DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Intermédiaires
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Antoine TAVEVEAUX
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Dénombrement, graphes

Ces notes de cours ne sont pas exhaustives et ne comportent pas les preuves. Ils ont pour but de servir d'aide-mémoire aux élèves ayant suivis le cours.

Apprendre à compter

- Opérations ensemblistes -

Pour compter les éléments d'un ensemble il peut être utile de simplifier le problème en sous-problèmes plus simples, ou de regarder les éléments qui ne sont justement pas dans l'ensemble considéré. On notera dans toute la suite $\mathrm{Card}(A)$ le cardinal de A, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble A. Voici quelques idées utiles pour faire de telles décompositions.

Proposition 1. Pour toutsensembles finis A et B, on a :

– On a $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$
– On a $\mathrm{Card}(A \cup B) \leqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$ et plus précisément :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

– Plus généralement le **principe d'inclusion exclusion** nous apprend que si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{Card}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

– Si A est un sous-ensemble d'un ensemble fini E alors le complémentaire de A dans B est l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A, si on le note A^C, on a :

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A^C)$$

- Le comptage par bijection -

Pour dénombrer les éléments d'un ensemble, il peut-être plus simple de voir les objets de cet ensemble comme d'autres objets plus simples à compter.

Attention :

– Il faut que pour chaque objet de l'ensemble de départ il n'existe qu'un seul élément dans les objets simples à dénombrer.
– À l'inverse, il faut faire attention à ce que pour chaque élément facile à dénombrer il existe un et un seul élément de l'ensemble de départ qui lui soit associé.

Si vous avez seulement la première propriété alors vous pouvez seulement dire que le cardinal de l'ensemble de départ est plus petit que le cardinal des objets facile a dénombrer. A l'inverse le second point vous assure que la cardinal que l'ensemble de départ est plus grand que celui de l'ensemble des objets facile à compter.

Exercice 1 Quel est le plus petit nombre de poids nécessaires pour mesurer un nombre arbitraire de grammes de 1 a 1000 en se servant d'une balance à bascule (on peut mettre des poids sur n'importe lequel des plateaux de la balance) ?

Exercice 2 Déterminer les entiers n tel qu'il y ait un nombre impair d'entiers (x, y) telles que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

- Des sous-ensembles -

En combinatoire il est très important de savoir compter le nombre de sous-ensembles d'un ensemble (dans différents sens). Nous récapitulons ici quelques résultats provenant de cette idée :

– De façon simple, le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n.

– Le nombre de sous ensemble contenant k éléments dans un ensemble à n éléments est
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
– Le nombre de k-uplet (on regarde l'ordre des éléments) d'un ensemble à n élément.

Le formule du triangle de Pascal permet de calculer par récurrence les coefficient binomiaux :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

Et les coefficients binomiaux sont aussi être tuiles dans le calcul du binôme de Newton :
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
Exercice 3 Soient n et k, deux nombres entiers naturels. De combien de façons est-il possible de choisir k nombres entiers naturels $i_1, i_2, ..., i_k$ tels que $i_1 + i_2 + ... + i_k = n$?

Exercice 4 Un ticket comporte six chiffres a, b, c, d, e, f. Ce ticket est dit "heureux" si $a + b + c = d + e + f$. Combien y a t'il de tickets heureux (le ticket 000000 y compris) ?

Graphes

Nous ne présenterons pas les résultats sur les graphes car ils reprennent le polycopié sur les graphes du site d'Animath.
Exercice 5 Un graphe est connexe quand on peut toujours passer d'un sommet a un autre en passant par un nombre fini d'arêtes. Prouver qu'un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

Exercice 6 On donne $2n$ points dans l'espace. On trace au total n^2+1 segments entre ces points. Montrer qu'il y a au moins un ensemble de trois points reliés deux à deux. Le résultat est-il toujours vrai pour n^2 arêtes ?

Exercice 7 Prouver que dans tout groupe de 50 personnes, il en existe toujours au moins deux qui ont un nombre pair (éventuellement nul) de connaissances communes dans le groupe (la relation "se connaitre" est considérée comme réciproque, et Hélas !, on ne se connaît jamais soi-même).

