DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Louis NEBOUT
STAGE : Montpellier 2012

Exercices sur les stratégies de base

- Énoncés -

Exercice 1 On choisit 55 entiers distincts entre 1 et 99. Peut-on trouver parmi ces entiers 2 dont la différence est 9 ? Même question pour 10, 11, 12 et 13.

Exercice 2 Montrer que, pour tout $n > 5$, il est possible de découper un carré en n petits carrés. Montrer que ce n'est pas possible pour n valant 2 ou 3.

Exercice 3 On prend tous les piques d'un jeu de cartes, et on joue à la réussite suivante : on regarde le numéro i de la carte du dessus (avec la convention que le valet vaut 11, la dame 12 et le roi 13). On prend les i premières cartes du paquet, on les retourne, puis on les repose sur le dessus du paquet. Par exemple, on passe de V,4,9,1,D,10,3,5,R,2,8,6,7 à 8,2,R,5,3,10,D,1,9,4,V,6,7, où la carte la plus à gauche est celle au dessus du paquet. On gagne si, à un moment donné, la carte du dessus est l'as. Prouver que l'on gagne à tous les coups.

Exercice 4 Alice et Bob jouent au jeu suivant : 2012 points sont disposés régulièrement autour d'un cercle. Alice commence. Les deux joueurs jouent chacun leur tour, et ont le droit de retirer un des points, ou de retirer 2 points consécutifs (plus précisément, deux points qui étaient consécutifs dans la position de départ à 2012 points). Le gagnant est celui qui efface le dernier point. Qui gagne ? Même question si on modifie la définition des points consécutifs en disant qu'il ne devaient pas forcément être consécutifs dans la position de départ.

Exercice 5 Montrer qu'un polyèdre convexe possède toujours deux faces qui ont le même nombre d'arêtes. (Un polyèdre est convexe s'il n'a pas de "renfoncement" ou, plus formellement, si pour tout couple de points situés à l'intérieur du polyèdre, le segment reliant ces deux points est entièrement situé à l'intérieur du polyèdre).

- Corrigé -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> La question demande de trouver deux éléments vérifiant une même propriété, il faut donc penser immédiatement au principe des tiroirs. Il nous faut choisir des tiroirs tels que, si deux éléments sont dans le tiroir, alors leur différence est 9. On veut donc des tiroirs du style : $(1, 10)$. Regardons combien de tels tiroirs on peut construire. On commence par :

