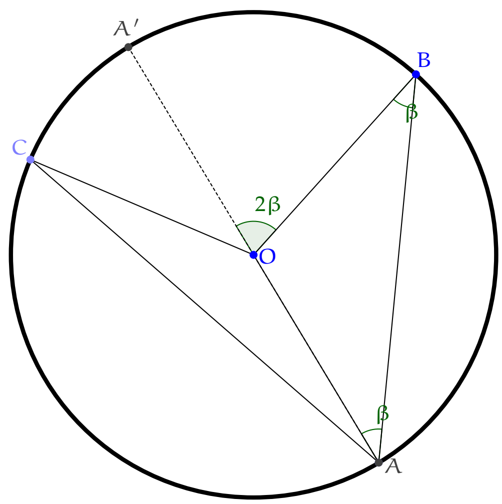
DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Chasse aux angles, points remarquables

Les angles interviennent en premier lieu dans la notion de triangle isocèle : un triangle a deux angles égaux si et seulement si il a deux côtés égaux. Mais aussi et surtout dans la notion d'angle inscrit : si B et C sont deux points fixes d'un cercle, et qu'on fait varier un troisième point A sur ce même cercle, l'angle $\widehat{BAC}$ ne dépend pas de la position du point A.



Il existe plusieurs manières d'énoncer ce théorème : si quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux si A et D sont du même côté de la droite (BC), supplémentaires s'ils sont de part et d'autre de (BC). Réciproquement, quatre points quelconques du plan, A, B, C, D vérifiant : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ si A et D du même côté de (BC) ou $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180°$ si A et D sont de part et d'autre de (BC) sont "cocycliques", c'est-à-dire sur un même cercle. La démonstration doit envisager tous les cas de figure, mais l'idée essentielle est que si A et B sont sur un cercle de centre O, le triangle

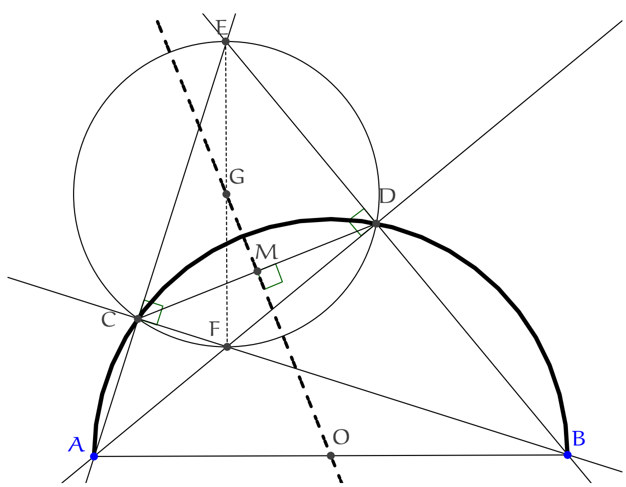
AOB est isocèle. Si la droite (AO) recoupe le cercle en A', comme la somme des trois angles du triangle AOB est égale à 180°, $\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 2.\widehat{BAO}$, d'où l'on déduit que l'angle au centre $\widehat{BOC}$, qui ne dépend pas de A, est le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Si l'on veut un théorème qui ne dépende pas des cas de figures, il faut introduire les angles de droites : l'angle (AB, AC) est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite (AB) pour la faire coïncider avec (AC). Donc $(AB, AC) = -(AC, AB)$ et plus généralement : $(AB, AC)+(AC, AD) = (AB, AD)$ (relation de Chasles) quels que soient les points A, B, C et D. En utilisant ces angles de droites, le théorème de l'angle inscrit s'écrit : quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$.

Cas particulier important de ce théorème : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit si et seulement si A est situé sur le cercle de diamètre [BC] (donc l'angle au centre est plat).

Exercice 1 Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre [AB]. Les droites (AC) et (BD) se coupent en F, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux des segments [AB], [CD] et [EF] sont alignés.

Solution de l'exercice 1



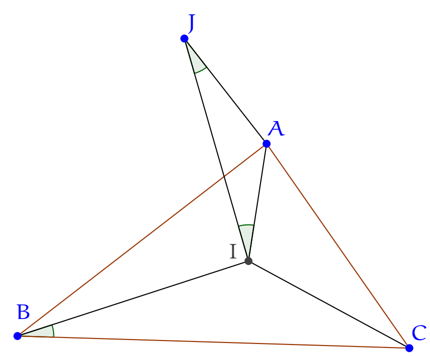
L'hypothèse "C et D sur le cercle de diamètre [AB]" se traduit par : $\widehat{ACB} = 90°$ et $\widehat{ADB} = 90°$". Mais cela entraine manifestement : $\widehat{FCE} = 90°$ et $\widehat{FDE} = 90°$, donc (C) et (D) sont également sur le cercle de diamètre [EF]. Le milieu M de [EF] est le centre de ce cercle, donc $MC = MD$, ce qui entraine que M est sur la médiatrice de [CD]. Or, pour la même raison, le milieu O de [AB] est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$. Et par définition, cette même médiatrice passe par le milieu de $[CD]$.

