DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Irène MARCOVICI
STAGE : Montpellier 2012

Invariants, Inclusion-exclusion

- Les invariants -

Le principe des invariants est assez vague, c'est plutôt une méthode qu'un énoncé mathématique précis.

PRINCIPE DES INVARIANTS - Si une quantité est conservée par certaines transformations, alors il est impossible de passer d'une situation à une autre où la quantité est différente en utilisant seulement ces transformations.

Nous avons déja utilisé ce principe pour l'exercice des dominos. Si on enlève une case à un échiquier de taille 8×8, on ne peut pas le paver avec des dominos de taille 1×2 car le nombre initial de cases à paver (63) est impair, et lorsqu'on pose un domino, cela ne change pas la parité du nombre de cases restant à paver. Pour montrer que si on enlève deux cases situées à des coins opposés de l'échiquier, on ne peut pas non plus le paver avec des dominos, nous avons également utilisé le principe des invariants : un domino recouvre toujours une case blanche et une case noire de l'échiquier, donc si le nombre de cases blanches n'est pas égal au nombre de cases noires, impossible de paver la zone avec des dominos.

Nous allons voir d'autres exemples d'utilisation d'invariants. Commençons tout doucement.

Exercice 1 Une feuille de papier est déchirée en trois parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en trois parties, et ainsi de suite. Peut-on obtenir, en fin de compte, un total de cent parties ?

Exercice 2 On considère le tableau de signes suivant :

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & + \\ - & - & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}$$

On répète plusieurs fois l'opération qui consigne à choisir une ligne ou une colonne et à en changer tous les signes en leurs opposés. Est-il possible d'atteindre un tableau constitué seulement de signes $-$?

Exercice 3 Est-il possible de répartir les entiers $1, 2, \dots, 33$ en 11 groupes disjoints de trois éléments chacun, de sorte que dans chaque groupe, l'un des éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 4 On écrit les nombres $1, 2, 3, \dots, 2013$ sur une feuille de papier, puis on choisit deux nombres quelconques qu'on efface et on les remplace par leur différence. Est-il possible que le dernier nombre restant soit 2 ?

Exercice 5 Sur une île vivent 34 caméléons, qui peuvent prendre 3 couleurs : jaune, rouge et vert. Au début 7 sont jaunes, 10 rouges et 17 verts. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent simultanément la troisième couleur. Il se trouve qu'au bout d'un certain temps, tous les caméléons de l'île ont pris la même couleur. Quelle est cette couleur ? (Il faut en particulier montrer que c'est la seule possible.)

Exercice 6 A partir d'un triplet (a, b, c), on peut effectuer l'opération suivante :

– On choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y
– On remplace x par $(x-y)/\sqrt{2}$ et y par $(x+y)/\sqrt{2}$, en laissant le troisième nombre inchangé.

Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

Exercice 7 On écrit les nombres $1, 2, 3, \dots, 100\,000$ sur une feuille de papier, puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres, et ainsi de suite, jusqu'à ce que chaque nombre ne soit constitué que d'un seul chiffre. Quel est le chiffre le plus fréquent de la liste obtenue ?

- **Comptage et inclusion-exclusion** -

PRINCIPE D'INCLUSION-EXCLUSION - On note $|A|$ le nombre d'objets d'un ensemble A. Si A, B, C sont des ensembles, alors on a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Pour démontrer ces formules, le plus simple est de dessiner des patates !

Exercice 8 Combien y a t-il de nombres à moins de quatre chiffres (de 0 à 9999) qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?

Exercice 9 Un cube $20 \times 20 \times 20$ est divisé en 8000 cubes unités. On écrit un nombre dans chaque cube unité. Dans chaque ligne et dans chaque colonne de 20 petits cubes, parallèle à une des arêtes du cube, la somme des nombres fait 1. Dans un des petits cubes, le nombre écrit est 10. Par ce petit cube passent trois couches $1 \times 20 \times 20$ parallèles aux faces du cube. Trouver la somme de tous les nombres en dehors de ces trois couches.

