DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Razvan BARBULESCU
STAGE : Montpellier 2012

Equations fonctionnelles

- Énoncés -

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(1) = 1$ et, pourt tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 2 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous x, y on a

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1. \tag{1}$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant :

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+, f(n!) = f(n)!$;
2. $\forall m \neq n, (m - n) \mid (f(n) - f(m))$.

Montrer les affirmation suivantes.

1. Si f a un point fixe $n_0 \geqslant 3$, alors $f = \mathbf{id}_{\mathbb{N}}$.
2. Si $f(3) \neq 3$, alors, pour tout n, $3 \nmid f(n!)$ et f est constante.

Exercice 4 Prouver que l'équation

$$x^2 + 2y^2 = z^2 + 2t^2 \tag{2}$$

a une infinité de solutions entières positives. Ensuite, trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous m et n entiers positifs, on a :

$$f\left(f(n)^2 + 2f(m)^2\right) = n^2 + 2m^2. \tag{3}$$

Exercice 5 Soient $f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 f_1 + a_2 f_2$ est monotone. On suppose que f_2 n'est pas constante. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f_1 - a f_2$ est constante.

Exercice 6 Trouver les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que $f(1) = 2$,$\forall x, y \in \mathbb{Q}$: $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.

- Corrigé -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> En posant $x = y = 0$ on trouve $f(0) = 0$. En posant $y = -x$ on a $f(0) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(2x) - f(x) + f(x)$. Par récurrence on a pour tout n naturel,

$$f((n)x) = nf(x). \tag{4}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $f(1 \cdot \frac{1}{m} = mf(\frac{1}{m})$, donc $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$. En injectant dans (4) on obtient $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$. Comme f est impaire, $f(q) = q$ pour tout q rationnel.

Soit $r \in \mathbb{R}$ et supposons $f(r) \neq r$. On suppose $f(r) > r$, le cas $f(r) < r$ étant analogue. Comme entre n'importe quels deux nombres réels il y a un nombre rationnel, on prend q_0 tel que $f(r) < q_0 < r$. Comme f est croissante, on a $f(f(r)) < f(q_0) \leqslant f(r)$. Contradiction. Ainsi, $f(x) = x$ pour tout x.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On note $c = f(0)$. Soit $z \in \mathrm{Im}(f)$, et y tel que $z = f(y)$. Pour $x = z$ on a

$$c = f(z - z) = f(z) + z^2 + f(z) - 1. \tag{5}$$

Cela donne $f(z) = \frac{1}{2}(c - z^2 + 1)$ pour tout $z \in \mathrm{Im}(f)$. On est tenté de poser $z = 0$ et d'obtenir $c = 1$, mais on ne sait pas si $0 \in \mathrm{Im}(f)$. En posant $x = y = 0$ dans (1) on $c \neq 0$. On fait $y = 0$ dans (1) et on voit que tout réel est la différence de 2 éléments de l'image :

$$x = \frac{f(x - c) - f(c) - f(x) + 1}{c}. \tag{6}$$

Soit z un réel et y_1, y_2 tels que $z = f(y_1) - f(y_2)$.On note $u = f(y_1)$ et $v - f(y_2)$. On injecte $f(y_1)$ et y_2 dans (1) et on trouve

$$f(f(y_1) - f(y_2)) - f(f(y_1)) + f(y_1)f(y_2) + f(f(y_2)) - 1. \tag{7}$$

Or, on connait l'expressions de $f(u)$ pour tout $u \in \mathrm{Im}(f)$, donc on trouve $f(z) = c - \frac{z^2}{2}$. En comparant avec l'expression $f(z) = \frac{1}{2}(c - z^2 + 1)$ pour tout $z \in \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $c = 1$. La seule possibilité est donc $f(z) = 1 - \frac{z^2}{2}$, qui est effectivement solution de l'équation.

Solution de l'exercice 3 (Adaptation d'après un problème de BMO 2012.)

1. On pose $a_0 = n_0$ et, pour tout $k \geqslant 0$, $a_{k+1} = a_k!$. Une récurrence simple montre que, pour tout k, a_k est un point fixe. Comme $a_0 \geqslant 3$, $a_1 = a_0! > a_0$ et par récurrence $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$, donc on a une suite infinie de points fixes. Pour un n fixé et un k arbitraire on a :

$$n - a_k \mid (f(n) - f(a_k)) - (n - a_k) = f(n) - n. \tag{8}$$

   Comme k est arbitraire, $f(n)-n$ a une infinité de diviseurs, donc $f(n) = n$.

2. Puisque $f(1)! = f(1)$ et $f(2)! = f(2)$, $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$. Si $f(3) > 3$, alors $4 \mid f(3)!$. D'autre part, $3! - 2 \mid f(3!) - f(2)$. Cela implique $4 \mid f(2)$. Faux. Ainsi $f(3) \in \{1, 2\}$. Pour tout $n \geqslant 3$, $3 \mid n!$, donc $3 \mid (n! - 3)$. D'autre part, $n! - 3 \mid f(n!) - f(3)$, donc, puisque $f(3) \in \{1, 2\}$, $3 \nmid f(n!)$. Or, alors, pour tout n, $f(n) \in \{1, 2\}$. La deuxième condition implique $f(n) = f(m)$ ou $|n - m| \leqslant |f(n) - f(m)|$ pour tout couple n, m. Ainsi $f(n) = f(1)$ pour $n \geqslant 3$ et $f(n) = f(2)$ pour $n \geqslant 4$, donc f est constante.

Solution de l'exercice 4 (BMO 2009) Pour comprendre une équation, il est toujours pratique de commencer par trouver quelques solutions. Pour cela on calcule $x^2 + 2y^2$ pour tout couple déléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; la case (n, m) du tableau suivant indique $n^2 + 2m^2$.