- Bissectrices et cercle inscrit -

La bissectrice d'un angle partage un angle en deux angles égaux. Les points de la bissectrice sont à égale distance des deux côtés de l'angle. Il en résulte que les trois bissectrices d'un triangle ABC se coupent en un point généralement appelé I, situé à égale distance des trois côtés du triangle. C'est donc le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé "cercle inscrit dans le triangle ABC".

Exercice 2 Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On suppose que : $CA + AI = BC$. Déterminer la valeur du rapport $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$

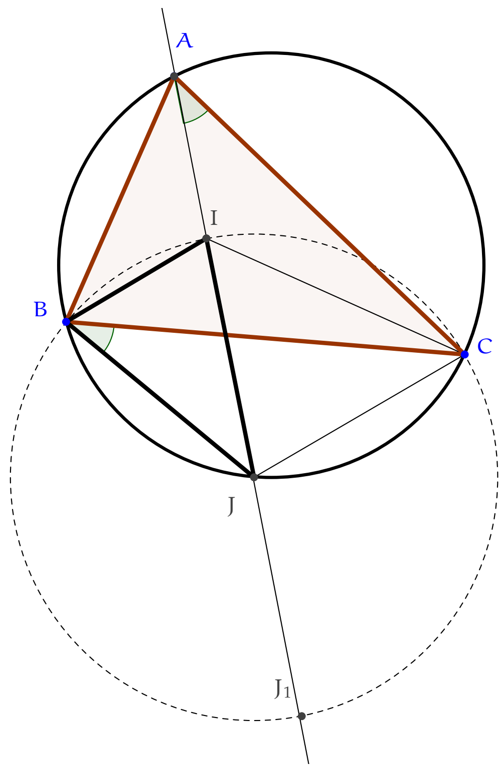
Solution de l'exercice 2



Lorsque deux segments ne sont pas bout à bout sur une même droite, on ne peut pas dire grand-chose de la somme de leurs longueurs. Donc pour utiliser l'hypothèse $CA + AI = BC$, il faut construire un segment AJ sur la droite (CA) tel que : $AJ = AI$ et $CJ = CA + AJ$ (donc C et J de part et d'autre de A). La relation $AJ = AI$ entraine alors que le triangle AJI est isocèle, donc $\widehat{AJI} = \widehat{AIJ}$: appelons α cet angle. $\widehat{IAC} = \widehat{AJI} + \widehat{AIJ} = 2\alpha$. Or $\widehat{IAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ car (AI) est bissectrice de $\widehat{BAC}$. Par ailleurs, les triangles IJC et IBC ont un angle égal : $\widehat{ICJ} = \widehat{ICB}$ situé entre deux côtés égaux, CI et $CJ = CB$, ils sont donc isométriques (ils ont tous leurs côtés et tous leurs angles égaux), d'où en particulier : $\alpha = \widehat{IJC} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{CBA}}{2}$. Donc en définitive : $\widehat{CBA} = 2\alpha$ alors que $\widehat{BAC} = 4\alpha$, d'où $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$.

Exercice 3 Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit. La droite (AI) recoupe le cercle circonscrit à ABC en un point J. Montrer que JB = JC = JI.

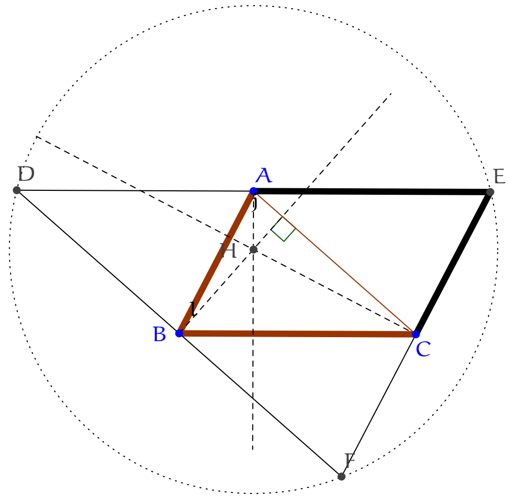
<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



A, B, J et C étant cocycliques, $\widehat{BAJ} = \widehat{BCJ}$ (angles inscrits), tout comme $\widehat{CAJ} = \widehat{CBJ}$. Comme (AI) est bissectrice de $\widehat{BAC}$, on en déduit que $\widehat{BCJ} = \widehat{CBJ}$, donc $JB = JC$ (triangle isocèle). Par ailleurs, on continue la "chasse aux angles" avec $\widehat{BIC}$, somme des deux angles à la base du triangle BAI : $\widehat{BIC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \widehat{IBC} + \widehat{CBJ} = \widehat{IBJ}$, donc IJB est lui aussi un triangle isocèle, ce qui achève la démonstration.

