On montre que la propriété $P(0)$ est vraie.
2. L'hérédité : On montre que, si n est un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie aussi.
3. La conclusion : On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels.

Si on sait monter sur la première marche d'un escalier et qu'on sait monter d'une marche à la suivante, alors on peut gravir tout l'escalier. Telle est l'idée du raisonnement par récurrence.

On renvoie à la partie du cours de logique consacré à la récurrence pour une preuve (voir page **??**).

Exemple 1. Pour un entier $n \geqslant 1$, soit P_n la propriété "$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$". Montrons que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ par récurrence sur n.

- (Initialisation) Il est clair que P_1 est vérifiée.
- (Hérédité) Supposons P_n vérifié. Montrons P_{n+1}. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 1 Montrer que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Pour un entier $n \geqslant 1$, soit P_n la propriété

$$\text{“}1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{”}.$$

Montrons que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$ par récurrence sur n.

- (Initialisation) Il est clair que P_1 est vérifiée.
- (Hérédité) Supposons P_n vérifiée. Montrons P_{n+1}. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n - \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2 Trouver tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $2^n \geqslant n^2$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On voit que $n = 0, 1, 2, 4$ conviennent mais pas $n = 3$. Montrons ensuite que $2^n \geqslant n^2$ pour tout entier $n \geqslant 4$. Pour un entier $n \geqslant 4$, soit P_n la propriété “$2^n \geqslant n^2$”. Montrons que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 4$ par récurrence sur n.

- (Initialisation) On a vu que P_4 est vérifiée.
- (Hérédité) Supposons P_n vérifiée. Montrons P_{n+1}. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$2^{n+1} \geqslant 2 \cdot 2^n \geqslant 2n^2.$$

  Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Pour cela, on écrit

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2,$$

  qui est bien positif car $n - 1 \geqslant 3$.

On en déduit que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 4$. Ainsi, $2^n \geqslant n^2$ pour tout entier positif sauf pour $n = 3$.

Exercice 3 À Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

Solution de l'exercice 3 Notons n le nombre de villes. Pour avoir une intuition de ce qui se passe, il est conseillé de tester différentes configurations pour des petites valeurs de n. Pour $n = 2$, il n'y a un qu'un seul moyen de transport. Pour $n = 3$, soient A, B, C les trois villes. Sans perte de généralité, supposons que $A - B$ est une ligne aérienne. Alors soit C peut être relié à A ou B par une ligne aérienne, auquel cas l'avion convient, soit C est relié à A et B par un canal, auquel cas le bateau convient.

Cela suggère de démontrer que la véracité de la proposition suivante par récurrence [1] sur n :

P_n : « Pour toute configuration de n villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises. »

- (Initialisation) On a déjà vu que P_2 est vérifiée.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 2$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Considérons A une ville quelconque et appliquons la propriété P_n à la configuration des n villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors de deux choses l'une : soit il existe une ligne aérienne reliant A à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit A est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient.

Exemple 2. Un exemple d'application de récurrence forte sera vu en cours d'arithmétique, où la récurrence forte sera utilisée pour démontrer l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier.

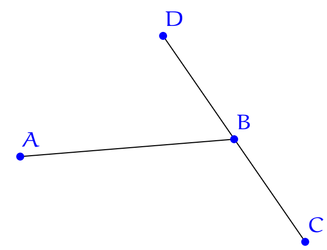
- Principe extrémal -

Commencçns par quelques exemples.

1. il faut toujours connaître la propriété *précise* que l'on veut prouver afin d'éviter les mauvaises surprises (par exemple lors de deux récurrences imbriquées ou autre réjouissances de ce type).

Exemple 3. Soit Ω un ensemble de points du plan. On suppose que tout point de Ω est le milieu d'un segment dont les extrémités sont dans Ω. Prouvons que l'ensemble Ω est infini.