$$(1, 10), (2, 11), (3, 12), \ldots, (8, 17), (9, 18).$$

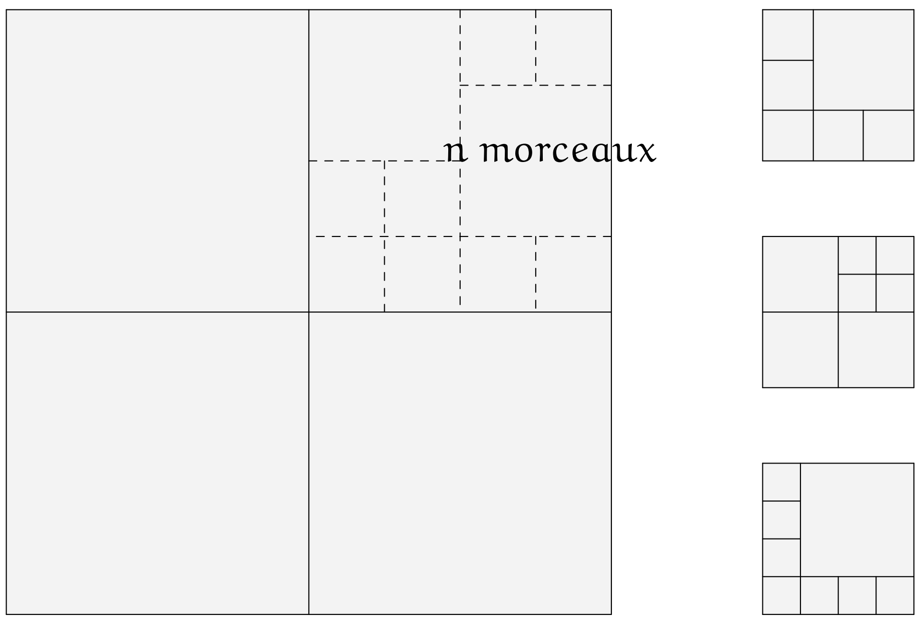
Ensuite, on ne peut pas mettre le tiroir $(10, 19)$, car 10 est déjà dans le tiroir $(1, 10)$. On continue donc par le tiroir $(19, 28)$, et ainsi de suite. Cette construction permet de grouper les entiers en tiroirs par paquets de 18. On peut donc grouper tous les entiers inférieurs à $18 \cdot 5 = 90$ en 45 tiroirs. Il nous reste les 9 entiers compris entre 91 et 99, que l'on ne peut plus grouper par paires. Ce n'est pas grave, on crée simplement un nouveau tiroir pour chacun de ces entiers. On a $45+9 = 54$ tiroirs, 55 entiers, il y en a donc deux dans le même tiroir, et leur différence est forcément égale à 9. Cette méthode marche de la même façon pour 10,12 et 13 (elle permet même de prouver des résultats plus forts : par exemple on n'a pas besoin de 55 entiers pour être sûr que deux d'entre eux ont pour différence 10).

Par contre, cela ne marche pas pour 11 : dans ce cas, les tiroirs commencent par $(1, 12)$, $(2, 13), \ldots, (11, 22)$: ils sont groupés par paquets de 22. On peut donc grouper les $22 \cdot 4 = 88$ premiers entiers en 44 tiroirs, et on met les 11 entiers restant de 89 à 99 dans des tiroirs à part, ce qui nous fait $44 + 11 = 55$ tiroirs au total, ce qui ne permet pas de conclure.

Cherchons donc un contre exemple permettant de prouver que ce n'est pas toujours possible. Pour cela, il faut que chacun de nos 55 tiroirs contienne exactement 1 entier (si un de nos tiroirs est vide, alors on a au plus 44 tiroirs non vides, et par principe des tiroirs un de ces 44 tiroirs contient deux entiers). On doit donc nécessairement prendre les entiers de 89 à 99. Maintenant, regardons le tiroir $(77, 88)$. On doit choisir un entier de ce tiroir, mais cela ne peut pas être 88 car on a déjà pris 99 et que $99 - 88 = 11$. On est donc forcé de prendre 77. En répétant ce raisonnement on voit que, pour avoir un contre exemple, il faut obligatoirement choisir les 55 entiers de la sorte : ceux de 1 à

11, puis ceux de 23 à 33, puis ceux de 45 à 55, puis ceux de 67 à 77, et enfin ceux de 89 à 99. On vérifie facilement que ce contre-exemple fonctionne. Il aurait certes été facile de trouver ce contre-exemple soi-même à la main, mais on voit que la méthode du principe des tiroirs permet de montrer quelque chose de plus fort : l'unicité du contre-exemple.

Solution de l'exercice 2 En faisant des essais à la main, on voit facilement que le découpage est possible pour n valant 6, 7 ou 8, comme le montre la figure suivante :



Ces essais nous montrent aussi autre chose : si on a un découpage d'un carré en n petits carrés, alors on peut facilement construire un découpage en $n+3$ petits carrés : il suffit de découper en 4 un carré du découpage d'origine.

Cela permet de terminer par récurrence, mais c'est une récurrence un peu plus générale que celle enseignée par Theresia, dans laquelle on se servait uniquement de la propriété au rang n pour la prouver au rang $n+1$.

Proposition 1. Principe de récurrence forte : si une propriété P est vraie au rang 1 (initialisation), et si le fait que P est vraie pour tous les rangs inférieurs à n implique le fait qu'elle soit vraie au rang $n+1$ (propagation), alors la propriété est vraie pour tout n.

