Domaine : Tous
Niveau : Débutants
Contenu : Cours et exercices

Auteur : Joon Kwon
Stage : Montpellier 2014

Logique élémentaire

1 Introduction

Nous passerons en revue la construction des assertions et les principes courants de démonstration. Nous n'aborderons pas la théorie des ensembles. On se contentera de rappeler que l'on note $x \in E$ pour "x appartient à l'ensemble E". Voici quelques exemples familiers au lecteur. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des naturels et $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ celui des entiers naturels. On peut dire $5 \in \mathbb{N}$, $-5 \notin \mathbb{N}$, $-5 \in \mathbb{Z}$ et $1/2 \notin \mathbb{Z}$.

On pourra également consulter l'excellent cours de logique de Vincent Jugé, dont la saveur est assez différente, et qui se trouve dans le polycopié du stage de Montpellier 2013.

2 Assertions

Une assertion (ou proposition) est un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux. Voici quelques exemples :

- $5 \in \mathbb{N}$ (vrai) ;
- $2 < 15$ (vrai) ;
- $0 = 1$ (faux) ;
- "(1+2)" n'est en revanche pas une assertion.

Dans la suite, A et B désigneront des assertions.

Négation Pour chaque assertion A, on définit une nouvelle assertion notée non A, appelée la *négation de A*, à l'aide de la *table de vérité* suivante.

A	non A
V	F
F	V

Si on définit, pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion $(A :\ x > 0)$, on a $(\text{non}\, A :\ x \leqslant 0)$.

Disjonction La disjonction de A et de B est définie de la manière suivante.

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarquons que l'assertion (A ou (non A)) est toujours vraie.

Conjonction La conjonction de A et de B est définie de la façon suivante.

A	B	(A et B)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

L'assertion (A et (non A)) est toujours fausse.

Implication On définit "A implique B" par

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lorsque $(A \Longleftrightarrow B)$ est vraie, on peut dire

– A implique B ;
– si A, alors B ;
– pour B, il suffit A ;
– pour A, il faut B ;
– A est une condition suffisante pour B ;
– B est une condition nécessaire pour A.

Voici quelques exemples d'implications vraies.

– $ABCD$ est un carré $\Longrightarrow$ $ABCD$ est un rectangle.
– $x \in \mathbb{N} \implies x \in \mathbb{Z}$.

– $1+1=2 \implies \sqrt{2}$ est irrationnel.

Le troisème exemple peut sembler plus étrange, car on se demande quel est le rapport entre les deux assertions. Mais il n'est en fait pas nécessaire qu'il existe un *rapport* ou une *causalité*, puisque qu'il suffit qu'A et B soient deux assertions vraies (ou deux assertions fausses) pour que l'implication $A \implies B$ le soit également.

Equivalence On note $(A \iff B)$ pour $((A \implies B)$ et $(B \implies A))$. On peut voir que cette assertion est vraie lorsque A et B sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses. Autrement dit, lorsqu'elles sont les mêmes d'un point de vue de leur valeur logique. On dit alors qu'elles sont *équivalentes*, ou encore que :

– A si, et seulement si B ;
– pour A, il faut et il suffit B ;
– A est une condition nécessaire et suffisante pour B.

Voici quelques exemples d'équivalences vraies.

– $\text{non}(\text{non}\, A) \iff A$.
– Le théorème de Pythagore : si ABC est un rectangle de côtés a, b, c où a est le côté opposé à A, ABC est rectangle en A si, et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$.

Quantificateurs Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion dépendant de $x \in E$. On peut par exemple définir, pour $x \in \mathbb{N}$, $(A(x) :\ x \geqslant 0)$. Ou encore, pour $x \in \mathbb{R}$, $(B(x) :\ x^2 \geqslant 5)$.

On définit l'assertion $(\forall x \in E,\ A(x))$ comme étant vraie si, et seulement si $A(x)$ est vraie pour tout élément $x \in E$. Par exemple, $(\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0)$ est vraie.

On définit $(\exists x \in E,\ A(x))$ comme étant vraie si, et seulement si il existe au moins un élément $x \in E$ pour lequel $A(x)$ est vraie. Par exemple, $(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 5)$.

