DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2012

Combinatoire énumérative

- Introduction -

La Combinatoire est un sous-art des mathématiques qui consiste à compter et à étudier des structures discrète (finies). De nombreux problèmes difficiles sont formulés de manière très simple (mais la résolution nécessite des outils avancés). Le but de ce mini-cours est de présenter quelques réflexes et idées de bases pouvant être utiles dans la résolution d'exercices de combinatoire de type olympiades.

Le contenu de ce mini-cours est le suivant : coefficients binomiaux, double comptage, injections, surjections, méthodes bijections.

- Coefficients binomiaux -

1) Définitions

On rappelle qu'un ensemble E est une collection d'éléments dont l'ordre n'a pas d'importance (ainsi, les ensembles $\{2,3\}$ et $\{3,2\}$ sont les mêmes ensembles). On note $x \in A$ si x appartient à l'ensemble A. Si A et B sont deux ensemble, on écrit $A \subset B$ et on dit que A est inclus dans B si chaque élément de A appartient au B. L'ensemble vide, qui ne contient aucun élément, est noté $\emptyset$. On note $\text{Card}(A)$ (on prononce « cardinal de A ») le nombre d'éléments de A. On dit que A est infini si $\text{Card}(A) = \infty$, fini sinon.

Définition 1. Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ (et on prononce « k parmi n ») le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à k éléments d'un ensemble à n éléments différents. Pour $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Il est clair que dans la définition précédente, $\binom{n}{k}$ ne dépend pas de l'ensemble à n éléments différents considéré.

Exemple 2. On a $\binom{4}{2} = 6$, car les sous-ensembles à 2 éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ et il y en a 6

Pour un entier $n \geqslant 1$, rappelons la notation $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Proposition 3. Le nombre de manières d'ordonner n éléments est $n!$.

Démonstration. Nous avons n possibilités pour choisir le premier élément, $n - 1$ possibilités pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au dernier élément pour lequel nous avons une seule possibilité. Le résultat en découle. $\square$

Proposition 4. Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Démonstration. Comptons de deux manières différentes le nombre de suites à k éléments qu'on peut créer en utilisant les n éléments d'un ensemble à n éléments différents.

D'une part, comme pour la proposition précédente, nous avons n choix pour le premier terme de la suite ; $n-1$ choix pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au k-ième élément pour lequel nous avons $n - k + 1$ choix. Finalement, il y a en tout $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ suites à k éléments.

D'autre part, pour créer une suite à k éléments, on peut commencer par choisir les k éléments qui vont constituer la suite ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis les ordonner ($k!$ manières possibles de les ordonner). Il y a donc en tout $k! \cdot \binom{n}{k}$ suites à k éléments. $\square$

2) Propriétés combinatoires

Exercice 1 Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Solution de l'exercice 1 *Première méthode :* On utilise la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et le résultat en découle immédiatement.

Deuxième méthode : On remarque que choisir k éléments parmi n revient à choisir $n - k$ éléments parmi n qu'on ne choisira pas.

L'exercice précédent, bien que facile, est assez représentatif des exercices ayant pour but de prouver des relations d'égalité entre coefficients binomiaux. Très souvent, il y a toujours (au moins) deux approches possibles : remplacer les coefficients binomiaux par leur formule et ramener le problème à un exercice de manipulation de relations algébriques, ou bien d'interpréter de manière combinatoire les deux termes de part et d'autre de l'égalité et de prouver qu'ils sont égaux. La deuxième approche est biensûr bien plus élégante et fournit très souvent des preuves courtes, mais requiert davantage d'ingénuité.

Exercice 2 (formule de Pascal) Soiet $0 \leqslant k \leqslant n$ des entiers (avec $(k, n) \neq (0, 0)$). Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 2 *Première méthode :* On utilise la formule.

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire. Considérons l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et dénombrons ses sous-ensembles à k éléments. Il y en a $\binom{n-1}{k}$ qui ne contiennent pas n et il y en a $\binom{n-1}{k-1}$ qui contiennent n. Le résultat en découle.

Exercice 3 Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 3 *Première méthode :* On utilise la formule exprimant $\binom{n}{k}$ (le faire).