Par l'absurde, supposons que l'ensemble Ω est fini. Parmi tous les couples de points de Ω, choisissons-en deux maximisant leur distance. Notons les A et B. Par hypothèse, il existe C et D des points de Ω tels que B est le milieu de $[CD]$.



On voit alors que soit $AC > AB$, soit $AD > AB$. Ceci contredit le caractère maximal de la distance AB. Nous avons abouti à une contradiction : notre hypothèse de départ est donc fausse, et il s'ensuit que l'ensemble Ω est infini.

Exemple 4. À chaque point à coordonnées entières du plan on associe un entier positif ou nul. On suppose que l'entier de chaque point à coordonnées entières du plan est la moyenne des nombres de ses quatre voisins (immédiatement à gauche, droite, haut et bas). Prouvons que tous les entiers sont égaux.

Notons m l'entier positif minimal porté par l'un de ces points, et notons a, b, c, d les entiers portés par ses quatre voisins. Par hypothèse, $m \leqslant a, m \leqslant b, m \leqslant c, m \leqslant d$. Si l'une de ces inégalités est stricte, on a alors $m < (a + b + c + d)/4$, ce qui contredit l'égalité $m = (a + b + c + d)/4$. On a donc $a = b = c = d = m$, autrement dit les quatre voisins de m portent la même valeur m. De proche en proche, on en déduit que tous les entiers sont égaux (un raisonnement rigoureux ferait appel à une récurrence).

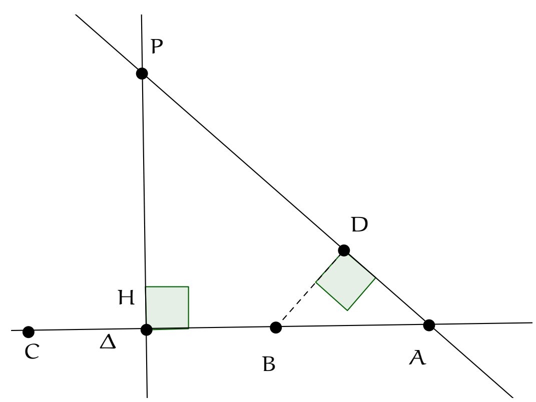
Exemple 5. Au stage olympique, chaque élève connaît exactement trois autres élèves. Prouvons qu'on peut partager les élèves en deux groupes de sorte que chacun ne connaisse qu'une seule personne dans son groupe.

Parmi tous les partages possibles en deux groupes, regardons le nombre total de connaissances qu'il y a cumulées en restant à l'interieur de son groupe. Choisissons le partage qui minimise ce nombre. Prouvons que celui-ci convient. Par l'absurde, supposons que dans le partage il existe un élève, appelons le A, qui connaisse au moins deux personnes dans son groupe. Dans l'autre groupe, il y a au plus une personne qu'il connaît : en changeant A de groupe on diminuerait ainsi le nombre total de connaissances qu'il y a cumulées en restant à l'interieur de son groupe, ce qui contredit la minimalité supposée du partage initial.

On conclut par le célébre problème de Sylvester, posé par Sylvester en 1893, résolu par Gallai en 1933 par une méthode compliquée. Kelly a donné la solution qui suit en 1948.

Exemple 6. Soit S un ensemble fini de points du plan tel que si deux points appartiennent à S, alors il en existe un troisième appartenant à la droite formée par ces deux points. Alors l'ensemble S est formé de points alignés.

Pour prouver cette assertion, raisonnons par l'absurde et supposons que tous les points ne soient pas alignés. Parmi tous les couples (P, Δ) de points $P \in S$ et de droites Δ passant par deux points de S, choisissons-en un qui mimimise la distance de P à Δ. Notons (P, Δ) un tel couple. Soit H le projeté orthogonal de P sur Δ. Par hypothèse, il existe au moins trois points de S sur Δ, et donc forcément deux du même côté par rapport à H, disons A et B. Quitte à renommer les points, supposons que B est plus proche de P que A.



