DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2012

Récurrence

- Rappel de cours -

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété sur les entiers (par exemple "n est un nombre premier", "un polygone à n côtés est triangulable" ou "$n^3 - n$ est divisible par 3") que l'on veut démontrer pour tout n.

Théorème 1. Si

1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie ("initialisation") et
2. si on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on peut démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ ("hérédité")

alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

- Exercices -

Exercice 1 Trouver une formule pour $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Exercice 2 Regardons la suite de Fibonacci : $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Soit ϕ (resp. ϕ') la solution positive (resp. négative) de l'équation $X^2 = X + 1$. Montrer que :

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 3 Définissons pour tout $n \geqslant 0$ et tout $0 \leqslant k \leqslant n$ les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (prononcez "k parmi n") de la manière suivante :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Démontrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 4 On trace n cercles dans le plan tels que deux cercles ne soient jamais tangents. Montrer que l'on peut colorier les régions du plan ainsi délimitées de deux couleurs de telle façon que deux régions séparées par un arc de cercle soient de couleurs différentes.

Exercice 5 On trace n droites dans le plan, deux jamais parallèles, trois jamais concourantes. En combien de parties le plan est-il découpé ?

Exercice 6 Montrer que pour tout $n > 5$ il est possible de découper un carré en n carrés plus petits.

Exercice 7 Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est un entier. Montrer que pour tout n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 8 On choisit n points sur un cercle et on trace toutes les cordes associées (on se débrouille pour que 3 cordes n e soient jamais concourantes). En combien de parties le cercle est-il découpé ?

Exercice 9 (Les tours de Hanoi) Dans le temple de Bénarès sont érigées trois aiguilles de diamants. Sur l'aiguille de gauche sont enfilés 64 disques d'or pur, le plus large à la base et les autres, de plus en plus étroits, empilés jusqu'au sommet. Nuit et jour, les moines déplacent les disques d'une aiguille à l'autre en suivant deux règles : ils ne peuvent déplacer qu'un disque à la fois, et ils ne peuvent pas poser un disque sur un disque plus petit. Il est dit que lorsque les 64 disques seront sur l'aiguille de droite, le temple s'écroulera et ce sera la fin du monde. Combien de temps nous reste-t-il ?

Exercice 10 Montrer que pour tout entier $x < n!$, il existe $k \leqslant n$ un entier et $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des diviseurs deux à deux distincts de $n!$ tels que $x = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$.

- Corrigé -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Calculons les premiers termes pour se donner une idée :

1 ; $1+8 = 9$; $1+8+27 = 36$; $1+8+27+64 = 100$; $1+8+27+64+125 = 225$; ...

On remarque tout de suite que tous les termes sont des carrés, les carrés de la suite $1, 3, 6, 10, 15$, que l'on reconnait comme la suite 1, $(1+2)$, $(1+2+3)$, etc. Nous allons essayer de prouver la formule suivante par récurrence :

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

L'initialisation est facile. Maintenant supposons que la formule est vraie pour n et calculons

$$1+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 2 Commençons par calculer ϕ et ϕ'. C'est un simple trinome du second degré :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Il est facile de vérifier que la formule marche pour F_1. Ensuite pour F_2 nous utiliserons la relations $\phi^2 = \phi + 1$ (pareil pour ϕ') :

$$\frac{\phi^2 - \phi'^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi+1)-(\phi'+1)}{\sqrt{5}} = 1 = F_2.$$

Interessons nous maintenant à l'hérédité : supposons que la formule est vraie pour F_n et F_{n+1}. Nous utiliserons la formule suivante :

$$\phi^{n+1} + \phi^n = \phi^n(\phi+1) = \phi^n \cdot \phi^2 = \phi^{n+2}.$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\phi^{n+1} - \phi'^{n+1} + \phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+2} - \phi'^{n+2}}{\sqrt{5}},$$

ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 3 Attention, ici il y a deux indices :n et k, il faut être minutieux sur la façons dont nous ferons la récurrence. Nous allons démontrer par récurrence sur n la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\forall 0 \leqslant k \leqslant n,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\text{''}.$$

L'initialisation est évidente ($0! = 1$). Intéressons nous maintenant à l'hérédité. Supposons que la formule est vraie pour la ligne n et regardons la ligne $n+1$. Débarassons-nous déjà des cas $k = 0$ et $k = n+1$:

$$\frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1 = \binom{n+1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Regardons à présent le reste des cas :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

on met tout sur le même dénominateur $(k+1)!(n-k)!$:

$$= \frac{n!((k+1)+(n-k))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Ce qui achève la récurrence.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Nous allons faire la démonstration par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est facile, il suffit de colorier l'intérieur du cercle en rouge et l'extérieur en bleu.

