DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Louis NEBOUT
STAGE : Grésillon 2011

Exercices de combinatoire

Exercice 1 Combien d'entiers positifs, inférieurs à 2011, sont multiples de 3 ou de 4, mais pas de 5 ?

Exercice 2 Une araignée possède 8 chaussettes identiques et 8 chaussures identiques. Dans combien d'ordre différents peut elle se chausser, sachant qu'évidemment, sur chaque patte, elle doit mettre la chaussure après la chaussette ?

Exercice 3 De combien de façons différentes peut-on choisir 5 nombres parmi $\{1, 2, \dots, 18\}$, de telle sorte que deux de ces nombres ne soient jamais consécutifs ?

Exercice 4 Dans un jeu de 27 cartes, chaque carte possède trois caractéristiques : forme (carré, cercle ou triangle), couleur (bleu, jaune ou rouge), et type de coloriage (plein, à pois ou hachuré). Toutes les cartes sont différentes. Une combinaison de trois cartes est appelée complémentaire si, pour chacune des trois caractéristiques, les trois cartes sont identiques, ou bien toutes différentes. Combien y-a-t'il de combinaisons complémentaires.

Exercice 5 Dans un tournoi, chaque participant joue un match contre chaque autre participant. Le gagnant d'un match gagne 1 point, le perdant 0, et si le match est nul les deux joueur gagnent un demi-point. À la fin du tournoi, les participants sont classés selon leur score (si plusieurs participants ont le même score, leur ordre est choisi aléatoirement). Chaque participant a remporté la moitié de ses points lors de ses matches contre les dix derniers participants (au classement). Combien de personnes participaient à ce tournoi ?

Exercice 6 On numérote les côtés d'un dodécagone C_1, C_2, ..., C_{12}. De combien de façons peut-on colorier les côtés d'un dodécagone, avec quatre couleurs, de telle sorte que deux côtés adjacents soient toujours de couleurs différentes ?

(On considère que deux coloriages sont différents dès que l'un des côtés C_i est coloré de deux couleurs différentes).

Exercice 7 Montrer que pour tout entier positif n, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

Exercice 8 Il y a $2n$ personnes dans une fête. Chacune de ces personnes a un nombre pair d'amis parmi les fêtards. Montrer que deux personnes ont un nombre pair d'amis communs.

Exercice 9 Soit n un entier positif. Combien-y-a-t'il de polynômes P à coefficients dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, tels que $P(2) = n$?

Exercice 10 Soient a_1, a_2, ..., a_n des nombres valant 0 ou 1. On définit b_1, b_2, ..., b_{n-1} de la façon suivante : si $a_k = a_{k+1}$, alors $b_k = 0$, sinon $b_k = 1$. On répète le processus jusqu'à avoir rempli un tableau triangulaire. Quel est le nombre maximum de 1 que peut comporter ce tableau ?

Exercice 11 Soit m un entier supérieur à 3. Dans une fête, ayant plus de m participants, chaque groupe de m personnes possède exactement un ami commun. Combien d'amis possède la personne possédant le plus d'amis ?

Exercice 12 Dans chaque case d'un échiquier de taille 1998×2002, on écrit le chiffre 0 ou 1, de telle sorte que dans chaque ligne et dans chaque colonne, le nombre de cases comportant le chiffre 1 soit impair. Montrer que le nombre de cases blanches comportant le chiffre 1 est pair.

Exercice 13 Soit n un entier impair différent de 1. Combien y-a-t-il de permutations p de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{n} |p(i) - i| = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Exercice 14 Soient n et k deux entiers positifs, tels que $\frac{n}{2} < k \leqslant \frac{2n}{3}$. On place m pions sur un échiquier de taille $n \times n$, de telle sorte qu'aucune ligne ou colonne ne comporte de bloc de k cases vides. Quel est le plus petit entier m pour lequel cela est possible ?