	1	2	3	4	5
1	3	9	19	*33*	51
2	6	12	22	36	54
3	11	17	**27**	41	59
4	18	24	34	48	66
5	**27**	*33*	43	57	75

On conclut que $(5, 1, 3, 3)$ et $(1, 4, 5, 2)$ sont solutions.

Une méthode simple de montrer qu'on a une infinité de solution est de trouver une formule, dépendant d'un paramètre, qui produit une infinité de solutions. On cherche une formule du type

$$(x + \alpha)^2 + 2(x + \beta)^2 = (x + \gamma)^2 + 2(x + \delta)^2. \tag{9}$$

Pour cela on doit avoir :

$$\alpha + 2\beta = \gamma + 2\delta \tag{10}$$
$$\alpha^2 + 2\beta^2 = \gamma^2 + 2\delta^2 \tag{11}$$

Parmi les deux solutions que l'on connaît pour (11), seule $(1,4,5,2)$ vérifie (10). On a obtenu la formule :

$$(x+1)^2 + 2(x+4)^2 = (x+5)^2 + 2(x+2)^2. \tag{12}$$

Passons maintenant à la deuxième partie de l'exercice. Commençons par remarquer que f est injective car, si $f(n_1) = f(n_2)$, alors $3n_1^2 = f(3f(n_1)^2) = f(3f(n_2)^2) = 3n_2^2$. On note $a = f(1)$. En posant $n = m = f(1)$ dans (3) on trouve $f(3a^2) = 3$.

Si (x,y,z,t) est une solution de (2), alors on peut injecter $n = xa^2$, $m = ya^2$, puis $n = za^2$ et $m = ta^2$ dans (3) et trouver :

$$f(f(xa^2)^2+2f(ya^2)^2) = (xa^2)^2+2(ya^2)^2 = (za^2)^2+2(ta^2)^2 = f(f(za^2)^2+2f(ta^2)^2). \tag{13}$$

Par l'injectivité de f, on a $f(xa^2)^2 + 2f(ya^2)^2 = f(za^2)^2 + f(ta^2)^2$. En conclusion, (x,y,z,t) solution implique $(f(xa^2), f(ya^2), f(za^2), f(ta^2))$ solution.

Pour $(x,y,z,t) = (5xt, z, , 1, 3, 3)$ on trouve $f(5a^2)^2 + 2f(a^1)^2 = 3f(3a^2) = 27$. L'équation $u^2+2v^2 = 27$, n'a pas de solutions autres que $(5,1)$ et $(3,3)$. Comme $(3,3)$ est interdite par l'injectivité de f, $f(5a^2) = 5$ et $f(a^2) = 1$.

Pour $(x,y,z,t) = (1,4,5,2)$ on trouve $f(a^2)^2 + 2f(4a^2)^2 = f(5a^2)^2 + 2f(2a^2)^2$. Comme $f(5a^2) = 5$ et $f(a^2) = 1$, $f(4a^2)$ et $f(2a^2)$ vérifie l'équation $1 + 2g^2 = 5^2 + 2h^2$. Cela équivaut à $(g-h)(g+h) = 12$. Comme $(g-h)$ et $g+h$ ont la même parité, $g - h = 2$ et $g + h = 6$, d'où $f(4a^2) = 4$ et $f(2a^2) = 2$.

On montre par récurrence sur k que $f(ka^2) = k$. On l'a déjà prouvé pour $k \in \{1,2,3,4,5\}$. On suppose le résultat connu pour $k+1, k+2, k+4$ et on le montre pour $k+5$. Pour $(x,y,z,t) = (k+1, k+4, k+5, k+2)$ on trouve :

$$f((k+1)a^2)^2 + 2f((k+4)a^2)^2 = f((k+5)a^2)^2 + 2f((k+2)a^2). \tag{14}$$

Ceci prouve $f((k+5)a^2) = (k+5)a^2$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}_+^*$, $f(ka^2) = k$.

En prenant $k = a$ on trouve $f(a^3) = a$. En mettant $n = m = a^3$ dans (3) on a $f(f(a^3)^2 + 2f(a^3)^2) = 3a^6$. Or $f(a^3) = a$, donc $f(3a^2) = 3a^6$. Ainsi $a^6 = 1$, donc $a = 1$. La seule possibilité pour f est l'identité, qui réciproquement vérifie (3).

Solution de l'exercice 5 Si on montre le résultat pour $\overline{f_1} = f_1 - c_1$ et $\overline{f_2} = f_2 - c_2$ pour deux constantes réelles c_1 et c_2, alors on aura le résultat aussi pour f_1 et f_2. En prenant $c_1 = f_1(0)$ et $c_2 = f_2(0)$ on peut supposer $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Remarquons que si $f_2(1) = 0$, alors f_2 est constante, ce qui est interdit par l'hypothèse. On pose $g = f_1(x) - \frac{f_1(1)}{f_2(1)} f_2(x)$. On a $g(1) = 0$, $g(0) = 0$. Or, d'après l'hypothèse, g est monotone, donc g est constante.

Solution de l'exercice 6 En posant $y = 1$ on a $f(x+1) = f(x)+1$. Une récurence immédiate montre que $f(x+n) = f(x)+n$ pour tout n entier. Comme $P(1) = 2$, $f(m) = m+1$ pour tout entier m. Soit $x = \frac{m}{n}$ un rationnel. En posant $y = n$ ddans l'équation de l'énoncé on a $f(m) = f(x)f(n) - f(x+n) + 1$. Or $f(x+n) = f(x) + n$, donc $f(x) = \frac{m}{n} = x$.