Alors le couple formé par le point B et la droite (AP) contredit la minimalité de (P, Δ) car $BD < HP$. Ceci est absurde. Ainsi, tous les points sont alignés.

Une autre manière de formuler le résultat de Sylvester est de dire que pour tout ensemble fini de points non alignés il existe une droite passant par exactement deux points de l'ensemble (pourquoi ?).

Les exemples précédents partagent une même idée : considérer un élément maximisant ou minimisant une certaine quantité. Plus précisément, nous avons utilisé les deux propriétés suivantes :

(i) Tout ensemble *fini* non vide de nombres entiers (ou réels) admet un plus petit élément ainsi qu'un plus grand élément (qui ne sont pas nécessairement uniques).

(ii) Tout ensemble non vide (éventuellement infini) de nombres entiers positifs ou nuls admet un plus petit élément.

On dit qu'on utilise un *principe extrémal* lorsqu'on applique ces propriétés. Comme nous l'avons vu, le principe extrémal permet d'exhiber des configurations auxquels on souhaite arrive (mais parfois pas de manière explicite), ou bien d'introduire un nouvel objet qu'on peut utiliser.

- Exercices d'application -

Exercice 4 On place les n^2 entiers $1, 2, \ldots, n^2$ dans un tableau $n \times n$ (sans répétition). On dit que deux cases sont voisines si elles ont au moins un point en commun. Prouver qu'il existe deux cases voisines dont la différence des valeurs vaut au moins $n + 1$.

Exercice 5 On se donne un ensemble fini de points dans le plan, de cardinal pair, trois quelconques d'entre eux non alignés. Montrer qu'on peut les relier par des segments sorte que chaque point soit relié à exactement un autre et que les segments ne se coupent pas.

Exercice 6 Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère un ensemble de n droites dans le plan tel que deux quelconques ne soient pas parallèles. On suppose que par l'intersection de deux quelconques de ces droites passe une autre droite de l'ensemble. Prouver que toutes les droites sont concourantes.

Exercice 7 À un tournoi, chaque compétitrice rencontre chaque autre compétitrice exactement une fois. Il n'y a pas de match nul. À l'issue de la compétition, chaque joueuse fait une liste qui contient les noms des joueuses qu'elle a battues, ainsi que les noms des joueuses qui ont battu les joueuses qu'elle a battues.

Montrer qu'il existe une liste qui contient le nom de toutes les autres joueuses.

Exercice 8 Un ensemble (fini) S de personnes vérifie la propriété suivante : deux personnes connaissant le même nombre de personnes n'ont jamais de connaissance commune. Prouver qu'il existe une personne connaissant exactement une autre.

- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Raisonnons par l'absurde en supposant que les différences des valeurs de deux cases voisines sont toujours au plus n. Notons A la case dont la valeur est 1 et B la case dont la valeur est n^2. Il existe un chemin de longueur au plus $n-1$ reliant A à B en ne passant que par des cases voisines. La différence entre les valeurs des cases B et A vaut donc au plus $n(n-1)$, qui est strictement inférieur à n^2-1, absurde.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Considérons la façon de relier les points qui minimise la somme des longueurs des segments, avec pour unique contrainte que chaque point soit extrémité d'exactement un segment. Supposons, par l'absurde, que l'on a deux segments AD et BC qui se coupent en un point O (par hypothèse, celui-ci est forcément différent de A, B, C, et D). Si, à la place des segments AD et BC on choisit CD et AB, alors tout point est relié à exactement un autre. Par minimalité de la somme des longueurs, on en déduit :

$$AD + BC \leqslant AB + CD. \tag{1}$$

Pour la même raison, on a :

$$AD + BC \leqslant AC + BD. \tag{2}$$

En sommant les deux équations, on trouve

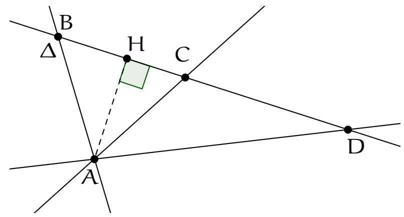
$$2 \cdot (AD + BC) \leqslant (AC + CD) + (AB + BD) \tag{3}$$