- Hauteurs et orthocentre -

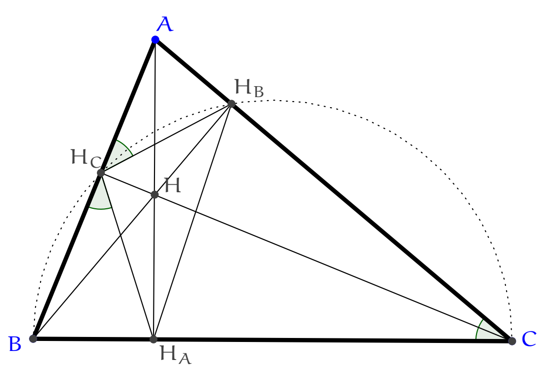
Les hauteurs d'un triangle ABC se coupent en un point nommé orthocentre du triangle, et traditionnellement noté H. En effet, menons par A la parallèle à (BC), par B la parallèle à (CA) et par C la parallèle à (AB) : on voit apparaître trois parallélogrammes $ABCB'$, $ABA'C$ et $AC'BC$, donc la hauteur issue de A est médiatrice de $[B'C']$, lieu des points équidistants de B' et C', celle issue de B est médiatrice de $[C'A']$, celle issue de C, médiatrice de $[A'B']$, et les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois sommets (centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$).



Exercice 4 Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC, et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On supposera pour simplifier que H est à l'intérieur du triangle ABC, ce qui revient à dire que tous les angles du triangle sont aigus (un tel triangle est dit acutangle). Déterminer les angles des triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC et $H_AH_BH_C$, en fonction des angles du triangle ABC, que l'on notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$

Remarque : on utilise beaucoup de points en géométrie du triangle, et si l'on veut éviter d'utiliser le même nom pour trop de points différents, il arrive qu'on soit à court de notations. Les notations H_A, H_B et H_C ne sont pas courantes, mais elles peuvent rendre des services dans bien des cas.

Solution de l'exercice 4

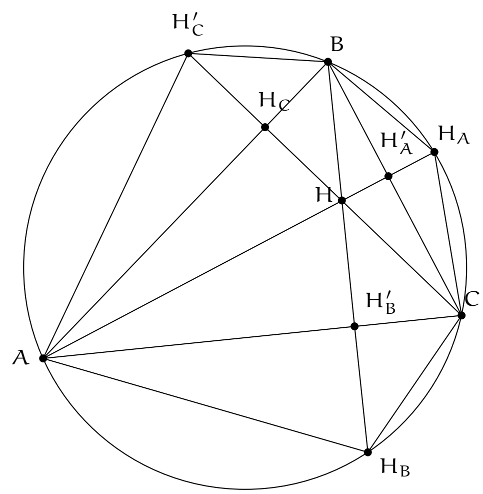


Etant donnés les angles droits $\widehat{BH_BC}$ et $\widehat{BH_CC}$, H_B et H_C sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, d'où les angles inscrits $\widehat{BH_CH_B}$ et $\widehat{BCH_B}$ sont supplémentaires, puisque C et H_C sont de part et d'autre de (BH_B), d'où $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{C}$. De même, $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{B}$, puis $\widehat{BH_CH_A} = \widehat{C}$, $\widehat{BH_AH_C} = \widehat{A} = \widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{CH_BH_A} = \widehat{B}$.

Donc d'une part $H_A\widehat{H_B}H_C = 180° - 2\widehat{B}$, $H_B\widehat{H_C}H_A = 180° - 2\widehat{C}$, $H_C\widehat{H_A}H_B = 180° - 2\widehat{A}$, d'autre part les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$, et l'orthocentre de ABC est centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$.

Exercice 5 Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On supposera pour simplifier que H est intérieur au triangle (triangle acutangle). Montrer que le symétrique de H par rapport aux côtés (AB), (BC) et (CA) du triangle sont sur le cercle circonscrit à ABC.