Exercice 15 Soient r_1, r_2, ..., r_n des nombres réels. Montrer qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, 2, \ldots, n\}$, tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-2$, $|S \cap \{i, i+1, i+2\}|$

soit égal à 1 ou 2, et tel que

$$\left|\sum_{i\in S} r_i\right| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} |r_i|.$$

- Correction -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Pour tout entier k, il y a $\lfloor 2011/k \rfloor$ multiples de k inférieurs à 2011. Il y a donc 670 multiples de 3, et 502 multiples de 4. Pour compter les nombres qui sont multiples de 3 ou de 4, il faut compter les multiples de 3, ceux de 4, et enlever les nombres à la fois multiples de 3 et de 4, qui sont comptés deux fois. Ces nombres sont les multiples de 12, il y en a 167. Il y a donc $670 + 502 - 167 = 1005$ nombres inférieurs à 2011 qui sont multiples de 3 ou de 4.

Il faut maintenant enlever de ce compte les multiples de 5. Un nombre est multiple de 3 et de 5 si et seulement s'il est multiple de 15 : il y en a 134, et un nombre est multiple de 4 et de 5 si et seulement s'il est multiple de 20 : il y en a 100. Il faut enlever de ce compte les nombres à la fois multiples de 3, 4 et 5, comptés deux fois. Ce sont les multiples de 60, il y en a 33. Finalement, le nombre recherché est $1005 - (134 + 100 - 33) = 804$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Numérotons les pattes de l'araignée de 1 à 8. Appelons a_i l'action consistant à mettre une chaussette sur la i-ème patte, et b_i l'action consistant à mettre une chaussure sur la i-ème patte. Il y a 16! façons d'ordonner les 16 actions (a_i) et (b_i). Considérons l'un de ces ordres. A partir de cet ordre, on s'autorise à échanger, pour tout i, les positions des actions a_i et b_i, ce qui permet d'atteindre 2^8 ordres différents. Parmi ces ordres, seul un correspond à une façon correcte de se chausser : l'ordre pour lequel pour tout i, a_i apparaît avant b_i. L'araignée peut donc se chausser de $16!/2^8 = 81729648000$ façons différentes.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Considérons l'application suivante :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \longmapsto (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, a_4 + 3, a_5 + 4),$$

qui associe à un quintuplet de nombres différents de $\{1, 2, \ldots, 14\}$, ordonnés par ordre croissant, un quintuplet de nombres différents de $\{1, 2, \ldots, 18\}$, ordonnés par ordre croissant, tel que deux de ces nombres ne soient jamais consécutifs. Cette application est clairement une bijection. Le nombre recherché est donc égal au nombre de parties à 5 éléments de $\{1, 2, \ldots, 14\}$, la solution est $\binom{14}{5} = 2002$.

Solution de l'exercice 4 Considérons une paire de cartes, choisie au hasard. Alors il y a une unique carte permettant de compléter cette paire en une combinaison complémentaire. En effet, considérons une des caractéristiques de nos deux cartes, par exemple la forme. Si les deux cartes ont la même forme (disons un carré), alors une carte formant une combinaison complémentaire avec nos deux cartes est nécessairement de la même forme (donc carrée). Maintenant, si les deux cartes ont deux formes différentes (disons un cercle et un triangle), alors une carte formant une combinaison complémentaire avec nos deux cartes est nécessairement de la troisième forme (donc carrée). Dans tous les cas, la forme de la troisième carte est parfaitement déterminée. Chaque paire nous donne donc une combinaison complémentaire. Ainsi, on compte chaque combinaison trois fois (car, si (A, B, C) est une combinaison complémentaire, les trois choix initiaux de paire (A, B), (B, C) et (C, A) conduisent à la combinaison (A, B, C)). Le nombre de combinaisons complémentaires est donc de $\frac{1}{3}\binom{27}{2} = 117$.

Solution de l'exercice 5 Nous allons utiliser une méthode de double comptage. En comptant de deux façons différentes le nombre de points distribué dans le tournoi, nous obtiendrons une relation algébrique portant sur le nombre n de participants, qui nous permettra de conclure. Un match correspond à une distribution de 1 point, et donc le score total obtenu par k joueurs dans les matches qu'ils jouent entre eux est donc de $k(k-1)/2$. Ainsi, le score total de tous les participants est de $n(n-1)/2$.

Les 10 derniers participants ont obtenus 45 points en jouant entre eux, leur score total est donc de 90 points. Les autres $n - 10$ participants ont obtenus $(n-10)(n-11)/2$ points en jouant entre eux, et donc un total de $(n-10)(n-11)$ points. Le score total de tous les participants est donc de $90 + (n-10)(n-11)$ points. En comparant ces deux valeurs, on obtient l'équation $n^2 - 41n + 400 = 0$, qui a deux solutions : 16 et 25.

