DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2013

Invariants, Principe des tiroirs

- Principe des tiroirs -

S'il y a $(n+1)$ chaussettes à ranger dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

Exercice 1 On colorie tous les points du plans en rouge et noir. Montrer qu'il existe deux points de la même couleur distants de 1 mètre exactement.

Exercice 2 Dans un internat à Montpellier, il y a 62 stagiaires. Certains se connaissent, et d'autres pas. On suppose que si A connaît B alors B connaît A. Montrer qu'il existe deux stagiaires qui connaissent exactement le même nombre de personnes.

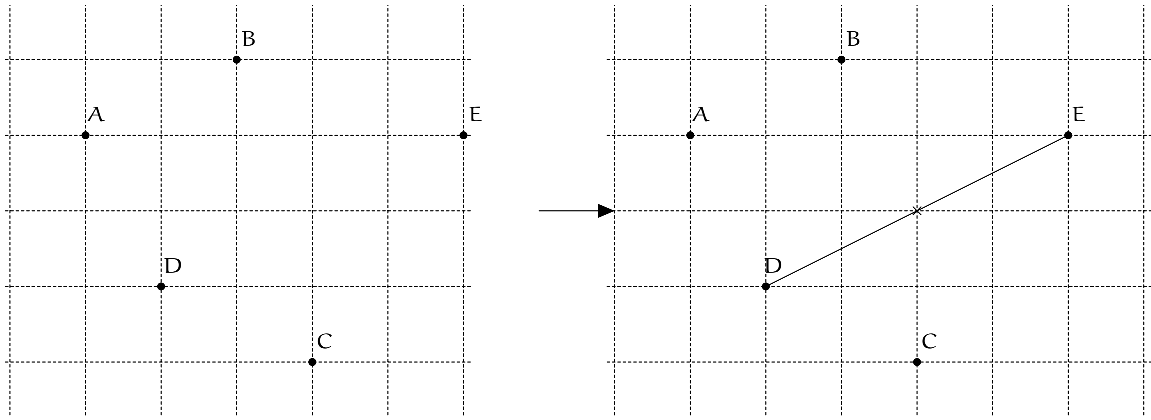
Exercice 3 Un être humain possède entre 0 et 500000 cheveux. Montrer qu'il y a deux Montpelliérains qui ont exactement le même nombre de cheveux.

Exercice 4 Soit x un nombre réel. Montrer qu'il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

Exercice 5 On place 201 points sur un damier 10 cm $\times$10 cm. Montrer que l'on peut trouver 3 points qui forment un triangle d'aire inférieure à 0.5 cm^2.

Exercice 6 On place 5 points sur un grille. Montrer que l'on peut en trouver deux parmi eux qui forment un segment dont le milieu est lui aussi sur la grille :



- Invariants -

Exercice 7 Trente-six ampoules sont rangées en grille 6×6. On dispose de un interrupteur pour chaque ligne, qui quand il est utilisé éteint toutes les ampoules allumées de la ligne et allume les éteintes. De même il y a un interrupteur pour chaque colonne. Igor affirme : "quand je suis arrivé il y avait exactement une ampoule allumée, mais après avoir manipulé certains interrupteurs j'ai réussi à toutes les éteindre". Qu'en pensez-vous ?

Exercice 8 Soit N le nombre de façons qu'il est possible de paver un échiquer avec 32 dominos. Exprimer en fonction de N le nombre de pavage d'un échiquier auquel on a retiré deux coins opposés par 31 dominos.

Exercice 9 On fait un jeu : on commence avec une pile de 2013 jetons. On retire un jeton, puis on coupe la pile en deux petites piles (pas forcément égales). A chaque étape on enlève un jeton à l'une des piles et on coupe une pile en deux (pas forcément la même). Le but du jeu est d'arriver à une configuration où toutes les piles sont hautes de 3 jetons, est-ce possible ? (Si on retire un jeton à une pile de 1 jeton, on considère qu'on a une pile de 0 jetons)

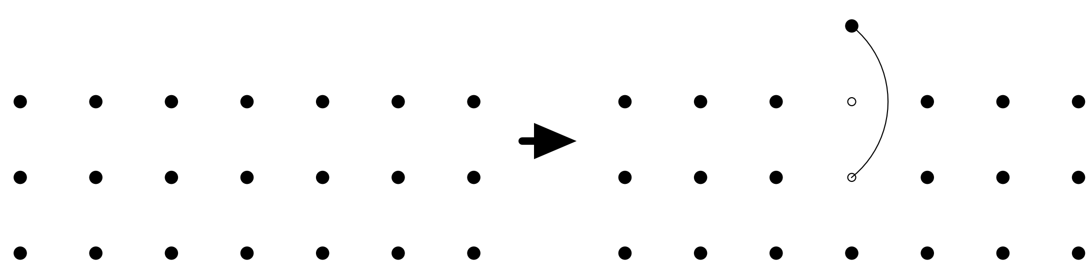
Exercice 10 Vingt-deux arbres sont disposés en rond. Sur chaque arbre se pose un corbeau. A chaque minute, deux corbeaux s'envolent de leurs arbres et se posent sur un arbre voisin. Est-il possible qu'après un certain temps tous les corbeaux soient sur le même arbre ?

