DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Razvan BARBULESCU
STAGE : Montpellier 2013

Coloriages et invariants

- Coloriages -

Exercice 1 Le plancher est pavé avec des dalles de type 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée. Peut-on réaranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une nouvelle dalle de l'autre type ?

Exercice 2 On appelle tétromino une dalle de 4 carrés en forme de I, $\square$, Z, T et L. Peut-on paver un rectangle avec une pièce de chaque type ?

Exercice 3 On enlève les quatre coins à un rectangle $n \times n$. Est-il possible de le recouvrir avec des L-tétrominos ?

Exercice 4 On colorie le plan en 2 couleurs. Montrer qu'il y a un rectangle dont tous les sommets ont la même couleur. Généralisez.

Exercice 5 Les villes d'un pays sont connectées par TGV comme dans la Figure 1. Peut-on faire un circuit qui passe exactement une fois par chaque ville ?

Exercice 6 On transforme le mot W en insérant, en effaçant ou en ajoutant au bout XXX où X est un mot formé des chiffres 0 et 1. Peut-on obtenir 10 à partir de 01 ?

- Invariants -

Exercice 7 Sur l'Île de Paques vivent des caméléons qui peuvent changer de couleur selon leur gré en bleus, blanc et rouge. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent de manière accidentelle ils ont peur et prennent tous les deux la troisième couleur. À un moment donné on a 12 caméléons bleus, 25 blancs et 8 rouges. Est-il possible que tous les caméléons deviennent blancs ?

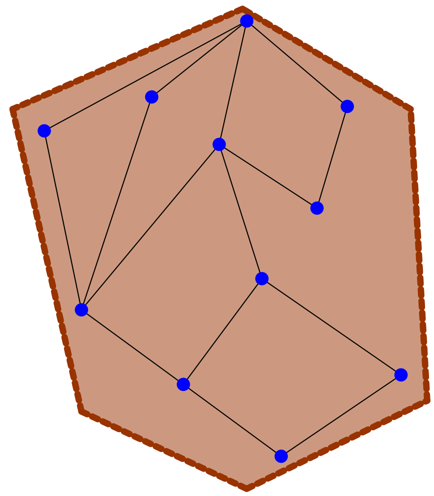

FIGURE 1 – Circuit sur une carte.

Exercice 8 Les nombres $a_1, \ldots, a_n$ valent 1 ou -1. On pose $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et $a_{n+3} = a_3$. Sachant que $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$ vaut 0, montrer que n est divisible par 4.

Exercice 9 Les entiers relatifs a, b, c, d ne sont pas tous égaux. À chaque itération on remplace (a, b, c, d) par $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Montrer qu'au moins un des quatre nombres va devenir arbitrairement grand en valeur absolue.

Exercice 10 Les entiers de 1 à n sont écrits dans l'ordre. On échange deux nombres. Un mouvement consiste à échanger n'importe quels deux entiers. Montrer qu'on ne peut pas retrouver l'ordre initial (croissant) dans un nombre pair de mouvements.

Exercice 11 On part de quatre triangles rectangles qui sont congruents. À chaque étape on choisit un triangle, on trace l'hauteur issue de l'angle droit et on considère les deux nouveaux triangles. Est-il possible de rendre tous les triangles non-congruents ?

- Solutions des exercices de coloriages -

Solution de l'exercice 1. On colorie la première ligne en carrés bleus et rouges en commençant par bleu, la deuxième en noir et blanc en commençant par noir. Ensuite on continue avec des lignes alternées bleu-rouge et noir-blanc en commençant toujours par bleu et noir respectivement. Alors les dalles 2 x 2 couvrent exactement un carré de chaque couleur. Une dalle 4 x 1 couvre 2 carrés d'une couleur et 2 d'une autre. Ainsi les deux types de dalles ne sont pas interchangeables. $\square$

Solution de l'exercice 2. Le rectangle à recouvrir est de taille 4 x 5. On le colorie en blanc et noir comme un échiquier, ayant donc 10 carrés noirs et 10 blancs. Alors on voit que chacune des pièces I, $\square$, Z et L couvre 2 carrés noirs et 2 blancs. Ce n'est pas le cas pour le T qui a 3 carrés de la même couleur. Ainsi, les 5 pièces ne peuvent pas couvrir un nombre égal de carrés blancs et noirs. $\square$

Solution de l'exercice 3. Réponse : $n = 4k + 2$. On doit paver $n^2 - 4$ carrés avec des dalles de 4 carrés, donc n doit est pair. On colorie le rectangle en lignes noires et blanches qui s'alternent. Alors chaque dalle recouvre soit 3 carrés blancs et 1 noirs soit le contraire. Ainsi, on doit avoir un nombre pair de dalles pour couvrir le même nombre de carrés blancs et noirs. Ainsi $n^2-4 \equiv 0 \mod 8$, donc $n \equiv 2 \mod 4$. Il est facile de faire une construction pour tout n de ce type. $\square$

Solution de l'exercice 4. On résout le problème pour n couleurs. On considère un rectangle de largeur n et de longueur n^{n+1} que l'on découpe en carrés de taille 1. Ainsi chaque segment parallèle à la larguer à $n + 1$ points sommets. Le nombre de tels segments est $n^{n+1} + 1$ qui est plus grand que le nombre de coloriages différents de $n + 1$ points. Ainsi on a deux segments qui sont coloriés de la même façon. Chacun de ces deux segments contient au moins une couleur deux fois. Quatre points de cette couleur sur les deux segments identiques forment un rectangle monochrome. $\square$

