DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Antoine TAVENEAUX
STAGE : Montpellier 2012

Exercices d'arithmétique

- Énoncés -

Exercice 1 Montrer qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres dans la décomposition en base 10 de ce nombre est divisible par 3. Montrer ensuite le même résultat pour 9.

Exercice 2

Montrer que parmi 2008 nombres, on peut toujours en trouver dont la somme est divisible par 2008 (une somme peut éventuellement n'être constituée que d'un seul nombre).

Exercice 3

Montrer que si (x, y, z) est une solution de l'équation suivante alors x ou y est un multiple de 2 :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Exercice 4 Écrire sous forme d'une fraction (si possible) le nombre :

$$x = 0,51234123412341234123412341234123412341234\ldots$$

Pouvez-vous généraliser cette méthode à tous les nombres réels avec un développement périodique ? Et réciproquement ?

Exercice 5 On appelle addichiffrer un nombre le fait d'additionner tous les chiffres d'un nombre. Par exemple, lorsqu'on addichiffre 124, on trouve 1+2+4=6.

Qu'obtient-on lorsqu'on addichiffre 1998^{1998} puis qu'on addichiffre le résultat obtenu et ainsi de suite trois fois de suite ?

Exercice 6 Montrer que le produit de 5 nombres consécutifs ne peut pas être un carré.

Exercice 7 Il y a 40 passagers dans un bus. Ils ont sur eux des pièces de monnaie de 10, 15 et 20 euros. Ils ont en tout 49 pièces de monnaie. Le prix du ticket d'autobus est égal à 5 euros. Montrer qu'il est impossible que tout le monde paye le prix du ticket et obtienne la monnaie en retour.

Exercice 8 Montrer que l'équation :

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$$

n'a pas d'autre solution rationnelle que $x = y = z = 0$. Indice : commencer par chercher les solutions entières.

Exercice 9 Trouver tous les entiers n tels que $2^n + 3$ est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

- Corrigé -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soit n un entier naturel et a_1, a_2 et a_k les chiffres de la décomposition de n en base 10 (c'est-à-dire que pour tout i on a $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ et $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_k 10^k$).

On a $10 \equiv 1 \pmod 3$ et donc par récurrence pour $k \geqslant 1$ on a $10^k \equiv 1 \pmod 3$. Donc on a

$$n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_k 10^k \equiv a_0 + a_1 + \dots a_k \pmod 3$$

et donc les restes de la division par 3 de n et de la somme des chiffres de la décomposition de n en base 10 sont les mêmes.

La preuve précédente est exactement la même pour 9.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

On note $a_1, a_2, ..., a_{2008}$ les nombres. On considère alors les sommes :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_{2008} = a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$

Deux cas sont alors possibles :

- soit une de ces sommes est divisible par 2008, alors on a fini.
- sinon ces sommes ont au plus 2007 restes possibles par division euclidienne, alors il existe S_i et S_j différents (on suppose par exemple $i < j$), tels que $S_i \equiv S_j (\text{mod } 2008)$. On a donc $S_j - S_i = s_{i+1} + ... + s_j \equiv 0 (\text{mod } 2008)$ et on a donc le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 3 Regardons l'équation modulo 4. Si x et y sont impairs alors on a $1 + 1 = z^2 \pmod 4$ ce qui est impossible car un carré ne peut pas être congru à 2 modulo 4.

Solution de l'exercice 4 On a

$$10x = 5,12341234123412341234123412341234\ldots \quad \text{et}$$

$$100000x = 51234,12341234123412341234123412341234\ldots$$

Donc $100000x10x = 99990x = 51229$ et finalement :

$$x = \frac{51229}{99990}$$

qui est irréductible. Cette méthode se généralise facilement et montre que tout nombre qui admet un développement décimal périodique peut s'écrire sous forme d'une fraction. Et réciproquement, dans le calcul du développement décimal on a seulement un nombre fini de restes et donc le développement décimal d'une fraction est nécessairement périodique.

Solution de l'exercice 5 1998 et 1998^{1998} sont des multiples de 9 et donc leurs addichiffres le sont aussi. Par récurrence tous les addichiffres obtenus par une répétition d'opérations d'addichiffre à partir de 1998^{1998} sont multiples de 9.