Le tournoi ne pouvait pas contenir 16 participants. En effet, dans ce cas, le score total des 10 derniers participants est 90, et celui des 6 premiers est 30. Les dix derniers ont donc obtenus en moyenne plus de points que les premiers, c'est absurde. Le tournoi ne pouvait donc avoir que 25 participants.

Solution de l'exercice 6 Nous allons montrer par récurrence un résultat plus général : de combien de façon on peut colorier les côtés d'un polynôme à n côtés avec k couleurs, de telle sorte que les côtés adjacents soient de couleur différente. Nous notons cette quantité $p_{n,k}$. Commençons donc à colorier notre polygone : il y a k choix pour le côté C_1, puis $k-1$ choix possibles pour le côté C_2 différents de la couleur de C_1, et ainsi de suite. On trouve donc $k(k-1)^{n-1}$ coloriages possibles tels que les côtés adjacents soient de couleurs différentes, sauf peut-être C_1 et C_n. Mais l'ensemble des coloriages incorrects où C_1 est de même couleur que C_n est clairement en bijection avec celui des coloriage légaux d'un polygone à $n-1$ côtés (on a fusionné C_1 et C_n). On obtient donc la formule de récurrence suivante : $p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - p_{n-1,k}$.

Comme $p_{3,k} = k(k-1)(k-2)$, on a donc

$$p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-4}k(k-1)^3 + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2),$$

donc

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= k\frac{(k-1)^n + (-1)^{n-4}(k-1)^3}{1+(k-1)} + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \end{aligned}$$

Ainsi, $p_{12,4}$ est égal à $3^{12} + 3$, c'est-à-dire 531444.

Solution de l'exercice 7 Il y a essentiellement deux manières d'aborder un exercice de ce type. La première est une preuve par récurrence brutale, utilisant en général la formule de Pascal pour l'étape de propagation. La deuxième méthode est la preuve combinatoire. Cette méthode consiste à dénombrer de deux façons différentes le cardinal d'un même ensemble bien choisi, ce qui fait apparaître directement une égalité. Cette méthode est souvent plus courte et plus agréable, et nous allons l'utiliser ici.

L'idée est de calculer de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à $2n+1$ élément. Ce nombre est égal à $\binom{2n+1}{n}$, le membre de droite de notre égalité. Essayons maintenant de faire apparaître le membre de gauche. En observant ce membre, on observe un terme 2^k, qui correspond à k choix binaires, et un terme $\binom{n}{k}$, correspondant à un choix de k éléments. En mettant ces deux éléments bout à bout, on arrive à la méthode de calcul suivante.

Groupons nos $2n+1$ éléments en n paires, et mettons le dernier élément à part. Choisissons k de ces paires ($\binom{n}{k}$ choix). Le nombre k correspond au nombre de paires contenant exactement un élément de notre ensemble à n éléments : dans chacune de ces k paires, choisissons un des deux éléments (2^k choix). Nous avons sélectionnés k éléments, il nous reste à en choisir $n-k$ pour aboutir à un ensemble à n éléments. Ces $n-k$ éléments doivent être regroupés dans $\lfloor (n-k)/2 \rfloor$ paires, et si $n-k$ est impair, pour compléter, on rajoute à notre ensemble l'élément n'appartenant à aucune paire. On voit immédiatement que l'on construit ainsi une fois chaque ensemble à n éléments, et qu'il y a $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$ façons d'effectuer cette construction.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Supposons par l'absurde que toute paire de personne a un nombre impair d'amis communs. Soit P une personne particulière, soit A l'ensemble des amis de P, et B l'ensemble des personnes qui ne sont pas amies avec P (on exclue P lui-même de cet ensemble). Par hypothèse, $|A|$ est pair, et, comme il y a un nombre pair de fêtards, $|B|$ est impair. Soit Q une personne dans B. Comme P et Q ont un nombre impair d'amis communs, Q a un nombre impair d'amis dans A. Comme Q n'est pas ami avec P, et a un nombre pair d'amis, Q a un nombre impair d'amis dans B.

