DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Margaret BILU
STAGE : Montpellier 2014

Stratégies de base : exercices

1 Exercices

Exercice 1 30 équipes participent à un tournoi de maths. Chaque équipe dispute au plus un match contre chacune des autres équipes. Montrer qu'à tout moment du tournoi, il existe toujours deux équipes ayant disputé le même nombre de matchs.

Exercice 2 Les nombres 1 à 20 sont écrits au tableau. Une opération consiste à en effacer deux, disons a et b, et écrire $a + b - 1$. Que peut-il y avoir écrit au tableau au bout de 19 telles opérations ?

Exercice 3 Dans un polygone convexe à $n \geqslant 4$ sommets on trace des diagonales de sorte que deux quelconques d'entre elles ne s'intersectent pas (sauf peut-être aux extrémités). Montrer qu'il existe deux sommets non adjacents du polygone dont ne part aucune diagonale.

Exercice 4 6 enfants sont assis autour d'une table ronde. Au départ, deux d'entre eux, séparés d'une personne, ont chacun un bonbon, les autres n'ont ayant aucun. Ils jouent à un jeu tel que à chaque coup du jeu, deux enfants assis côte à côté récupèrent chacun un bonbon. A la fin du jeu, se pourrait-il que tous les enfants aient le même nombre de bonbons ?

Exercice 5 Dans une salle de classe, il y a 7 rangées de 10 places. Un groupe de 50 stagiaires Animath y a cours le matin et l'après-midi. Montrer qu'il existe deux personnes ayant été assises dans la même rangée aussi bien le matin que l'après-midi.

Exercice 6 Il y a 25 élèves dans une classe. Parmi 3 quelconques d'entre eux, il y en a toujours au moins deux qui sont amis (la relation d'amitié étant réciproque). Montrer qu'il existe un élève ayant au moins 12 amis.

Exercice 7 Parmi les nombres 1 à $2n$, on en a choisi $n+1$. Montrer que parmi les nombres choisis, il en existe deux tels que le premier divise le deuxième.

Exercice 8 On se donne 7 droites dans le plan, deux quelconques d'entre elles n'étant jamais parallèles. Montrer qu'il en existe deux tel que l'angle qu'elles forment soit inférieur ou égal à $26°$.

Exercice 9 On dispose de 2014 points dans le plan tels que parmi trois quelconques d'entre eux il y en a toujours deux à distance inférieure ou égale à 1. Montrer qu'on peut recouvrir tous les points par deux disques fermés de rayon 1.

Exercice 10 Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers naturels non nuls tels que pour tout i, $a_i \leqslant i$, et tels que leur somme $a_1 + \dots + a_n$ soit paire. Monter qu'il existe un choix de signes dans l'expression

$$a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$$

tel que le total fasse 0.

Exercice 11 A un stage Animath, il se trouve que si deux élèves connaissent le même nombre d'élèves, alors il n'ont aucune connaissance en commun. Montrer qu'il existe alors un élève qui connaît exactement un seul autre élève.

Exercice 12 Dans un tableau 15×15, on relie les centres de certaines cases adjacentes par des segments, de sorte à obtenir une ligne fermée qui ne s'intersecte pas elle-même et qui est symétrique par rapport à l'une des grandes diagonales. Montrer que la longueur de la ligne est inférieure ou égale à 200.

Exercice 13 On écrit au tableau les nombres $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Une opération consiste à effacer deux nombres, disons a et b, et a écrire $a + b + ab$. Quel nombre reste-t-il après $n-1$ opérations ?

Exercice 14 On considère un point P à l'intérieur d'un polygône à $2n$ sommets, et on trace tous les droites passant par P et par un sommet du polygone. Montrer que l'un des côtés du polygone n'est intersecté par aucune de ces droites.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1 A tout instant, chaque équipe a disputé entre 0 et 29 matchs, ce qui fait exactement 30 possibilités. Supposons qu'à un moment donné, il n'existe pas deux équipes ayant disputé le même nombre de matchs.

Alors il existe une équipe qui en disputé 0, et une autre qui en a disputé 29. Cette dernière a joué avec tout le monde, donc en particulier aussi avec celle qui a disputé 0 matchs, contradiction.

Solution de l'exercice 2 La somme totale des nombres écrits au tableau diminue de un à chaque coup. Au bout de 19 opérations elle est donc de $1+\ldots+20-19 = 10 \times 21 - 19 = 191$. Au bout de 19 opérations, il ne reste qu'un nombre au tableau, et ce nombre sera 191.