Solutions des exercices

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Nous allons montrer que le plus petit nombre de poids est 7. D'abord, on remarque que 6 poids ne suffisent pas. En effet, pour tout poids, il n'y a que trois possibilités, on peut le mettre sur l'un des deux plateaux ou nul part. Donc on a 3^6 possibilités de pesés au plus, mais comme $3^6 = 729 < 1000$, 6 poids ne suffisent pas. Maintenant on écrit un nombre $n \leqslant 1000$ dans un système triadique de la forme :

$$n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + a_1 3 + a_0$$

avec $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ et on remarque que tout nombre $n \leqslant 1000$ peut s'écrire de cette façon,avec $k \leqslant 6$, puisque : $3^6 + 3^5 + \cdots + 1 = \frac{1}{2}(3^7 - 1) > 1000$. Il suffit alors de se munir de poids de $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots 3^6$ grammes. Pour peser un nombre n, on le met sur un plateau et on met le poids 3^i sur le même plateau si $a_i = -1$, sur l'autre si $a_i = 1$ et en dehors de la balance si $a_i = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> L'équation se re-écrit :

$$(x - n)(y - n) = n^2$$

Il y a donc autant de soltions que de diviseur de n. Pour chaque diviseur a de n on peut associer un autre diviseurs n/a, ce diviseur est toujours différent si et seulement si n n'est pas un carré. Donc n a un nombre pair de diviseurs si et seulement si n n'est pas un carré. Donc l'équation précédente a un nombre impair de solutions si et seulement si n est un carré.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> L'idée consiste à transformer légèrement le problème. On considère une série de $n + (k - 1) = n + k - 1$ cases dans lesquelles on va placer $k-1$ cubes délimiteurs. A chacune de ces configurations correspond une somme : i_1 est le nombre de cases avant le premier cube délimiteur et le nombre i_k est le nombre de case entre le $k - 1^{\text{ème}}$ délimiteur et la fin du casier. Réciproquement, pour chaque somme, il existe un seul arrangement des cases et des blocs délimiteurs.

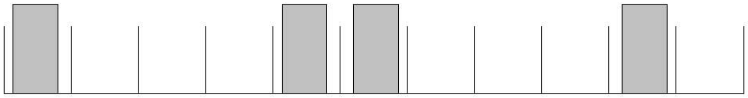

FIGURE 1 – Un exemple pour $n = 7$ et $k = 5$, la somme correspondante est $7 = 0+3+0+3+1$

Ainsi il y a autant de sommes de k nombres dont la somme est n que de choix de $k-1$ cases parmi $n+k-1$. Il y a donc $\binom{n+k-1}{k-1}$ sommes possibles.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> À tout nombre heureux $abcdef$, on fait correspondre un nombre $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ où $\bar{d} = 9-d$, $\bar{e} = 9-e$ et $\bar{f} = 9-f$, la somme des chiffres $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ est 27. De plus on remarque que à chaque nombre heureux $abcdef$ il correspond un nombre $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ et à tout nombre dont la somme des chiffre est 27 on peut faire correspondre un nombre heureux. Ainsi il suffit de compter les nombres dont la somme des chiffres est 27, c'est-à-dire qu'on cherche à dénombrer le nombre de sommes $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 27$, où $0 \leqslant a_i \leqslant 9$. Ce nombre est $\binom{27+5}{5} - 6\binom{22}{5} + 15\binom{12}{5} = 55252$, cette somme provient du principe d'inclusion-exclusion, le premier terme est le nombre de somme $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 27$ sans restrictions sur la valeurs de a_i (voir l'exercice précédent), le second le nombre de somme où au moins un terme est plus grand que 10 (on choisi un des 6 termes d'une somme égale à 22 et on ajoute 10 à ce terme 10) et enfin le dernier correspond aux somme avec au moins deux termes supérieur à 10.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Nous allons raisonner par récurrence sur n sur la propriété de l'énoncé. Pour $n = 1$ et $n = 2$ la propriété est claire. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe de n sommets possède au moins $n-1$ arêtes. Soit alors G un graphe connexe à $n+1$ sommets. Soit a le nombre d'arêtes de G. Notons que la connexité assure que chaque sommet est de degré au moins 1.