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k ayant un élément distingué (qu'on appellera chef). Tout d'abord, il suffit de choisir un sous-ensemble de cardinal k ($\binom{n}{k}$ choix), puis de choisir un chef (k choix indépendants). On obtient donc en tout $k\binom{n}{k}$ possibilités.

Exercice 4 Pour un entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Solution de l'exercice 4 *Première méthode :* Si on n'a pas d'idée comment commencer de manière astucieuse, on peut essayer de procéder par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Supposons le résultat acquis au rang n

et montrons-le au rang $n+1$ en écrivant, avec l'exercice 4 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2^n + 2^n \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2^{n+1},
\end{aligned}$$

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant le nombre N de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$. D'une part, pour un entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments. En sommant le tout, on voit que $N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Mais, pour construire un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a le choix de choisir 1 ou non, 2 ou non, et ainsi de suite jusqu'à n. On a donc $N = 2^n$, ce qui conclut.

En particulier, la solution précédente montre qu'il existe 2^n sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Proposition 5 (Formule du binôme de Newton)**.** Soient x, y des nombres réels et $n \geqslant 1$ un entier. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$

Démonstration. Première méthode : par récurrence sur n (s'entraîner à le faire).

Seconde méthode : lorsqu'on développe $(x+y) \cdot (x+y) \cdots (x+y)$, pour trouver le coefficient devant $x^k y^{n-k}$, parmi les n termes $(x+y)$, il faut en choisir k pour lesquels on garde le x et qui vont donner un terme x^k, et les $n-k$ autres termes pour lesquels on sélectionne y vont donner le terme y^{n-k}. Le résultat s'ensuit. □

Exercice 5 Quel est le cardinal moyen d'un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Solution de l'exercice 5

Première méthode (d'après une idée d'élèves) : On regroupe un ensemble avec son complémentaire. Si $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A^c l'ensemble des entiers de

$\{1,2,\ldots,n\}$ qui ne sont pas dans A. Notons N ce cardinal moyen. Alors :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}} \operatorname{Card}(A) = \frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}} \frac{\operatorname{Card}A + \operatorname{Card}(A^c)}{2} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}} \frac{n}{2} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n}{2}2^n = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Autre méthodes : Il faut évaluer la somme

$$S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Si on ne sait pas commencer, il faut étudier les premiers cas : $n = 1, 2, \ldots$. On trouve toujours $S_n = n/2$. Essayer donc de démontrer cela.

Seconde méthode : Si on n'a pas d'idée, on peut procéder par récurrence sur n.

Troisième méthode : On utilise le résultat de l'exercice précédent :

Troisième méthode, plus avancée. Considérons le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. D'après a formule du binôme de Newton, $P_n(x) = (1+x)^n$. Dérivons cette égalité par rapport à x :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Évaluons alors cette quantité en $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Le résultat en découle.

Exercice 6 Prouver que pour $0 \leqslant m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

Solution de l'exercice 6 On remarque d'abord que seuls les k tels que $k \geqslant m$ contribuent de manière non nulle. On va procéder à un double comptage en comptant le nombre N de sous-ensembles A, B de $\{1,2,\ldots,n\}$ tels que $A \subset B$

et $\text{Card}(A) = m$. En effet, d'une part, pour construire A, B on peut d'abord choisir A de cardinal m ($\binom{n}{m}$ choix), puis rajouter un sous-ensemble quelconque de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ privé des éléments de A, qui a $n - m$ éléments (et donc 2^{n-m} choix indépendants). En ainsi, $N = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

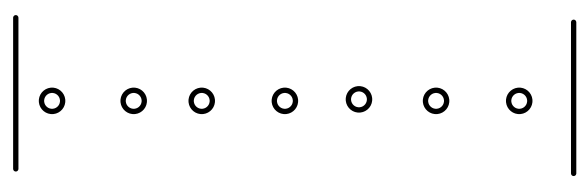
D'autre part, pour construire A, B on peut d'abord choisir B de cardinal quelconque entre m et n (si B est de cardinal k, $\binom{n}{k}$ choix), puis choisir A de cardinal m comme sous-ensemble de B ($\binom{k}{m}$ choix si B est de cardinal k). Ainsi, $N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

Exercice 7 Combien y a-t-il de chemins sur $\mathbb{Z}^2$ issus de $(0,0)$, faisant des pas $+(1,0)$ ou $+(0,1)$, et finissant en (m,n), où $m, n \geqslant 0$?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Un tel chemin doit faire $m+n$ pas, dont m fois $+(1,0)$ et n fois $+(0,1)$. Il suffit donc de choisir parmi les $m+n$ pas possibles la position des m qui font $+(1,0)$. Le nombre total vaut donc $\binom{m+n}{m}$.

