DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Theresia EISENKÖLBL
STAGE : Montpellier 2012

Inégalités

- Énoncés -

Exercice 1 (Moyenne arithmétique - moyenne géométrique, 2 variables) Soient $x, y \geqslant 0$.

Montrer que

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Exercice 2 Soit $x > 0$. Montrer que

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Pour quels x a-t-on égalité ?

Exercice 3 Déterminer les x réels tels que

$$x^2 + 2x + 2 > 0.$$

Exercice 4 Déterminer les x réels tels que

$$x^2 + 3x + 2 > 0.$$

Exercice 5 (Inégalité moyenne arithmétique - moyenne harmonique) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$? Montrer que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots \frac{1}{x_n}}.$$

Exercice 6 (Cauchy-Schwarz) Soient $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots y_n^2}.$$

Exercice 7 Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$3^n > n^2 - 2n + 91$$

Exercice 8 Montrer que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Exercice 9 (Inégalité moyenne arithmetique - moyenne géométrique) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Montrer que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Exercice 10 (Inégalité de Nesbitt) Soient $a, b, c \geqslant 0$. Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercice 11 Trouver $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ tq $x_1 + \ldots x_n = 1$ et $x_1^1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n$ est maximal.

- Corrigé -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Cette inégalité est équivalente à

$$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

Or, un carré est toujours positif. Le cas d'égalité est obtenu exactement pour $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, c.à.d. pour les valeurs $x = y$.

Solution de l'exercice 2 Cette inégalité est équivalente à $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$.

Donc, l'égalité est obtenue pour $x=\frac{1}{x}$, c.à.d. pour $x=1$.

Solution de l'exercice 3 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1>0$.

Solution de l'exercice 4 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

Ce produit est strictement positif si et seulement si les deux facteurs ont le même signe, c.à.d., pour $x<-2$ et pour $x>-1$.

Solution de l'exercice 5 En utilisant l'inégalité de Exercice 2, on trouve :

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\dots\frac{1}{x_n}\right)\\
&\quad=\frac{x_1}{x_1}+\frac{x_2}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_n}\\
&\quad+\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)+\cdots+\left(\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\\
&\quad\geqslant 1+1+\cdots+1+2+2+\cdots+2\\
&\quad=1\cdot n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n+n^2-n=n^2
\end{aligned}$$

Cas d'égalité : $\frac{x_i}{x_j}=1, \forall i,j$, donc $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Solution de l'exercice 6

$$(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\dots y_n^2)-(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqslant 0.$$

Cas d' égalité : Les vecteurs $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $(y_1,y_2,\dots y_n)$ sont proportionnels.

Solution de l'exercice 7 Si l'inégalité est vraie, on a $3^n>(n-1)^2+90\geqslant 90>81=3^4$, donc $n>4$.

On peut montrer cette inégalité à partir de $n=5$ par récurrence.

Solution de l'exercice 8 On peut montrer par recurrence que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

Solution de l'exercice 9 *Si l'inégalité est vraie pour n, elle est vraie pour $2n$*

On applique le cas n deux fois aux variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et aux variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$. Après, on applique le cas $n = 2$, qu'on a deja montré dans l'exercice 1

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (x_{n+1} + \dots x_{2n})}{2n} &= \frac{\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \dfrac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2} \\
&\geqslant \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}}{2} \\
&\geqslant \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\,\sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}
\end{aligned}$$

Si l'inégalité est vraie pour $n \geqslant 2$, elle est vraie pour $n - 1$

Conclusion

Solution de l'exercice 10 Cette inégalité est équivalente à

$$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

Or, un carré est toujours positif. Le cas d'égalité est obtenu exactement pour $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, c.à.d. lorsque $x = y$.