Cela paraît logique. Une preuve par récurrence, c'est une façon plus formelle de rédiger des démonstrations "de proche en proche". Et si on démontre une propriété P de proche en proche, quand on veut la prouver au rang 100, on sait déjà qu'elle est vraie aux rangs allant de 1 à 99, donc on peut utiliser tout cela dans notre preuve du rang 100.

Voyons comment rédiger cette récurrence pour notre exercice : on initialise en prouvant que le découpage est possible aux rangs 6, 7 et 8. Maintenant, soit n plus grand que 8, supposons que le découpage est possible à tous les rangs compris entre 6 et n. Alors en particulier le découpage est possible au rang $n-2$ (car comme $n \geqslant 8$, $n-2 \geqslant 6$), et en découpant en 4 un carré du découpage en $n-2$ carrés, on obtient un découpage en $n+1$ carrés, ce qui clôt la récurrence.

Pour montrer que c'est impossible pour 2 ou 3, on pourrait faire des petits raisonnements géométriques plus ou moins vaseux. Mais, comme souvent avec les résultats qui paraissent intuitivement évidents, mais qui semblent délicats à rédiger de façon claire, le principe des tiroirs nous donne un argument massue permettant de tuer le problème. En effet, supposons que l'on ait un découpage en 3 carrés, alors par principe des tiroirs un de ces 3 carrés comporte 2 des sommets du carré d'origine, contradiction.

Solution de l'exercice 3 Après quelques essais, on se fait la réflexion suivante : si, au bout d'un moment, on tombe sur le roi, alors on le met au fond et on peut l'ignorer pendant le reste de la réussite, on s'est donc ramené à un cas plus simple, cela donne l'idée de faire une preuve par récurrence.

Montrons par récurrence sur n que, si on démarre la réussite avec un jeu de n cartes numérotées de 1 à n, alors on gagne. L'initialisation est évidente : avec un jeu de 1 carte on a immédiatement gagné. Supposons le résultat vrai pour un jeu de n cartes, et montrons-le avec un jeu de $n+1$ cartes. Supposons que, au bout d'un moment, on tombe sur la carte $n+1$. Alors on met cette carte au fond, et on peut l'ignorer pendant le reste de la réussite. On s'est donc ramené au cas avec n cartes, que l'on sait résoudre par hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que l'on ne tombe jamais sur la carte $n+1$ (et que cette carte n'est pas placée en dernier). Dans ce cas aussi, on peut ignorer cette carte, et on peut aussi ignorer la carte placée en dernière position, car elle ne bougera jamais. Échangeons donc la carte $n+1$ et la carte placée en dernier (par exemple, on passe de $34,4,5,n+1,9,\ldots, 8$ à $34,4,5,8,9,\ldots, n+1$). Cela ne changera pas le déroulement de la réussite, et comme la carte $n+1$ est au fond, on s'est à nouveau ramené au cas du jeu à n cartes, qui gagne par hypothèse de récurrence. Cela termine la preuve.

Une autre observation qui permet de résoudre l'exercice est de remarquer que le paquet de carte se trie de plus en plus au cours de la réussite. Pour pouvoir l'exploiter, il faut trouver un moyen de l'énoncer formellement. Le nombre de cartes à la bonne position n'augmente pas forcément au cour de la réussite, un retournement pouvant changer les positions de plein de petites cartes, mais ce retournement met alors une carte plus grande à sa place, l'idée est donc d'attribuer une plus grande importance aux grandes cartes.