Par l'inégalité triangulaire dans les triangles AOB, BOD, DOC et COA, on a :

$$AC+AB+BD+DC \leqslant CO+OA+OA+OB+OB+OD+OD+OC = 2\cdot(AD+BC), \tag{4}$$

et on n'a pas égalité sinon A, B, et O seraient alignés, donc A, B, et C aussi, ce qui est exclu par l'hypothèse. Ainsi on a une contradiction avec l'équation (3). Donc dans la solution minimale, il n'y a pas de segments qui se coupent.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> La preuve est très proche de la preuve du problème de Sylvester : on choisit le couple (P, Δ) où P est un point d'intersection et Δ une droite de l'ensemble ne contenant pas P qui minimise la distance de P à Δ. Notons B, C, D les points d'intersection de trois droites de l'ensemble passant par A avec Δ. Soit H le projeté orthogonal de A sur Δ. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que C et D sont du même côté de P sur Δ et que C est plus proche de H que D. Ainsi la distance de C à (AD) est plus petite que la distance de A à Δ, absurde.



Solution de l'exercice 7 Soit A la joueuse ayant gagné le plus de matchs. S'il n'existait pas de liste contenant le nom de toutes les autres joueuses, il existerait une joueuse B ayant gagné contre A ainsi que contre toutes les personnes battues par A. Donc B aurait gagné plus de matchs que A, absurde.

Solution de l'exercice 8 Soit A la personne ayant le plus grand nombre de connaissances n. Considérons l'ensemble E formé par les nombres de personnes que connaissent les connaissances de A. Ainsi E est constitué de n entiers appartenant à $\{1, 2, \dots, n\}$. Par hypothèse, ils sont également deux à deux différents. On en déduit que $E = \{1, 2, \dots, n\}$. En particulier, il existe une personne connaissant exactement une autre.

- Coefficients binomiaux -

La Combinatoire est un sous-art des mathématiques qui consiste à compter et à étudier des structures discrètes (finies). De nombreux problèmes difficiles sont formulés de manière très simple (mais la résolution nécessite des outils avancés). Le but de ce cours est de présenter quelques réflexes et idées de bases pouvant être utiles dans la résolution d'exercices de combinatoire de type olympiades ayant un rapport avec les coefficients binomiaux.

Faute de temps, cette partie n'avait pas été abordée pendant le cours de combinatoire.

1) Définitions

On rappelle qu'un ensemble E est une collection d'éléments dont l'ordre n'a pas d'importance (ainsi, les ensembles $\{2, 3\}$ et $\{3, 2\}$ sont les mêmes ensembles). On note $x \in A$ si x appartient à l'ensemble A. Si A et B sont deux ensembles, on écrit $A \subset B$ et on dit que A est inclus dans B si chaque élément de A appartient au B. L'ensemble vide, qui ne contient aucun élément, est noté $\emptyset$. On note $\mathrm{Card}(A)$ (on prononce « cardinal de A ») le nombre d'éléments de A. On dit que A est infini si $\mathrm{Card}(A) = \infty$, fini sinon.

Définition 7. Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ (et on prononce « k parmi n ») le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à k éléments d'un ensemble à n éléments différents. Pour $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Il est clair que dans la définition précédente, $\binom{n}{k}$ ne dépend pas de l'ensemble à n éléments différents considéré.

Exemple 8. On a $\binom{4}{2} = 6$, car les sous-ensembles à 2 éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ et il y en a 6

Pour un entier $n \geqslant 1$, rappelons la notation $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Proposition 9. Le nombre de manières d'ordonner n éléments est $n!$.