– Si tous les sommets ont un degré supérieur à 2, alors la somme des degrés de tous les sommets est au moins $2n$ et donc il y a au moins n arêtes (car le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par 2).
– Sinon il y a un sommet A de degré 1. Alors si on retire A et son arête du graphe G on obtient un graphe connexe G' qui possède n sommets et donc par hypothèse de récurrence $n-1$ arêtes donc G avait n arêtes.

Solution de l'exercice 6 On va démontrer la contraposée : tout graphe à $2n$ points et sans triangle a au plus n^2 arêtes. Le résultat est clair pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour un graphe à $2n$ points et montrons qu'il est vrai pour $2n+2$ points. Soit G un graphe à $2n+2$ points sans triangles complets. Choisissons alors deux sommets A et B de G reliés par une arête. En oubliant A et B et toutes les arêtes reliées à A ou B on obtient un graphe G' à $2n$ points et sans triangles. Par hypothèse de récurrence, G' a au plus n^2 arrêtes. Combien d'arêtes peut avoir G ? Comme tout sommet C de G' ne peut pas avoir à la fois une arête vers A et une vers B (sinon G aurait le triangle ABC), le nombre d'arêtes de A ou de B vers G' est au plus $2n$. Donc, sans oublier l'arête AB elle-même, G a au plus $n+1$ arêtes de plus que G', donc au plus $n^2+2n+1 = (n+1)^2$ arêtes. De plus il est facile de montrer que ce résultat est optimal. Si on partage les sommets en deux ensembles P et Q de n points chacun et qu'on relie chaque point de P à tous les éléments de Q par une arête. On a bien un graphe avec $2n$ sommet et n^2 arêtes.

Solution de l'exercice 7 Considérons le graphe G de connaissances (chaque sommet est une personne et il y a une arête entre eux si et seulement si ils se connaissent). On appelle "lien" un chemin de longueur 2. Le problème consiste donc à prouver que deux personnes sont reliées par un nombre pair de liens. On suppose par l'absurde que deux sommets quelconques sont toujours reliés par un nombre impair de liens. Soit M un sommet arbitraire. On répartit alors les autres sommets en deux groupes : le groupe $\mathcal{A}$ ceux qui sont adjacents à M et le groupe $\mathcal{B}$ de ceux qui ne le sont pas. Alors, chaque sommet $A \in \mathcal{A}$ n'a pas de lien avec M que via un autre sommet de $\mathcal{A}$. Il en découle que dans le graphe induit par $\mathcal{A}$, ce sommet a est de degré impair. Ceci étant vrai pour chaque $A \in \mathcal{A}$, il faut donc que $\mathcal{A}$ contienne un nombre pair de sommets et M a un degré pair (car la somme des degrés des sommets est toujours paire). Comme M a été choisi arbitrairement, on en déduit que chaque sommet de G est de degré pair. Reconsidérons le sommet M. D'après ce qui précède, chaque sommet $A \in \mathcal{A}$ est de degré pair, est adjacent à M, et il y a un nombre impair de sommets qui lui sont adjacents dans $\mathcal{A}$. Il doit donc avoir un nombre pair de sommets qui lui sont adjacents dans $\mathcal{B}$. Par suite, le nombre total d'arêtes qui relient un sommet de $\mathcal{A}$ et un sommet de $\mathcal{B}$ est pair. Enfin, tout sommet de $\mathcal{B}$ n'a de liens s avec M que via un sommet de $\mathcal{A}$. Donc, il doit être adjacent à un nombre impair de sommets de $\mathcal{A}$. Par suite, $\mathcal{B}$ doit lui aussi contenir un nombre pair de sommets. Mais alors $\text{card}(\mathcal{A}) + \text{card}(\mathcal{B}) + 1$ est impair, et ne peut donc pas être égal à 50.