DOMAINE : Non olympique
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours

AUTEUR : Matthieu LEQUESNE
STAGE : Montpellier 2014

Dénombrabilité

– Introduction –

Y a-t-il moins de nombres pairs que d'entiers dans $\mathbb{N}$? Y a-t-il plus de réels dans $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$?

Intuitivement, il y a autant de droites qui passent au dessus de la première bissectrices que de droites qui passent en dessous. Pourtant ces droites sont paramétrées pas $y = ax$ avec $a \in]0;1[$ en dessous et $y \in]1;+\infty[$ au dessus...

Comment comparer le nombre d'éléments d'ensembles infinis ? Cette question a été étudiée par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918).

Définition 1. Une fonction $f : A \to B$ est **injective** si $\forall (x,y) \in A^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Définition 2. Une fonction $f : A \to B$ est **surjective** si $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$.

Définition 3. Une fonction $f : A \to B$ est **bijective** si elle est injective et surjective, *ie.* $\forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y$.

Définition 4. On dit que deux ensembles A et B sont **équipotents** s'il existe une bijection entre A et B.

Exemple 5. $[|1,n|]$ et $[|n+1,2n|]$ sont équipotents.

Exemple 6. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents.

Exemple 7. $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ sont équipotents.

Exemple 8. $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ sont équipotents.

Exemple 9. $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ sont équipotents.

Définition 10. On dit qu'un ensemble A est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[|1, n|]$.

Définition 11. On dit qu'un ensemble est infini s'il n'est pas fini.

Proposition 12. "A est infini" $\Leftrightarrow$ "Il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A."

– Dénombrabilité –

Définition 13. On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, *ie.* s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$.

Exemple 14. $\mathbb{N}^*, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1$, l'ensemble des nombres premiers

Proposition 15. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition 16. $\mathbb{Z}$ est dénombrable

Proposition 17. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

Corollaire 18. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Corollaire 19. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Proposition 20. Produit de deux dénombrables est dénombrable

Corollaire 21. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^k$ est dénombrable.

Proposition 22. Produit fini de dénombrables est dénombrable

Proposition 23. Union dénombrable de dénombrables est dénombrable

Corollaire 24. L'ensemble des polynômes à coefficients entiers $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.

Corollaire 25. L'ensemble des mots sur un alphabet fini est dénombrable.

– Ensembles non dénombrables –

Proposition 26. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire 27. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire 28. Un produit dénombrable d'ensemble dénombrables n'est pas dénombrables.

Définition 29. On dit qu'un ensemble a **la puissance du continu** s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Théorème 30. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. (Cantor)

Corollaire 31. L'ensemble des irrationnels n'est pas dénombrable.

Exemple 32.]0,1[et $\mathbb{R}$ sont equipotents.

Proposition 33. $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

Corollaire 34. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

Définition 35. On dit qu'un nombre est **algébrique** s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Exemple 36. $\frac{3}{4}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont algébriques.

Corollaire 37. L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Définition 38. Un nombre réel non-algébrique est dit **transcendant**.

Théorème 39. Il existe des nombres transcendants. (Liouville)

Exemple 40. π (Lindemann 1882), e (Hermite 1873), $\ln(2)$ (Hardy et Wright 1979), $\sin(1)$ (idem).

Remarque 41. Il n'est pas encore prouvé que $e+\pi$ et $e\pi$ sont transcendants.

Remarque 42. Paradoxalement, la "plupart" des réels sont transcendants mais on en connaît peu.

– Cantor Bernstein –

Théorème 43. S'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A alors A et B sont équipotents.

Corollaire 44. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

– Notion de densité –

Définition 45. On dit qu'une partie A de X est **dense** dans X si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Théorème 46. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 47. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.