Exercice 11 On considère un triplet de nombres réels (a, b, c). On peut effectuer l'action suivante : on choisit x et y deux des nombres du triplet et on les remplace par $(x - y)/\sqrt{2}$ et $(x + y)/\sqrt{2}$. Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ au triplet final $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$?

Exercice 12 Sur une île vivent 34 caméléons. Au départ 7 sont jaunes, 10 sont verts et 17 sont rouges. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Si deux caméléons de la même couleur se rencontrent, rien ne se passe. Un an plus tard ils sont tous de la même couleur. Laquelle ? (Démontrez que c'est la seule possible).

Exercice 13 Un tetramino est une figure formée de 4 carrés (pensez à Tetris). Trouvez le nombre m de tetramino distincts (on dit que deux tetraminos sont identiques si on peut les superposer en les faisant pivoter mais sans les retourner). Est-il possible de paver un rectangle $4 \times m$ avec un tetramino de chaque sorte ?

Exercice 14 (Un Solitaire Infini)($\star$) Vous connaissez tous les règles du solitaire : il y a des billes sur un plateau, on élimine des billes en sautant par dessus avec une autre bille, etc. Maintenant on considère le plan et on place des billes sur tous les points entiers du demi-plan négatif. Le but du jeu est de mettre une bille le plus haut possible en un nombre fini de coups. Le dessin montre comment mettre une bille à hauteur 1. Quelle est la hauteur maximale que l'on peut atteindre ?



- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On prend trois points qui forment un triangle equilatéral de côté 1. Il y a 3 points qui peuvent être de deux couleurs différentes. Il y a donc au moins deux points de la même couleur.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Définissons nos chaussettes et nos tiroirs : les chaussettes sont les 62 stagiaires, et les tiroirs correspondent au nombre de gens connus. Chacun connaît entre entre 0 et 61 personnes, ce qui nous donne 62 tiroirs. Mais il est impossible que quelqu'un connaisse tout le monde et quelqu'un d'autre ne connaisse personne : si quelqu'un connaît tout le monde, alors tout le monde le connaît et du coup tout le monde connaît au moins une personne.

Ainsi on ne peut utiliser que 61 tiroirs, il y a donc deux élèves qui connaissent le même nombre de personnes.

Solution de l'exercice 3 C'est une simple application du principe des tiroirs.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord on multiplie les deux côtés de l'inégalité par q :

$$|qx - p| < \frac{1}{q}.$$

Pour choisir p c'est évident, il faut prendre l'entier le plus proche de qx. Nous allons démontrer la proposition suivante : pour tout entier q, il existe un entier $a \leqslant q$ et un entier p tel que $|ax - p| < \frac{1}{q}$. Ensuite on aura fini, puisque

$$\left|x - \frac{p}{a}\right| < \frac{1}{aq} \leqslant \frac{1}{a^2}.$$

Démontrons notre proposition. On prend $x, 2x, \ldots qx$ et on ne regarde que la partie après la virgule. Si l'une d'entre elles est entre 0 et $\frac{1}{q}$, on a gagné. Sinon, on divise le segment $[0, 1]$ en q segments : $\left[0, \frac{1}{q}\right]$, $\left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right]$, etc. Comme aucun n'est dans le premier segment, cela signifie qu'il y a q points répartis dans $(q - 1)$ segments. Par le principe des tiroirs, il y en a deux qui sont dans le même segment. Disons qu'ils correspondent à mx et nx. Comme les deux points sont dans un segment de largeur $\frac{1}{q}$, ils sont distants de moins de $\frac{1}{q}$. Ainsi il existe un entier p tel que :

$$|mx - nx - p| < \frac{1}{q}.$$

Enfin on prend $a = m - n$ (ou $a = n - m$ si $n > m$) et on a gagné.

Solution de l'exercice 5 On sépare le damier en 100 cases de $1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Comme il y a 201 points, par le principe des tiroirs, il y a une case qui contient 3 points. Il ne reste plus qu'à démontrer que si un triangle est inclus dans un carré de côté 1, alors l'aire du triangle est inférieure à 0.5.