Solution de l'exercice 6. On doit trouver un invariant qui tient compte des positions des chiffres 1. Pour $W = w_1w_2\cdots$ on pose $I(W) = \sum iw_i$. Quand on ajoute ou insère XXX, chaque lettre du mot X reçoit les indices i, $i + k$ et $i + 2k$ pour un indice i et pour k la longueur de X. La partie de W qui est déplacée pour insérer XXX a été décalée de $3k$. Ainsi $I(W) \mod 3$ est un invariant. Comme $I(01) = 2$ et $I(10) = 1$, il est impossible de passer de 01 à 10. $\square$

- Solutions des exercices d'invariants -

Solution de l'exercice 7. On note n_1, n_2 et n_3 le nombre de caméléons bleu, blancs et rouges respectivement. À chaque rencontre les différences n_1-n_2, n_1-n_3 et n_2-n_3 ne changent pas modulo 3. Au début on a $n_1-n_2 \equiv 12-25 \equiv 2 \mod 3$.

On nous demande d'avoir $n_2 = 45$ et $n_1 = 0$ donc $n_1 - n_2 \equiv 0 \mod 3$. Il est donc impossible que tous les caméléons deviennent blancs. $\square$

Solution de l'exercice 8. On décide de changer le signe de certain des nombres a_i et de regarder les nouvelles valeurs de S. Quand on change le signe d'un nombre a_i avec $i \in [1, n]$, la nouvelle valeur de S est son ancienne valeur plus

$$\pm 2a_i\left(a_{i-3}a_{i-2}a_{i-1} + a_{i-2}a_{i-1}a_{i+1} + a_{i-1}a_{i+1}a_{i+2} + a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}\right).$$

Comme la parenthèse a 4 termes impairs, sa valeur est paire. Ainsi, S ne change jamais son reste modulo 4. Maintenant, on change le signe de tous les nombres a_i de façons qu'il soient tous positifs. Alors $S = n$, donc n a le même reste que la valeur initiale de S, soit n est divisible par 4. $\square$

Solution de l'exercice 9. Ce qu'on apprend dans cet exo est qu'un type de fonction invariante à regarder sont les tailles. Par cela on comprend la valeur absolue du plus grand nombre, la somme des valeurs aboslues, la somme des carrés et autres. Dans ce cas précis on regarde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Si on met un indice n pour la valeur des nombres après n itérations alors on remarque que $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ indépendamment de n. Ensuite on a

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 = (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n). \end{aligned}$$

Or l'égalité $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ doit nous aider à simplifier l'expression. On a

$$0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 - 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n).$$

$\square$

Solution de l'exercice 10. C'est une propriété très connue des permutations, listes des nombres de 1 à n dans n'importe quel ordre. Si i et j sont deux nombres de 1 à n avec $i < j$ on dit qu'il sont dans le bon ordre si i apparaît à gauche de j dans notre liste. Sinon on dit que le couple (i, j) est une inversion de notre permutation. Un invariant classique est des permutations est la signature : si σ est une permutation on pose $\varepsilon(\sigma) = 1$ si elle a un nombre pair d'inversion er -1 si elle a un nombre impair. Pour résoudre l'exercice il suffit de montrer qu'à chaque échange on change le signe de ε.

Sans restreindre la généralité on peut supposer qu'on échange i et j avec $i < j$. D'abord, l'échange de i et de j rajoute l'inversion (i, j). Soit k un nombre qui se trouve entre i et j. Si k est plus petit que i, alors l'échange de i et j remplace l'inversion (k, i) par l'inversion (k, j). De même si $k > j$ l'inversion (j, k) est remplacée par l'inversion (i, k). Si $i < k < j$ alors l'échange de i et j rajoute ou enlève 2 inversions. Dans tous les cas, l'échange de i et j change la parité du nombre d'inversions, donc le signe de ε. □

Solution de l'exercice 11. On note 1 l'hypoténuse des triangles de départ et p et q les deux côtés. Chaque découpage d'un triangle T produit deux triangles semblables à T, de rapport p et respectivement q. Ainsi tous les triangles T obtenus au cours du processus sont caractérisés par les entiers m et n tels que T a un rapport $p^m q^n$ avec les triangles initiaux. Chaque découpage remplace un triangle (m, n) par un triangle $(m + 1, n)$ et un triangle $(m, n + 1)$. À un ensemble de triangles on associe la fonction

$$I = \sum \frac{1}{2^{m+n}},$$

qui est invariante pour les découpages. Comme au début I vaut 4, elle doit valoir 4 à la fin. Supposons par l'absurde qu'après un nombre fini d'étapes on a seulement des triangles non-congruents. Soit M et N deux bornes pour les m et les n qui interviennent dans un ensemble de triangles. Alors $\sum \frac{1}{2^m} \leqslant 2 - \frac{1}{2^{M+1}}$ et $\sum \frac{1}{2^n} \leqslant 2 - \frac{1}{2^{N+1}}$ où les sommes sont sur tous les m et n de notre ensemble. Finalement

$$I < \left(2 - \frac{1}{2^{M+1}}\right)\left(2 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) < 4$$

ce qui est une contradiction. □