Exercice 8 De combien de manières peut-on placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Considérons la figure suivante (avec deux barres) :



Remplaçons chaque rond soit par une pièce, soit par une barre de sorte qu'il y ait en tout 2 barres et 5 pièces. Les pièces entre les deux premières barres seront contenues dans la première poche, les pièces entre la deuxième barre et la troisième barre seront contenues dans la seconde poche, et finalement les pièces entre la troisième barre et la quatrième barre seront contenues dans la troisième poche.

Ainsi, placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes, revient à choisir la position des 2 barres parmi 7 positions possibles. La réponse est donc $\binom{7}{2} = 21$.

Plus généralement, en procédant de la même façon, on voit qu'il y a $\binom{a+b-1}{b-1} = \binom{a+b-1}{a}$ manières de placer a pièces identiques dans b poches différentes.

- Principe d'Inclusion-Exclusion -

On sait que si A et B sont deux ensembles finis, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$. La formule suivante, dite d'inclusion-exclusion, généralise cela au cas où nous en avons un nombre quelconque.

Proposition 6 (Formule d'inclusion-exclusion)**.** Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right).$$

Exercice 9 Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?

Démonstration. Par récurrence (bon courage !) $\square$

Solution de l'exercice 9 Trouvons plutôt le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 divisibles par 3, 5, ou 7. D'après la formule d'inclusion-exclusion, ce nombre vaut :

$$40 + 24 + 17 - 8 - 5 - 3 + 1 = 66.$$

Ainsi, le nombre cherché vaut $120 - 66 = 54$.

Exercice 10 Les n stagiaires au stage de Montpellier vont se baigner et laissent leurs t-shirts Animath en vrac sur le sable. Ils reviennent et prennent un t-shirt complètement au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne se retrouve avec son t-shirt ?

Solution de l'exercice 10 On assigne à chaque stagiaire un chiffre différent entre 1 et n, et on note x_i le numéro de l'élève prenant le i-ième t-shirt. Ainsi, $(x_1, \ldots, x_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$. Calculons plutôt la probabilité qu'au moins une personne retrouve son t-shirt en vue d'utiliser le principe d'inclusion-exclusion. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit A_i l'ensemble des permutations telles que $x_i = i$. Il est clair que pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, on a :

$$\mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right) = (n-k)!.$$

Ainsi, d'après la formule d'inclusion-exclusion :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.
\end{aligned}$$

La probabilité cherchée vaut $1 - \mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)/n!$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

- **Injections, surjections, bijections** -

1) Injections et surjections

Définition 7. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

(i) On dit que f est injective si pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$.

(ii) On dit que f est surjective si pour fou $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On dit que E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée. Si $f(x) = y$, on dit que x est l'antécédent de y et y l'image de x.

Pour montrer que $f : E \to F$ est injective, on montre très souvent que si $x, y \in E$ sont tels que $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ (voir le cours sur les équations fonctionnelles).

On introduit la notation $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour un entier $n \geqslant 1$.

Proposition 8. Il existe une injection $[m] \to [n]$ si, et seulement si, $m \leqslant n$. Il existe une surjection de $[m] \to [n]$ si, et seulement si, $m \geqslant n$.

Démonstration. Exercice. □

En pratique, on utilise la proposition précédente en combinatoire comme suit : pour montrer que $a \leqslant b$, on construit deux ensembles A, B tels que $\text{Card}(A) = a$, $\text{Card}(B) = b$, ainsi qu'une injection de A dans B. Ou encore, pour montrer que $a \geqslant b$, on construit deux ensembles A, B tels que $\text{Card}(A) = a$, $\text{Card}(B) = b$, ainsi qu'une surjection de A dans B.