Démonstration. Nous avons n possibilités pour choisir le premier élément, $n-1$ possibilités pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au dernier élément pour lequel nous avons une seule possibilité. Le résultat en découle. $\square$

Proposition 10. Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Démonstration. Comptons de deux manières différentes le nombre de suites à k éléments qu'on peut créer en utilisant les n éléments d'un ensemble à n éléments différents.

D'une part, comme pour la proposition précédente, nous avons n choix pour le premier terme de la suite ; $n-1$ choix pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au k-ième élément pour lequel nous avons $n - k + 1$ choix. Finalement, il y a en tout $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ suites à k éléments.

D'autre part, pour créer une suite à k éléments, on peut commencer par choisir les k éléments qui vont constituer la suite ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis les ordonner ($k!$ manières possibles de les ordonner). Il y a donc en tout $k! \cdot \binom{n}{k}$ suites à k éléments. $\square$

Remarque 11. Reformulé différemment, $\binom{n}{k}$ est le nombre de manière de choisir k boules parmi n boules différentes si on ne tient pas compte de l'ordre de leurs tirages.

2) Propriétés combinatoires

Exercice 9 Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Solution de l'exercice 9 *Première méthode :* On utilise la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et le résultat en découle immédiatement.

Deuxième méthode : On remarque que choisir k éléments parmi n revient à choisir $n-k$ éléments parmi n qu'on ne choisira pas.

L'exercice précédent, bien que facile, est assez représentatif des exercices ayant pour but de prouver des relations d'égalité entre coefficients binomiaux. Très souvent, il y a toujours (au moins) deux approches possibles : remplacer les coefficients binomiaux par leur formule et ramener le problème à un exercice de manipulation de relations algébriques, ou bien d'interpréter de manière combinatoire les deux termes de part et d'autre de l'égalité et de prouver qu'ils sont égaux. La deuxième approche est biensûr bien plus élégante et fournit très souvent des preuves courtes, mais requiert davantage d'ingéniosité.

Exercice 10 Soient $0 \leqslant k \leqslant n$ des entiers (avec $(k, n) \neq (0, 0)$). Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 10 *Première méthode :* On utilise la formule.

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire. Considérons l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et dénombrons ses sous-ensembles à k éléments. Il y en a $\binom{n-1}{k}$ qui ne contiennent pas n et il y en a $\binom{n-1}{k-1}$ qui contiennent n. Le résultat en découle.

Exercice 11 Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 11 *Première méthode :* On utilise la formule exprimant $\binom{n}{k}$ (le faire).

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k ayant un élément distingué (qu'on appellera chef). Tout d'abord, il suffit de choisir un sous-ensemble de cardinal k ($\binom{n}{k}$ choix), puis de choisir un chef (k choix indépendants). On obtient donc en tout $k\binom{n}{k}$ possibilités.

Exercice 12 Pour un entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> *Première méthode :* Si on n'a pas d'idée comment commencer de manière astucieuse, on peut essayer de procéder par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Supposons le résultat acquis au rang n et montrons-le au rang $n+1$ en écrivant, avec l'exercice 4 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2^n + 2^n \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2^{n+1},
\end{aligned}$$

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant le nombre N de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$. D'une part, pour un entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments. En sommant le tout, on voit que $N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Mais, pour construire un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a le choix de choisir 1 ou non, 2 ou non, et ainsi de suite jusqu'à n. On a donc $N = 2^n$, ce qui conclut.

En particulier, la solution précédente montre qu'il existe 2^n sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Proposition 12 (Formule du binôme de Newton)**.** Soient x, y des nombres réels et $n \geqslant 1$ un entier. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$

Démonstration. Première méthode : par récurrence sur n (s'entraîner à le faire).

Seconde méthode : lorsqu'on développe $(x+y) \cdot (x+y) \cdots (x+y)$, pour trouver le coefficient devant $x^k y^{n-k}$, parmi les n termes $(x+y)$, il faut en choisir k pour lesquels on garde le x et qui vont donner un terme x^k, et les $n-k$ autres termes pour lesquels on sélectionne y vont donner le terme y^{n-k}. Le résultat s'ensuit. $\square$

Exercice 13 Quel est le cardinal moyen d'un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$?