Maintenant, en sommant le nombre d'amis de chaque personne de B, on obtient un nombre impair, mais ce nombre doit être égal au double du nombre de relations d'amitiés entre personnes de B, une contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> L'idée naturelle est de relier $P(2)$ à des développements en binaires. Soit donc P un polynôme à coefficients dans $\{0, 1, 2, 3\}$ de degré m, que l'on écrit $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$. Maintenant, pour tout i, écrivons $a_i = 2b_i + c_i$, avec b_i et c_i dans $\{0, 1\}$, la décomposition de a_i en binaire. Ainsi, on a

$$P(2) = 2\sum_{i=0}^{m} b_i 2^i + \sum_{i=0}^{m} c_i 2^i.$$

Ainsi, pour que $P(2)$ soit égal à n, il faut que $\overline{a_n a_{n-1} a_0}$ soit l'écriture binaire de $n - 2\sum_{i=0}^{m} b_i 2^i$, et pour que cela soit possible il faut donc que $\overline{b_n b_{n-1} b_0}$ appartienne à $\{0, 1, \dots \lfloor n/2 \rfloor\}$. L'ensemble des polynômes recherchés est donc en bijection avec $\{0, 1, \dots \lfloor n/2 \rfloor\}$, et la quantité recherchée est $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Il y a une méthode naturelle pour construire un tableau contenant beaucoup de 1 : en commençant par le bas. On prend 1 comme

dernière ligne du tableau, 01 comme avant-dernière ligne. Ensuite, pour chaque ligne suivante il n'y a que deux possibilités (une commençant par 0 et une par 1), par exemple pour la ligne 3 on a le choix entre 001 et 110. On choisit alors la possibilité contenant le plus de 1. On arrive ainsi au tableau suivant :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 01 \\ 110 \\ 1011 \\ 01101 \\ 110110 \\ 1011011 \\ 01101101 \\ 110110110 \\ \dots \end{array}$$

Le calcul permet de se convaincre que dans un tel tableau de n lignes le nombre 1 apparaît $\lfloor \frac{n^2+n+1}{3} \rfloor$ fois. Ce tableau fait aussi apparaître une sorte de périodicité de période 3, ce qui incite, dans la récurrence, à utiliser la propriété au rang n pour montrer celle au rang $n+3$.

Montrons donc par récurrence sur n que le tableau comporte au plus $\frac{n^2+n+1}{3}$ fois le nombre 1. L'initialisation (pour n valant 0, 1 ou 2) est évidente. Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+3$. Considérons les 3 premières lignes d'un tel tableau, que l'on note $a_1a_2\dots a_{n+3}$, $b_1b_2\dots b_{n+2}$ et $c_1c_2\dots c_{n+1}$. Soit la première colonne $a_1b_1c_1$ comporte un 0, soit elle comporte 3 fois 1, mais alors a_2 et b_2 sont nuls, et les deux premières colonnes comportent au moins deux zéros. On procède ainsi de gauche à droite, ce qui montre que soit les $n+1$ premières colonnes comportent au moins $n+1$ zéros (cas 1), soit les n premières colonnes comportent au moins n zéros (cas 2).

Dans le cas 1, comme a_{n+2}, a_{n+3} et b_{n+2} ne peuvent être tous égaux à 1, les 3 premières lignes comportent au moins $n+2$ zéros. Dans le second cas, on peut supposer que la colonne $a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}$ est composée de trois fois le nombre 1 (sinon, on peut se ramener au premier cas), et donc a_{n+2} et b_{n+2} sont égaux à 0, et dans ce cas aussi les 3 premières lignes comportent au moins $n+2$ zéros, et donc ces 3 premières lignes comportent au plus $2n+4$ fois le nombre 1. Or on a

$$\frac{n^2+n+1}{3}+2n+4=\frac{(n+3)^2+(n+3)+1}{3},$$

ce qui clôt la récurrence.

Solution de l'exercice 11 Le nombre recherché est clairement supérieur à m : prenons un groupe de m personnes, alors l'ami commun aux personnes de ce groupe a au moins m amis. Nous allons montrer que ce maximum est en fait égal à m. Soit P la personne ayant le plus d'amis, et S l'ensemble de ses amis. Considérons un sous-ensemble S' de S à $m-1$ éléments. Appelons $Q_{S'}$ l'ami commun aux éléments de S' et à P, c'est un ami de P et c'est donc un élément de S.