On peut se convaincre que les négations de telles assertions peuvent se réécrire de la façon suivante.

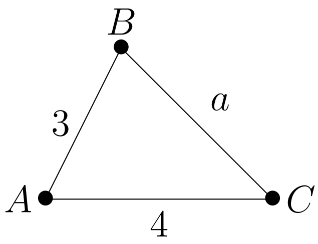
$$\text{non}\,(\forall x \in E,\ A(x)) \iff \exists x \in E,\ \text{non}\, A(x)$$
$$\text{non}\,(\exists x \in E,\ A(x)) \iff \forall x \in E,\ \text{non}\, A(x)$$

Lorsque plusieurs quantificateurs sont emboîtés, on ne peut les permuter et obtenir une assertion équivalente que lorsqu'ils sont du même type. Avec de gros guillemets, $\forall\exists \not\Leftrightarrow \exists\forall$ en général.

3 Principes de démonstration

Preuve de $(A \implies B)$ Le principe le plus courant consiste à supposer que A est vraie puis à tenter de démontrer que B est alors vraie.

Exemple 1. *Montrer que* (ABC *rectangle en* A) $\implies a = 5$.



Démonstration. Supposons que ABC est rectangle en A. Montrons que $a = 5$. Le théorème de Pythagore donne $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Donc $a = 5$ ou $a = -5$. Mais a est positif car il s'agit d'une longueur. D'où $a = 5$. Conclusion, on a bien démontré (ABC rectangle en A) $\implies a = 5$. □

Preuve de $(A \iff B)$ Il peut être tentant de procéder par équivalences successives, mais ce n'est une bonne idée que dans de rares cas extrêmement simples. La plupart du temps, on procédera par double implication. C'est-à-dire qu'on démontrera une implication, $(A \implies B)$ par exemple, avant de prouver sa réciproque $(B \implies A)$.

Raisonnement par contraposée Il existe une démarche alternative pour démontrer une implication $(A \implies B)$. Elle revient à remarquer que

$$(A \implies B) \iff (\text{non}\, B \implies \text{non}\, A).$$

On prouve cette équivalence grâce à la table de vérité suivante.

A	B	$A \implies B$	non A	non B	non $B \implies$ non A
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Les colonnes de $(A \implies B)$ et de $(\text{non}\, B \implies \text{non}\, A)$ sont identiques, ce qui signifie que les deux assertions sont bien équivalentes.

Plutôt que de démontrer $(A \implies B)$, il arrive qu'il soit plus facile de prouver $(\text{non}\, B \implies \text{non}\, A)$, qu'on appelle l'implication contraposée.

Raisonnement par l'absurde Pour démontrer que l'assertion A est vraie, on peut supposer que A est fausse et tenter d'aboutir à une absurdité. On conclut alors qu'il était absurde de supposer A fausse. Autrement dit, A est vraie.

On peut voir le raisonnement par l'absurde comme une utilisation de la contraposée. En effet, supposer A fausse et aboutir à une absurdité, revient à prouver une implication $(\text{non}\, A \Longrightarrow B)$ où B est un absurdité, c'est-à-dire une assertion qu'on sait être fausse. Cette implication est équivalente à son implication contraposée : $(\text{non}\, B \Longrightarrow A)$. Cette dernière est donc vraie, et on sait que $\text{non}\, B$ est vraie. On conclut donc que A est vraie.

Exemple 2. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n ne peut être pair et impair à la fois.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que n est pair et impair à la fois. Traduisons cette hypothèse. n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. n est impair, donc il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2l + 1$. On peut alors écrire

$$0 = n - n = 2l + 1 - 2k = 2(l - k) + 1,$$

puis,

$$-\frac{1}{2} = l - k.$$

Or l et k étant deux entiers, leur différence aussi. Donc $-1/2 \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde. Conclusion, n ne peut pas être pair et impair. $\square$

Preuve de $(\forall x \in E,\ A(x))$ On procède de la façon suivante. On se donne un $x \in E$ quelconque, et démontre que $A(x)$ est vraie. L'élement x qu'on s'est donné étant quelconque, ce raisonnement est valable pour tout élément de E. On a donc bien démontré que $A(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Exemple 3. *Montrer que* $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x^2 + x + 1 > 0$. Cherchons à faire apparaitre une identité remarquable.