Solution de l'exercice 6 Un point est sur la grille ssi ses coordonnées (x, y) sont toutes les deux entières. Soient A et B de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2), le milieu du segment $[AB]$ sera le point de coordonnées $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Le milieu sera sur la grille ssi ses coordonnées sont entières, ssi x_1 et x_2 sont de même parité, et y_1 et y_2 aussi. Les parités des coordonnées d'un point de la grille peuvent prendre quatre valeurs différentes : (paire, paire) ; (paire, impaire) ; (impaire, paire) et (impaire, impaire). Comme on a 5 points pour 4 classes, il y a deux points qui ont les mêmes parités, et leur milieu est sur la grille.

Solution de l'exercice 7 On remarque que quel que soit l'interrupteur utilisé, on ne change jamais la parité du nombre d'ampoules allumées. Donc soit Igor ment, soit il a cassé les ampoules à force de jouer avec.

Solution de l'exercice 8 Lorsqu'on enlève les deux coins opposés d'un échiquier, il reste 32 cases noires et 30 cases blanches. Mais quelle que soit la façon de poser un domino, il recouvre toujours un case noire et une case blanche. Il est donc impossible de paver l'échiquier écorné avec des dominos.

Solution de l'exercice 9 On remarque que chaque étape du jeu consiste à enlever un jeton et rajouter une pile. Donc la quantité "nb de jetons + nb de piles" ne change jamais. Au départ on a 2013 jetons et une pile, ce qui donne 2014, et si arrivait à n piles de 3 jetons (donc $3n$ jetons), on aurait $4n$. Mais 2014 n'est pas divisible par 4, donc c'est impossible.

Solution de l'exercice 10 Supposons que les arbres sont alternés entre des cerisiers et des pommiers. On va compter le nombre de corbeaux posés sur des cerisiers. Au début il y a 11 corbeaux sur des cerisiers, et à la fin soit 0, soit 22 selon l'espèce de l'arbre sur lequel tous les corbeaux sont posés. Mais à chaque étape, on peut vérifier que le nombre de corbeaux sur des cerisiers reste le même, augmente de 2 ou diminue de 2. En particulier il ne change pas de parité. On ne peut donc pas passer de 11 à 22 ou 0.

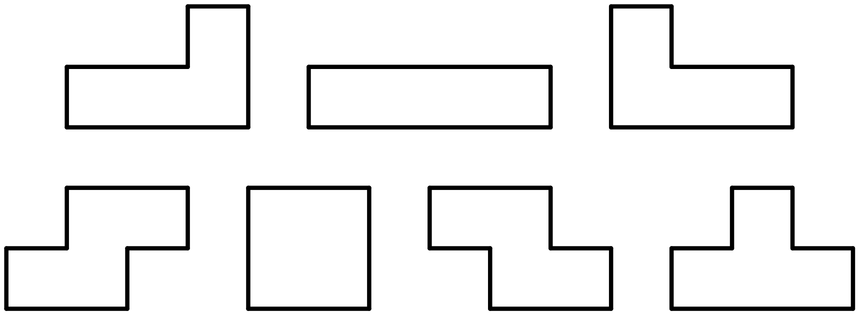
Solution de l'exercice 11 Je vous laisse vérifier l'equation suivante :

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ainsi la somme des carrés des trois nombres du triplé ne change jamais. Il suffit maintenant de vérifier que la somme des carrés du triplet initial n'est pas la même que celle du triplet final.

Solution de l'exercice 12 Un peu de manipulations permet de montrer que l'on peut finir avec tous les caméléons rouges. Montrons qu'il est impossible de finir avec seulement des caméléons verts. Nous allons considérer la quantité "nb de rouges - nb de verts". Quand deux caméléons se rencontrent, cette quantité va soit rester constante, soit augmenter de 3, soit diminuer de 3. Ainsi si on veut qu'elle finisse à 0, il faut qu'elle commence à un multiple de 3. Mais au départ, elle vaut 10.

Solution de l'exercice 13 Il est facile de vérifier qu'il y a 7 pièces différentes au Tetris :



Ensuite, passons au pavage d'un rectangle 4×7. Si on colorie les cases en échiquier, on se retrouve avec 14 cases blanches et 14 noires. Tous les tetraminos recouvrent 2 cases noires et 2 blanches, quelle que soit la manière de les mettre, sauf le T, qui recouvre 3 blanches et 1 noire ou 3 noires et 1 blanche. Il est donc impossible de faire le pavage.

Solution de l'exercice 14 Il est facile de faire monter une bille à hauteur 1, 2 et 3, et avec un peu de patience on peut en faire monter une à hauteur 4, mais c'est la limite. Notons φ le nombre d'or, qui vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ensuite il faut faire la somme sur tous les points de coordonnées (x, y) sur lesquelles il y a des billes de $\varphi^{y-|x|}$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que cette quantité reste constante ou diminue lorsqu'on fait sauter les billes et que dans la position de départ elle vaut φ^5. Ceci démontre qu'il est impossible de faire monter une bille à hauteur 5 ou plus.