Soient S_1 et S_2 deux sous-ensembles de S à $m-1$ éléments, distincts. Alors $S_1 \cup S_2$ possède au moins m éléments, et donc Q_{S_1} est différent de Q_{S_2} (car sinon, en prenant un sous-ensemble à m éléments de $S_1 \cup S_2$, les éléments de cet ensemble auraient au moins deux amis communs, Q_{S_1} et P, ce qui est contraire aux hypothèses).

Nous avons donc montrer que l'ensemble des sous-ensembles à $m-1$ éléments de S s'envoie injectivement dans S. Cela impose

$$\binom{|S|}{m-1} \leqslant |S|,$$

et donc $|S| \leqslant m$, ce qui est le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 12 Numérotons les cases par des couples (i,j), où $1 \leqslant i \leqslant 1998$ et $1 \leqslant j \leqslant 2002$. Une case est blanche si et seulement si ses deux coordonnées sont de même parité. Appelons L_{impair} la somme des contenus des cases des lignes impaires, et C_{pair} la somme des contenus des cases des colonnes paires. Ces deux sommes sont impaires, comme somme de nombres impairs de nombres impairs. Le contenu d'une case blanche apparaît dans précisément une de ces deux sommes (dans L_{impair} si ses coordonnées sont impaires, dans C_{pair} sinon). Examinons l'ensemble N des cases noires intervenant dans la somme L_{impair}. Ce sont les cases ayant des coordonnées (i,j) avec i impair et j pair, et donc N est aussi égal à l'ensemble des cases noires intervenant dans C_{pair}. Ainsi, en notant $s(N)$ la somme des contenus des cases des éléments de N, on a que la somme des contenu des cases blanches est égale à $L_{impair}+C_{pair}-2s(N)$. Comme cette somme est paire, le nombre de cases blanches comportant le chiffre 1 est pair.

Solution de l'exercice 13 L'observation clé permettant d'espérer résoudre l'exercice est que, en essayant des cas à la main, on observe que $\frac{n^2-1}{2}$ semble être la valeur maximale de la somme considérée. Les termes $|p(i) - i|$ intervenant dans la somme sont tous des différences de deux entiers, plus précisément des somme de deux entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$, l'un compté négativement, et l'autre positivement. La somme totale comporte donc n signes plus et n signes moins. De plus chaque entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$ apparaît précisément deux fois dans cette somme : une fois parmi les (i), une fois parmi les $(p(i))$. On en déduit que la somme $\sum_{i=1}^{n} |p(i) - i|$ est nécessairement inférieure à la valeur suivante, en notant $n = 2k + 1$:

$$n + n + \ldots + (k+2) + (k+2) + (k+1) - (k+1) - k - k - \ldots - 1 - 1 = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Les permutations p que nous cherchons à compter correspondent donc au cas d'égalité, ce qui nous donne une grande quantité d'informations sur p. Par exemple, soit m un entier strictement supérieur à $k + 1$. Cet entier est compté deux fois avec un signe positif dans la somme, et donc : $p(m) < m$ et $p(i) = m \Rightarrow i < m$. L'entier $k + 1$ a un rôle particulier, devant être compté une fois positivement et une fois négativement, ce qui nous force à distinguer deux cas : Cas 1 : $p(k+1) \leqslant k$. Alors $k+1$ est compté positivement dans $|p(k+1) - (k+1)|$. Comme il doit être compté une fois négativement, cela implique que le nombre i tel que $p(i) = k + 1$ vérifie $i > k + 1$. La condition sur p est ainsi équivalente aux deux conditions

$$\{p(1), p(2), \ldots p(k)\} = \{k+2, k+3, \ldots n\},$$

et

$$\{p(k+2), p(k+3), \ldots p(n)\} = \{1, 2, \ldots k+1\} - \{p(k+1)\}.$$

Il y a donc $k(k!)^2$ telles permutations.