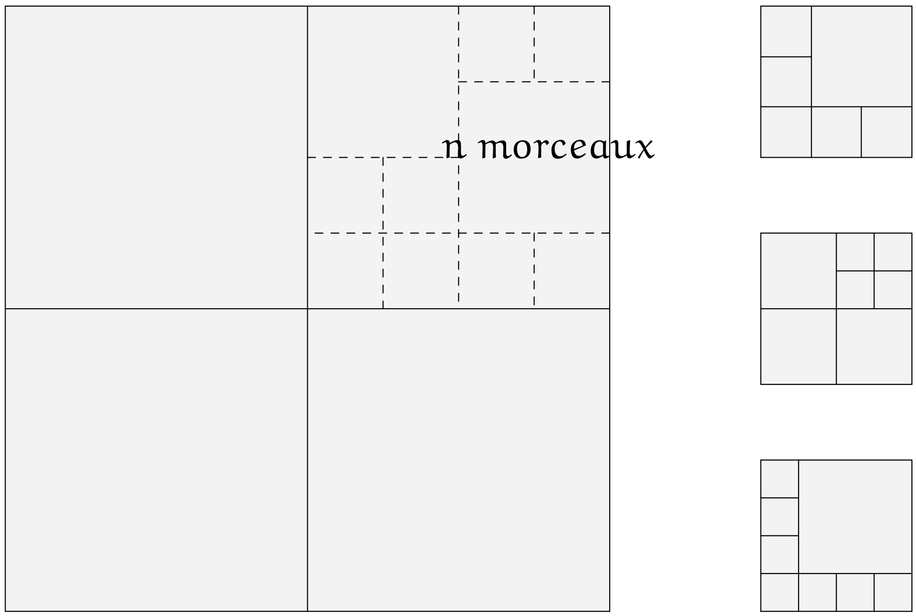
Maintenant supposons que pour n cercles il est toujours possible de trouver un bon coloriage. Prenons $n+1$ cercles et meetons-en un de côté. Il en reste n, donc par hypothèse de récurrence on peut trouver un bon coloriage. Maintenant rajoutons le dernier cercle et faisons la manipulation suivante : on inverse la couleur de tous les secteursà l'intérieur du cercle et on ne touche pas à l'extérieur. Il est facile de vérifier que le coloriage ainsi obtenu est bon.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Lorsqu'il n'y a aucune droites, il y a 1 secteur, avec une droite il y a 2 secteurs. Soit u_n le nombre de secteurs lorsqu'il y a n droites. Lorsqu'on rajoute la $n+1$-ème droite, elle va couper les n autres droites, ce qui signifie qu'elle passera par $n+1$ secteurs. Elle coupera chacun de ces secteurs en deux, donc elle rajoute $n+1$ régions. Nous obtenons la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Il est facile de démontrer par récurrence qu'alors

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "il est possible de découper un carré en n petits carrés". On remarque que si on sait découper un carré en n

carré, alors il est facile de découper un carré en $n+3$ carrés : on coupe le gros carré en 4 et on découpe un des petits carrés en n morceaux (voir la figure de gauche).



Ceci règle son compte à l'hérédité : si on suppose $\mathcal{P}(n)$, vraie alors $\mathcal{P}(n+3)$ est vraie. Il suffit ensuite de s'occuper de l'initialisation. Attention, comme on passe de n à $n+3$, il faut prouver 3 cas : les cas 6, 7 et 8. Ils sont dans la partie droite de la figure.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier". $\mathcal{P}(1)$ est vrai par hypothèse. Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vraies,

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$$

Les termes $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x + \frac{1}{x}$ et $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ sont entiers par hypothèse de récurrence, donc $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est aussi entier, ce qui achève la récurrence.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Comme dans l'exercice plus haut, nous allons dénombrer combien on rajoute de secteurs lorsqu'on place le $n+1$-ème point. Numérotons les sommets de 1 à n et plaçons un sommet supplémentaire entre le point 1 et le point n. Regardons la corde C_k qui relie le nouveau point au point k. Une autre corde Γ de la figure coupe la corde C_k ssi un des sommets de Γ est à droite de C_k et l'autre est à gauche. Pour trouver une corde qui coupe C_k il faut donc choisir un point parmi les $k-1$ à droite et un parmi les $n-k$ à

gauche, ce qui en donne $(k-1)(n-k)$. Et comme dans l'exercice précédent, cela signifie que la corde C_k rajoute $(k-1)(n-k)+1$ secteurs. Donc

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k)+1=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2-n(n-1)=u_n+\frac{n^3-3n^2+8n}{6}.$$

On initialise avec $u_0=u_1=1$ et on trouve :

$$u_n=\frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1=\frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Appelons u_n le nombre minimal de mouvements pour déplacer une colonne de taille n d'une aiguille à une autre. Pour déplacer une colonne de taille $n+1$ de la colonne de droite à la colonne de gauche, il faut déplacer les n premiers disques sur la colonne du milieu, puis déplacer le gros disque sur la colonne de droite, puis redéplacer les n autes disques par dessus. Cela nous permet de trouver la formule de récurrence suivante : $u_{n+1}=2u_n+1$. On initialise avec $u_1=1$, et je laisse au lecteur le soin de démontrer par récurrence que $u_n=2^n-1$. Si on considère qu'il faut au moins une seconde aux moines pour faire un mouvement, la fin du monde n'est pas avant 2^64-1 s $\approx$ 600 milliards d'années (on est larges).

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Nous allons montrer la propriété par récurrence. L'initialisation est facil. Maintenant supposons que la propriété est vraie pour n et prenons un entier $k<(n+1)!$. Nous allons faire la division euclidienne de k par $n+1$:

$$k=(n+1)q+r.$$

L'entier q est strictement inférieur à $n!$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : $q=d_1+\cdots+d_k$ avec $k\leqslant n$ et

$$k=d_1(n+1)+d_2(n+1)+d_3(n+1)+\cdots+d_k(n+1)+r.$$