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \underbrace{(x + 1/2)^2}_{\geqslant 0} + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien démontré $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0)$. $\square$

Preuve de $(\exists x \in E,\ A(x))$ Pour prouver $(\exists x \in E,\ A(x))$, on peut soit utiliser un théorème qui assure l'existence d'un x tel que $A(x)$ soit vraie, ou bien *exhiber* un tel x.

Exemple 4. *Montrer* $(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 1 = 0)$.

Démonstration. $x = 1$ convient. En effet, $1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$. Conclusion, on a démontré $(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 1 = 0)$. □

4 Exercices

Exercice 1 Soient A et B deux assertions. Montrer les équivalences suivantes :

1. non(A et B) $\iff$ (non A) ou (non B)
2. non(A ou B) $\iff$ (non A) et (non B).

Exercice 2 Montrer que l'assertion ($A \Longrightarrow B$) est équivalente à (non A ou B).

Exercice 3 Soient A,B,C trois assertions. Montrer les équivalences suivantes.

1. A et (B ou C) $\iff$ (A et B) ou (A et C)
2. A ou (B et C) $\iff$ (A ou B) et (A ou C).

Exercice 4 Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1$
2. $\exists x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \geqslant 3$
4. $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \leqslant x < n + 1$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts. Montrer qu'alors qu'il existe un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

5 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1 Il suffit de dresser les tables de vérité.

Solution de l'exercice 2 A l'aide d'une table de vérité.

Solution de l'exercice 3 Avec les tables de vérité.

Solution de l'exercice 4

1. Montrons que cette assertion est fausse. Autrement dit, montons que sa négation est vraie.

$$\text{non}\,(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1) \iff \exists x \in \mathbb{R},\ x < 1$$

   C'est le cas car $x = 0 < 1$ convient. Conclusion, $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1)$ est fause.
2. Montrons que cette assertion est vraie. $x = 0$ convient, il s'agit bien d'un entier naturel et d'un nombre réel. Conclusion, $(\exists x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$ est vraie.
3. Montrons que cette assertion est fausse.

$$\begin{aligned}\text{non}\,(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \geqslant 3) &\iff \exists x \in \mathbb{R},\ \text{non}(x > 2 \Longrightarrow x \geqslant 3)\\ &\iff \exists x \in \mathbb{R},\ \text{non}(\text{non}(x > 2) \text{ ou } x \geqslant 3)\\ &\iff \exists x \in \mathbb{R},\ (x > 2 \text{ et } x < 3),\end{aligned}$$

   où on a utilisé l'exercice 2 pour la seconde équivalence et l'exercice 1 pour la troisème. $x = 2,5$ convient. Conclusion, on a montré que $(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \geqslant 3$ est fausse.
4. Montrons que cette assertion est fausse.

$$\begin{aligned}\text{non}(\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \leqslant x < n+1) &\iff \forall n \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \text{non}(n \leqslant x \text{ et } x \leqslant n\\ &\iff \forall n \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{R},\ (n > x \text{ ou } x > n +\end{aligned}$$

   Soit $n \in \mathbb{Z}$. $x = n+2$ convient. Conclusion, on a montré que $(\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \leqslant x < n+1)$ est fausse.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Montrons la contraposée. On suppose n pair et montrons que n^2 est pair. Il existe par hypothèse $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors,

$$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2),$$

et n^2 est bien un nombre pair. Conclusion, on a montré que $(n^2 \text{ impair} \Longrightarrow n \text{ pair})$ est vraie.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On suppose par l'absurde qu'il y a au plus une chausette par tiroir. Puisqu'il y a n tiroirs, il y a au plus n chaussettes au total, ce qui contredit l'hypothèse. Conclusion, on a bien montré qu'un tiroir contient au moins deux chaussettes.