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>

Première méthode (d'après une idée d'élèves) : On regroupe un ensemble avec son complémentaire. Si $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A^c l'ensemble des entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui ne sont pas dans A. Notons N ce cardinal moyen. Alors :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} \mathrm{Card}(A) = \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} \frac{\mathrm{Card} A + \mathrm{Card}(A^c)}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1,2,\ldots,n\}} \frac{n}{2} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n}{2} 2^n = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Autre méthodes : Il faut évaluer la somme

$$S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Si on ne sait pas commencer, il faut étudier les premiers cas : $n = 1, 2, \ldots$. On trouve toujours $S_n = n/2$. Essayer donc de démontrer cela.

Seconde méthode : Si on n'a pas d'idée, on peut procéder par récurrence sur n.

Troisième méthode, plus avancée. Considérons le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. D'après a formule du binôme de Newton, $P_n(x) = (1 + x)^n$. Dérivons cette égalité par rapport à x :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1 + x)^{n-1}.$$

Évaluons alors cette quantité en $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Le résultat en découle.

Exercice 14 Prouver que pour $0 \leqslant m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> On remarque d'abord que seuls les k tels que $k \geqslant m$ contribuent de manière non nulle. On va procéder à un double comptage en comptant le nombre N de sous-ensembles A, B de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $A \subset B$ et $\mathrm{Card}(A) = m$. En effet, d'une part, pour construire A, B on peut d'abord choisir A de cardinal m ($\binom{n}{m}$ choix), puis rajouter un sous-ensemble quelconque de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ privé des éléments de A, qui a $n - m$ éléments (et donc 2^{n-m} choix indépendants). En ainsi, $N = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

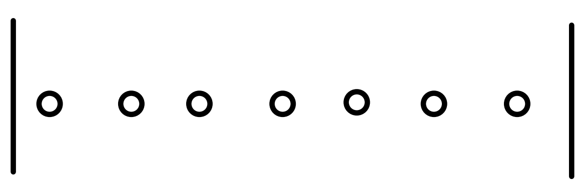
D'autre part, pour construire A, B on peut d'abord choisir B de cardinal quelconque entre m et n (si B est de cardinal k, $\binom{n}{k}$ choix), puis choisir A de cardinal m comme sous-ensemble de B ($\binom{k}{m}$ choix si B est de cardinal k). Ainsi, $N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

Exercice 15 Combien y a-t-il de chemins sur $\mathbb{Z}^2$ issus de $(0, 0)$, faisant des pas $+(1, 0)$ ou $+(0, 1)$, et finissant en (m, n), où $m, n \geqslant 0$?

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> Un tel chemin doit faire $m + n$ pas, dont m fois $+(1, 0)$ et n fois $+(0, 1)$. Il suffit donc de choisir parmi les $m + n$ pas possibles la position des m qui font $+(1, 0)$. Le nombre total vaut donc $\binom{m+n}{m}$.

Exercice 16 De combien de manières peut-on placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes ?

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Considérons la figure suivante (avec deux barres) :



Remplaçons chaque rond soit par une pièce, soit par une barre de sorte qu'il y ait en tout 2 barres et 5 pièces. Les pièces entre les deux Premières barres seront contenues dans la Première poche, les pièces entre la deuxième barre et la troisième barre seront contenues dans la seconde poche, et finalement les pièces entre la troisième barre et la quatrième barre seront contenues dans la troisième poche.

Ainsi, placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes, revient à choisir la position des 2 barres parmi 7 positions possibles. La réponse est donc $\binom{7}{2} = 21$.

Plus généralement, en procédant de la même façon, on voit qu'il y a $\binom{a+b-1}{b-1} = \binom{a+b-1}{a}$ manières de placer a pièces identiques dans b poches différentes.