- Solution des exercices -

Solution de l'exercice 1 L'invariant est simplement la parité du nombre de morceaux. A chaque étape, le nombre total de morceaux augmente de 2. Comme il vaut 1 au début, on ne peut atteindre 100.

Solution de l'exercice 2 L'invariant est la parité du nombre de $-$. Si dans la ligne ou colonne choisie, il y a n signes $-$, alors après inversion des signes, il y en a $4 - n$. Et $4 - n$ a même parité que n. Or, il y a initialement 3 signes $-$, donc le nombre de signes $-$ reste impair : il ne sera jamais égal à 16.

Solution de l'exercice 3 Dans un groupe donné (x, y, z), l'un des nombres, mettons z, est égal à la somme des deux autres. Donc la somme des trois nombres, qui vaut $x + y + z = x + y + (x + y) = 2 * (x + y)$ est paire. S'il était possible d'effectuer une telle répartition, la somme totale des nombres de 1 à 33 serait donc paire, puisqu'elle pourrait se décomposer en la somme de 11 nombres pairs. Or, $1 + 2 + 3 + \ldots + 33 = 33 \times 34/2 = 33 \times 17$, c'est un nombre impair.

Solution de l'exercice 4 Un invariant est ici la parité du nombre de nombres impairs de la liste. Si les nombres x et y choisis sont tous les deux impairs, le nombre de nombres impairs diminue de 2. Dans les autres, cas, on vérifie qu'il ne change pas. Donc la parité du nombre de nombres impairs de la liste est conservée. Il y a initialement 1007 nombres impairs écrits, donc le dernier nombre de peut pas être 2.

Solution de l'exercice 5 La configuration initiale est $(7J, 10R, 17V)$. On commence par constater que les caméléons peuvent être tous verts : c'est le cas si les 7 jaunes rencontrent des caméléons rouges, on passe alors à $(0J, 3R, 31V)$. Puis un rouge rencontre un vert : $(2J, 2R, 30V)$. Et enfin, les 2 jaunes et les 2 rouges se rencontrent : $(0J, 0R, 34V)$. Il reste à montrer que le vert est la seule couleur pour laquelle c'est possible.

Si x, y, z sont respectivement les nombres de caméléons jaunes, rouges et verts, le reste dans la division euclidienne de $y - x$ par 3 est un invariant. En effet, selon les rencontres, on passera de (x, y, z) à $(x + 2, y - 1, z - 1)$, à $(x - 1, y + 2, z - 1)$ ou à $(x - 1, y - 1, z + 2)$. Dans le dernier cas, la différence entre le nombre de caméléons rouges et le nombre de caméléons jaunes ne change pas. Dans les deux premiers cas, elle diminue ou augmente de 3. Or au départ, cette différence est un multiple de 3, donc c'est vrai à toute étape. Comme 34 n'est pas un multiple de 3, si tous les caméléons sont unis, ils sont forcément verts.

Solution de l'exercice 6 Ici, un invariant est donné par $a^2+b^2+c^2$. Or on constate que la somme des carrés n'est pas la même pour les deux triplets, donc on ne peut pas passer de l'un à l'autre avec la transformation indiquée.

Solution de l'exercice 7 Il s'agit ici de remarquer que pour tout entier n la somme des chiffres de n est congrue à n modulo 9. La suite obtenue est donc périodique : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, \dots$ et on termine par un 1, c'est donc lui qui apparaît le plus souvent.

Solution de l'exercice 8 On définit A comme l'ensemble des nombres divisibles par 3, B comme l'ensemble des nombres divisibles par 5 et C comme l'ensemble des nombres divisibles par 7. Le résultat demandé vaut $10\,000 - |A \cup B \cup C|$. Il ne reste qu'à appliquer la formule d'inclusion-exclusion, en constatant que $A \cap B$ est l'ensemble des nombres divisibles par 15, etc. Si on ne se trompe pas, on tombe sur 4571.

Solution de l'exercice 9 Calculons la somme sur l'union des trois couches en utilisant le principe d'inclusion-exclusion. On obtient $20 + 20 + 20 - 1 - 1 - 1 + 10 = 67$. La somme de tous les nombres du cube vaut 400. Le résultat final est donc $400 - 67 = 333$.