Solution de l'exercice 3 Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de sommets. Pour $n = 4$ c'est clair. Supposons que ce soit vrai pour tous les polygones à n sommets, et considérons un polygone à $n + 1$ sommets. Si aucune diagonale n'a été tracée, on a fini. Sinon, choisissons l'une des diagonales tracées, et appelons A et B ses extrémités. Elle coupe le polygone en deux polygones convexes de strictement moins de $n + 1$ sommets, et chaque autre diagonale choisie appartient à seulement un de ces deux polygones, vu qu'elle ne peut intersecter la diagonale $[AB]$. Si l'un de ces deux polygones est un triangle, on a déjà un sommet non utilisé et il reste à en trouver un autre. Par hypothèse de récurrence, dans chacun de ces deux polygones s'il n'y a pas de triangle (ou alors seulement dans le polygone qui n'est pas un triangle), il existe deux sommets non adjacents non utilisés. Or A et B sont des sommets adjacents dans chacun de ces deux « petits »polygones. Donc par le principe des tiroirs, dans chaque « petit »polygone, il existe au moins un sommet non utilisé différent de A et B, et donc aussi non utilisé dans le grand polygone.

Solution de l'exercice 4 On numérote les enfants de 1 à 6, et on suppose sans perte de généralité que les enfants 1 et 3 sont ceux qui ont un bonbon au départ. A chaque tour, il y a un enfant parmi $1, 3, 5$, et un enfant parmi $2, 4, 6$ qui gagne un bonbon. La différence entre le nombre de bonbons possédés par les enfants de numéros impairs et le nombre de bonbons possédés par les enfants de numéros pairs ne change donc pas. Or au début elle vaut 2, et si à un moment tous les enfants ont le même nombre de bonbons, elle vaut 0, contradiction.

Solution de l'exercice 5 Le matin, il y avait au moins une rangée avec 8 personnes. En effet, sinon, il y aurait eu au plus 7 personnes par rangée, et donc au plus $7 \times 7 = 49$ personnes dans la salle. Considérons donc 8 personnes ayant été dans la même rangée le matin. Puisqu'il n'y a que 7 rangées, il y en a nécessairement deux qui vont encore se retrouver dans la même rangée l'après-midi.

Solution de l'exercice 6 On raisonne par l'absurde, en supposant que tout le monde a strictement moins de 12 amis. Soit A un élève : comme il a au plus 11 amis, il y a au moins 13 personnes qui ne sont pas amies avec lui. Soit B l'une de ces personnes. Alors B est ami avec les personnes qui ne sont pas amies avec A, qui sont au moins au nombre de 12, contradiction.

Autre méthode : Si tout le monde est ami avec tout le monde, on a fini. Sinon, soient A et B des personnes qui ne sont pas amies. Alors chacune des 23 autres personnes est amie avec A ou B. Par principe des tiroirs, au moins l'un des deux a 12 amis.

Solution de l'exercice 7 On va raisonner par récurrence sur n. Si $n = 1$, la conclusion est claire. Supposons que ce soit vrai pour n, et considérons un choix de $n+2$ nombres $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+2}$ dans l'ensemble $\{1, \ldots, 2n+2\}$. Si $a_{n+2} \leqslant 2n+1$, alors les $n+1$ nombres $a_1, \ldots a_{n+1}$ sont en fait inclus dans l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$, et on peut conclure par hypothèse de récurrence. Nous pouvons donc supposer que $a_{n+2} = 2n+2$ et que parmi $a_1, \ldots, a_n$, on ne peut en trouver deux se divisant l'un l'autre. Si $n+1 \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, on a fini car $n+1$ divise $2n+2 = 2(n+1)$. Sinon, cela veut dire que l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n, n+1\}$ est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 2n\}$ de cardinal $n+1$, donc deux de ses éléments se divisent l'un l'autre par hypothèse de récurrence. Vu ce qu'on a supposé sur $a_1, \ldots, a_n$, l'un de ces éléments est nécessairement $n+1$. Or il n'y a aucun multiple de $n+1$ dans $\{1, \ldots, 2n\}$ autre que lui-même, donc l'autre nombre est forcément un diviseur de $n+1$. Il existe donc un diviseur de $n+1$, et par là de $a_{n+2} = 2n+2$, dans l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8 On choisit un point A du plan, et pour chacune des 7 droites, on trace la droite qui lui est parallèle et qui passe par A. Ainsi, on ne change pas les angles entre les droites, et on voit que les droites forment 14 angles de sommet A et de somme 14. Il y en a donc au moins un inférieur ou égal à $\frac{360}{14} = \frac{180}{7} = 25 + \frac{5}{7} \leqslant 26$ degrés.