Cas 2 : $p(k+1) \geqslant k+1$. Alors $k+1$ est compté négativement dans $|p(k+1) - (k+1)|$. Comme il doit être compté une fois positivement, cela implique que le nombre i tel que $p(i) = k+1$ vérifie $i \leqslant k+1$. La condition sur p est ainsi équivalente aux deux conditions

$$\{p(1), p(2), \ldots p(k)\} = \{k+1, k+2, \ldots n\} - \{p(k+1)\},$$

et

$$\{p(k+2), p(k+3), \ldots p(n)\} = \{1, 2, \ldots k\}.$$

Il y a donc $(k+1)(k!)^2$ telles permutations. Le résultat final est donc $(2k+1)(k!)^2 = n\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2$.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Numérotons les cases par des couples (i,j), où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. Il existe une configuration naturelle répondant aux conditions de l'énoncé, comportant peu de pions : on place un pion sur la case (i,j) si et seulement si $i+j-1$ est divisible par k. Pour tout couple (i,j), $i+j-1$ est inférieur strictement à $4k$, donc les cases sur lesquelles il y a un pion correspondent aux valeurs k, $2k$ et $3k$ de $i+j-1$, et représentent des lignes diagonales sur l'échiquier. Comme $3k \leqslant 2n$, il est facile de compter le nombre de pions : c'est $k+(2n-2k)+(2n-3k) = 4(n-k)$.

Pour prouver que cette construction est bien optimale, faisons le découpage suivant : on partitionne l'échiquier en 9 régions rectangulaires A, B, C, D, E, F, G, H, I, de telle sorte que les quatre coins A, C, G et I soient des carrés de côtés $n-k$. (Ainsi, B, D, F et H sont des rectangles de côtés $n-k$ et $2k-n$.)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

La région $A \cup B$ est composée de $n-k$ lignes de k cases. Chacune de ces lignes doit contenir un pion, et donc $A \cup B$ contient au moins $n-k$ pions. On raisonne de même avec les régions $C \cup F$, $I \cup H$ et $G \cup D$, qui contiennent elles aussi au moins $n-k$ pions. Cela montre que l'échiquier contient au moins $4(n-k)$ pions.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> La difficulté de cet exercice vient de la condition sur S, qui a l'air un peu artificielle, et on ne voit pas trop comment la satisfaire. L'idée est que, pour une certaine classe d'ensembles, cette condition est naturellement vérifiée, et que commencer par essayer de trouver une solution parmi ces ensembles est un bon départ. Comment s'assurer que la condition sur S est vérifiée ? La façon la plus naturelle de le faire est de prendre dans S tous les entiers ayant un certain reste modulo 3 (par exemple, les entiers divisibles par 3). Ensuite, on rajoute à S certains entiers ayant un autre reste modulo 3 (par exemple, certains entiers congru à 1 modulo 3). Comment choisir quels entiers rajouter ? Comme le but est de maximiser une valeur absolue, il est naturel de rajouter tous les nombres i pour lequel r_i a un certain signe. Toutes ces considérations amènent à poser les définitions suivantes.

Posons $s = \sum_{i=1}^{n} |r_i|$, et pour i dans $\{0, 1, 2\}$, posons

$$s_i = \sum_{r_j \geqslant 0, j \equiv i[3]} r_j, \text{ et } t_i = \sum_{r_j < 0, j \equiv i[3]} r_j.$$

Alors $s = s_1 + s_2 + s_3 - t_1 - t_2 - t_3$, ce que l'on réécrit $2s = (s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + (s_3 + s_1) - (t_1 + t_2) - (t_2 + t_3) - (t_3 + t_1)$. Il existe donc i_1 différent de i_2, tel que $s_{i_1} + s_{i_2} \geqslant \frac{s}{3}$ ou $t_{i_1} + t_{i_2} \leqslant -\frac{s}{3}$. Quitte à remplacer (r_i) par $(-r_i)$, nous pouvons supposer que $s_{i_1} + s_{i_2} \geqslant \frac{s}{3}$ et que $|s_{i_1} + s_{i_2}| \geqslant |t_{i_1} + t_{i_2}|$. Ainsi $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1} + t_{i_2} \geqslant 0$, et donc

$$(s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1}) + (s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_2}) \geqslant s_{i_1} + s_{i_2} \geqslant \frac{s}{3}.$$

Ainsi, un des deux termes $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1}$ et $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_2}$ est supérieur à $\frac{s}{6}$, ce qui conclut.