Exercice 11 (Olympiades Balkaniques de Mathématiques 1997) Soient $m, n > 1$ des entiers. Soit S un ensemble de cardinal n et $A_1, A_2, \dots, A_m$ des sous-ensembles de S. On suppose que pour tous éléments $x \neq y$ de S, il existe $1 \leqslant i \leqslant m$ tel que $x \in A_i$ et $y \notin A_i$, ou bien $x \notin A_i$ et $y \in A_i$. Prouver que $n \leqslant 2^m$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> À tout élément $x \in S$, on associe le m-uplet $(x_1, \dots, x_m)$ où $x_i = 0$ si $x \notin A_i$ et $x_i = 1$ si $x \in A_i$. Cette application est définie sur S, et son ensemble d'arrivée est $\{0,1\}^m$. Par hypothèse, si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, f est injective. Le cardinal de l'ensemble de départ est donc inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble d'arrivée.

Exercice 12

(i) Combien existe-t-il de fonctions de $[m] \to [n]$?

(i) On suppose $m \leqslant n$. Combien existe-t-il d'injections de $[m] \to [n]$?

(ii) On suppose $m \geqslant n$. Combien existe-t-il de surjections de $[m] \to [n]$?

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Pour (i), il y en a clairement n^m (n choix pour chacun des m entiers au départ)

Pour (ii), on a n choix pour l'image de 1, $n-1$ choix pour l'image de 2, et ainsi de suite jusqu'à m pour lequel on a $n-m+1$ choix pour son image. La réponse est donc

Pour (iii), on va utiliser le principe d'inclusion-exclusion et compter le nombre de fonctions $[m] \to [n]$ qui ne sont par surjectives. À cet effet, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons A_i l'ensemble des fonctions $[m] \to [n]$ telles que i n'est pas atteint par la fonction. Il est clair que pour des entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, on a $\text{Card}(A_{i_1} \cap \cdots A_{i_k}) = (n-k)^m$, car chaque élément de $[m]$ peut être envoyé sur un des $n-k$ entiers de $[n]$ autorisés. Ainsi, d'après le principe d'inclusion exclusion, si on note $s(m,n)$ le nombre de surjections de $[m] \to [n]$, on a :

$$
\begin{aligned}
n! - s(m,n) &= \mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)^m\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
s(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)^m.
$$

2) Preuves bijections en combinatoire

Définition 9. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective si elle est à la fois injective et à la fois surjective.

Proposition 10. Soient A et B deux ensembles finis. Alors A et B ont même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre A et B

Démonstration. Exercice. □

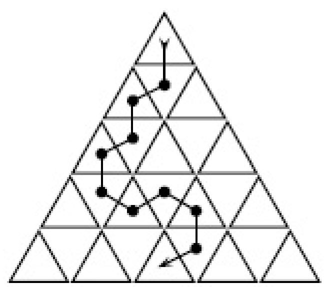
En combinatoire, cette proposition est souvent utilisée de la manière suivante. Si on veut montrer que $a = b$, où $a, b \geqslant 0$ sont des entiers, il suffit de trouver deux ensembles finis A et B tels que $\mathrm{Card}(A) = a$ et $\mathrm{Card}(B) = b$, et de construire une bijection entre A et B.

Pour vérifier qu'une fonction est bijective, il est parfois pratique d'exhiber la fonction réciproque. Plus précisément :

Proposition 11. Si $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux fonctions telles que $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$ et $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$, alors f et g sont bijections (on dit qu'elles sont réciproques, ou inverses, l'une de l'autre).

Démonstration. Montrons d'abord que f est surjective. Soit $b \in B$. On sait que $f(g(b)) = b$, ainsi $g(b)$ est un antécédent de b, de sorte que f est surjective. Pour montrer l'injectivité, soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. On a $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$. La fonction f est donc injective, et comme elle est surjective, elle est bien bijective. Par symétrie, g est aussi bijective. □

Exercice 13 (Canada 2005) Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusq'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2012)$.



Solution de l'exercice 13 L'application qui à un chemin associe un $(n-1)$-uplet $(x_1, \dots, x_{n-1})$ où x_i est l'entier x tel que le chemin traverse la i-ième ligne horizontale en partant du haut au x-ième segment en partant de la gauche. Cette application est clairement une bijection entre l'ensemble des chemins considérés et l'ensemble $[1] \times [2] \times \cdot \times [n-1]$, qui est de cardinal $(n-1)!$. Ainsi, $f(2012) = 2011!$.