Solution de l'exercice 9 Soient A et B des points qui sont à distance maximale. S'ils sont à distance inférieure ou égale à 1, c'est que tous les points sont à distance inférieure égale à 1, et en particulier ils sont à distance $\leqslant 1$ de A, donc dans ce cas le disque fermé de centre A et de rayon 1 suffit. Sinon, A et B étant à distance > 1, chaque autre point est à distance $\leqslant 1$ d'au moins l'un des deux points A et B. Ainsi, les deux disques de centres A et B et de rayon 1 conviennent.

Solution de l'exercice 10 On va raisonner par récurrence double sur n. Pour $n =$

1 il n'y a rien à vérifier. Pour $n = 2$, on a nécessairement $a_1 = a_2 = 1$, d'où le résultat. Supposons que la conclusion soit vraie pour tous les entiers inférieurs ou égaux à un certain n, et considérons des entiers $a_1, \ldots a_{n+1}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Si on a $a_n = a_{n+1}$, la somme $a_1 + \ldots + a_{n-1}$ est paire, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux entiers $a_1, \ldots, a_{n-1}$. En combinant le choix de signes obtenu avec $+a_n - a_{n+1}$ on a le résultat. Supposons donc maintenant que $a_n \neq a_{n+1}$, et considérons la suite $a_1, \ldots, a_{n-1}, |a_n - a_{n+1}|$ (la valeur absolue est là afin que le dernier élément de la suite soit un entier naturel non nul). La somme des éléments de cette suite est de même parité que $a_1 + \ldots + a_{n+1}$. De plus, puisque $1 \leqslant a_n \leqslant n$ et $1 \leqslant a_{n+1} \leqslant n + 1$, on a $|a_n - a_{n+1}| \leqslant n$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à cette suite, pour obtenir un choix de signes annulant l'expression

$$a_1 \pm a_1 \pm \ldots \pm a_{n-1} \pm |a_n - a_{n-1}|$$

. On adapte le dernier signe selon si $|a_n - a_{n-1}|$ est égal à $a_n - a_{n-1}$ ou à $a_{n+1} - a_n$ pour conclure.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Soit A le stagiaire qui connait le plus de monde, et soit k le nombre de personnes qu'il connaît. Alors chaque personne qui le connaît connaît entre 1 et k personnes. Or deux personnes connaissant A ont une connaissance en commun, il ne peuvent donc pas connaître le même nombre de personnes. Ainsi, parmi les personnes connaissant A, pour tout i entre 1 et k, il existe une personne connaissant exactement i personnes.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> La ligne passe nécessairement par une case de la diagonale qui sert d'axe de symétrie, appelons-la A. On parcourt la ligne dans un sens à partir de A, jusqu'à tomber sur un second point de la diagonale, que l'on appelle B. Par symétrie, si on la parcourt dans l'autre sens à partir de A, c'est en B qu'on recroisera pour la première fois la diagonale. Ainsi, vu que la ligne est fermée, elle n'intersecte la diagonale qu'en A et B, il y a donc 13 cases non atteintes sur la diagonale.

Colorions maintenant le tableau en noir et blanc comme un échiquier, et supposons que la diagonale en question soit noire. La ligne traverse autant de cases blanches que de cases noires. Il y a $\frac{15^2+1}{2} = 113$ cases noires, donc au plus 100 cases noires sont atteintes. La ligne parcourt donc au plus 200 cases, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> On remarque que $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$. Si les nombres écrits au tableau à une certaine étape sont $a_1, \ldots, a_n$, cela suggère de

considérer le produit $(a_1+1)\dots(a_k+1)$, qui sera invariant d'une opération à l'autre. Au début, il vaut

$$(1+1)\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{n}+1\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}=n+1,$$

la dernière égalité étant obtenue par télescopage. Donc le nombre restant est n.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Nous allons distinguer deux cas. Si P appartient à une diagonale du polygone, il ne reste plus que $2n-2$ droites pour $2n$ côtés à intersecter, donc on peut conclure par le principe des tiroirs. Supposons donc maintenant que P n'appartient à aucune des diagonales du polygone. Traçons une diagonale reliant deux sommets séparés de n côtés. Par hypothèse, P se trouve d'un côté de cette diagonale. Ainsi, toute droite reliant P et un des $n+1$ sommets situés de l'autre côté de la diagonale (y compris les extrémités de cette diagonale) recoupe nécessairement le polygone du côté de P. Ainsi, il n'y a qu'au plus $n-1$ droites qui peuvent passer par un des n côtés situés de l'autre côté de la diagonale par rapport à P. Par le principe des tiroirs, il y aura un côté non utilisé.