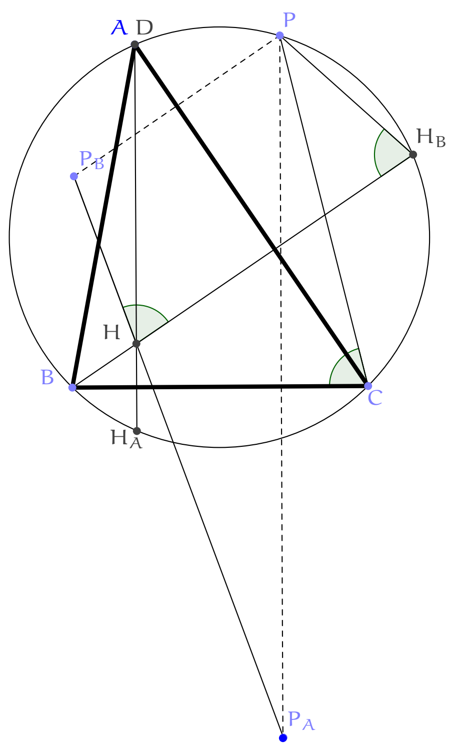
<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



Une simple "chasse aux angles" suffit : en appelant, cette fois, H_A, H_B et H_C les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle, H'_A, H'_B et H'_C les pieds des hauteurs, milieux de HH_A, HH_B et HH_C : dans le triangle rectangle BH'_BC, $\widehat{H'_BBC} = 90° - \widehat{C}$. De même, $\widehat{H'_CCB} = 90° - \widehat{B}$. Donc le troisième angle du triangle BHC : $\widehat{BHC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180° - \widehat{A}$. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BHC}$ sont supplémentaires, mais H et A ne sont pas de part et d'autre de (BC), donc A, B, C et H ne sont pas cocycliques. En revanche, si H_A est le symétrique de H par rapport à (BC), les triangles BHC et BH_AC ont les mêmes angles, donc $\widehat{BH_AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont encore supplémentaires, mais cette fois-ci A et H_A sont situés de part et d'autre de (BC), donc les quatre points A, H_A, B et C sont cocycliques. De même pour H_B et H_C.

- Droite de Steiner, droite de Simson. -

Parmi les propriétés du triangle, ces deux droites (dont on se sert souvent pour résoudre des problèmes olympiques) peuvent être mises en évidence à partir des seules propriétés ci-dessus. Il s'agit de prouver qu'un point P appartient au cercle circonscrit si et seulement si ses trois symétriques P_A, P_B, P_C par rapport aux côtés du triangle sont alignés (droite de Steiner), tout comme ses trois projections sur les côtés du triangle P'_A, P'_B et P'_C (droite de Simson). Les deux propriétés sont équivalentes, vu que les projections P'_A, P'_B et P'_C sont les milieux de $[PP_A]$, $[PP_B]$, $[PP_C]$, mais la droite de Steiner passe par l'orthocentre H du triangle, ce qui permet une démonstration assez rapide. Pour ne pas avoir à étudier différents cas de figures, utilisons les angles de droites définis en introduction du présent chapitre. L'angle (orienté) de droites (AH, P_AH) dont il faut faire tourner la droite (AH) pour l'amener parallèle à (P_AH) vaut $-(AH_A, PH_A) = (PH_A, AH_A)$, car la symétrie par rapport à une droite transforme un angle de droites en son opposé. De même, $(BH, P_BH) = (PH_B, BH_B)$. D'après la relation de Chasles, $(AH, P_BH) = (AH, BH) + (BH, P_BH)$, or d'une part l'angle inscrit $(PH_B, BH_B) = (PC, BC)$, d'autre part, si l'on fait tourner une droite d'un certain angle, on fait tourner sa perpendiculaire du même angle, donc l'angle des hauteurs $(AH, HB) = (BC, CA)$. D'où $(AH, P_BH) = (PC, BC)+(BC, CA) = (PC, CA)$. Comme $(AH, P_AH) = (PH_A, AH_A) = (PC, AC)$ (angles inscrits), $(AH, P_BH) = (AH, P_AH)$, ce qui entraine que (P_BH) et (P_AH) sont parallèles, donc confondues car toutes deux passent par (H). D'où H, P_A et P_B sont alignés, et de même H, P_A et P_C sont alignés : les quatre points P_A, P_B, P_C et H sont sur la même droite appelée "droite de Steiner de P".



L'utilisation des angles de droites nous a permis de rédiger une démonstration plus rigoureuse (moins dépendante des cas de figures), mais cette utilisation d'angles de droites n'est pas si répandue que cela, même dans les problèmes d'Olympiades.