De plus :

$$1998^{1998} \leqslant 2000^{1998} = (2 \cdot 1000)^{1998} = 2^{1998} 10^{3.1998} = 2^{1998} 10^{5994}$$

et on sait que $2^9 = 512 < 10^3$ et donc $2^{1998} = 2^{9.222} < 10^{3.222} = 10^{666}$ et donc $1998^{1998} < 10^{5994+666} = 10^{6660}$. Donc l'addichiffre de 1998^{1998} est inférieur à $9.6660 = 59940$. L'addichiffre d'un nombre inférieur à 59940 est nécessairement inférieur à $5 + 9.4 = 41$. L'addichiffre d'un nombre inférieur à 41 est inférieur à $4 + 9 = 13$ et comme cet addichiffre est multiple de 9 et non nul ce nombre est nécessairement 9.

Solution de l'exercice 6 Supposons que a, b, c, d, e soient des entiers strictement positifs consécutifs tels que $a.b.c.d.e$ soient le carré d'un entier.

Si un des nombres contient un facteur premier supérieur à 5, alors, nécessairement ce facteur doit avoir un exposant pair, car il n'apparait que dans un seul des nombres du produit. Ainsi selon la puissance des facteurs 2 et 3 dans chaque nombre, chacun des nombres a, b, c, d, e est :

1. un carré parfait ou,

2. deux fois un carré parfait ou,
3. trois fois un carré parfait ou,
4. six fois un carré parfait.

D'après le principe des tiroirs, il existe au moins 2 nombres dans la même catégorie. Si les deux nombres sont tous les deux dans le cas 2, 3 ou 4 alors leur différence est au moins 6, ce qui est impossible car a, b, c, d, e sont des entiers consécutifs. Si les deux nombres sont dans le cas 1, alors il sont tous les deux des carrés parfaits. Il est donc impossible que e dépasse 5 car les seuls carrés qui sont à une distance inférieure à 5 sont 1 et 4, or $1.2.3.4.5 = 120$ et 120 n'est pas un carré. Il est donc impossible que le produit de 5 nombres consécutifs strictement positifs soit un carré parfait.

Remarque : Paul Erdös a montré que le produit de $k > 1$ nombres consécutifs n'est jamais un carré.

Solution de l'exercice 7 Le prix total des quarante tickets est 200 euros. Supposons le problème possible. Après avoir réglé les comptes entre eux pour faire l'appoint, chaque passager a récupéré au moins une pièce. Le règlement des tickets a donc nécessité au plus 9 pièces. Mais $9 \cdot 20 = 180 < 200$.

Solution de l'exercice 8 Si on a une solution rationnelle non nulle alors en multipliant par le cube du PPCM des dénominateurs de x, y et z alors on obtient une solution entière non nulle.

Il suffit donc de prouver le théorème pour les valeurs entières. Supposons qu'on ait un triplet d'entiers (x_0, y_0, z_0) dont au moins un est non nul et qui vérifie l'équation. Si on regarde l'équation modulo 3 alors on a

$$x_0 \equiv 0 \pmod 3$$

donc x_0 doit être multiple de 3. On peut donc noter $x_0 = 3x_1$ pour un x_1 entier. Donc l'équation devient :

$$27x_1^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 27x_1y_0z_0 = 0 \quad \text{donc :}$$

$$y_0 + 3z_0 + 9x_1 - 9x_1y_0z_0 = 0$$

donc une autre solution est (y_0, z_0, x_1) et de la même façon on peut montrer que $y_0 = 3y_1$ et $z_0 = 3z_1$ avec y_1 et z_1 entiers et donc (x_1, y_1, z_1) est une nouvelle solution. Ainsi x_0, y_0 et z_0 sont divisibles par toute puissance de 3, ce qui est impossible pour des entiers non nuls.

Solution de l'exercice 9 Un carré n'est jamais congru à 3 modulo 4 (si vous ne me croyez pas, essayez vous verrez !), donc $2^n + 3$ ne peut pas être un carré si $n \geqslant 2$. Et si $n = 1$ alors $2^1 + 3 = 5$ n'est pas un carré et si $n = 0$ alors $2^0 + 2 = 3$ est un carré. La deuxième question est moins facile. On cherche n et x, deux entiers, tels que $2^n + 1 = x^2$. Autrement dit :

$$2^n = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

donc $x+1$ et $x-1$ sont tous les deux des puissances de 2. Les seules puissances de 2 à distance 2 sont 2 et 4 donc $2^n = (x^2-1)(x+1) = 2 \cdot 4 = 8$ donc $n = 3$ est la seule solution.