À chaque situation on va associer la liste des cartes qui sont à la bonne position, dans l'ordre décroissant. Par exemple, à la situation D, 2, 4, 6, 5, R, 10, 8, 1, 3, V, 9, 7, on associe la liste $(V, 8, 5, 2)$. On a envie de dire que la liste (5) est plus triée que la liste $(4, 3, 2)$, on décide donc d'utiliser l'ordre du dictionnaire (aussi appelé l'ordre lexicographique) : si on a deux listes, pour voire laquelle est la plus triée, on regarde l'élément le plus à gauche. Si ces deux éléments sont différents, on dit que la liste ayant le plus grand premier élément est la plus grande. S'ils sont identiques, on regarde l'élément suivant, et ainsi de suite. On voit facilement que, à chaque étape, notre opération de retournement trie un peu plus la liste (par exemple, après un retournement de D, 2, 4, 6, 5, R, 10, 8, 1, 3, V, 9, 7, on obtient la liste $(D, 3)$, plus triée que $(V, 8, 5, 2)$ car elle commence par une dame). Or le nombre de listes possibles est fini, donc on ne peut pas continuer à trier indéfiniment. , et bout d'un moment notre réussite s'arrête. On a même montré un résultat un peu plus fort : le nombre de listes est 2^{13}, donc notre réussite s'arrêtera toujours en moins de 2^{13} étapes.

La technique utilisée ici est la technique des monovariants. Un monovariant est une quantité qui, au cours d'un processus, se déplace toujours dans le même sens. Ici, c'était une liste qui se triait, cela peut aussi par exemple être un certain entier qui augmente. Si notre monovariant ne peut pas augmenter indéfiniment, alors cela prouve que le processus s'arête. C'est très important de retenir ceci pour traiter les problèmes parlant de processus. Pour résumer :

– si un problème demande si un processus peut atteindre un certain état, il faut essayer de trouver des invariants
– si un problème demande de prouver qu'un processus s'arête, il faut essayer de trouver des monovariants.

Solution de l'exercice 4 Nous allons prouver que Bob gagne à tous les coups. Il y a un principe important à connaître pour traiter ces exercices de jeu : 2012, c'est beaucoup, et si on joue un peu n'importe comment, on arrive rapidement à des positions très embrouillés, et à des études de cas affreuses et totalement inextricables. Pour pouvoir prouver ce résultat, il faut donc, à tous les instants, essayer de conserver la position la plus simple possible. Bob à donc intérêt à essayer, après chaque coup d'Alice, de revenir à une position simple.

Ici, la façon de faire est de jouer symétriquement : après qu'Alice efface ses points, Bob efface les points situés à l'opposé des points effacés par Alice. Ainsi, après chaque tour de Bob, on sera revenu à une position symétrique. Avec cette stratégie, la symétrie est donc un invariant. Comme il n'est pas possible de gagner en un coup à partir d'une position symétrique, Alice ne pourra jamais gagner.

Si on change les règles, la situation devient différente. En effet la stratégie précédente ne marche pas toujours : Si Alice arrive à la position comportant 2 points diamétralement opposés, elle gagne en un coup. En fait, dans ce cas Alice possède même une stratégie gagnante : elle commence par enlever 2 points quelconques, pour se ramener à une position à 2010 points. Ensuite, à chaque coup, si Bob retire un point Alice en retire 2, et inversement. Ainsi, après chaque tour d'Alice, le nombre de points sera divisible par 3, et comme il est impossible de gagner en un coup à partir d'une position où le nombre de points est multiple de 3, Alice gagne. On a utilisé exactement les mêmes principes que dans le cas précédent : on a réussi à simplifier les positions, en remarquant que la seule chose importante était le reste de la division du nombre de points par 3, puis, en adoptant une stratégie symétrique, on a réussi à trouver un invariant résolvant le problème.

Solution de l'exercice 5 On doit montrer que deux objets vérifient ensemble une propriété, il faut donc penser au principe des tiroirs. La façon naturelle de faire est de prendre comme chaussettes les faces du polynôme, et comme tiroirs les nombres d'arêtes de chacune des faces. Ainsi, si on a deux chaussettes dans le même tiroir (par exemple deux faces dans le tiroir "3"), alors ces deux faces auront le même nombre d'arêtes (dans notre exemple, ce seront des triangles). Il faut maintenant essayer de compter les chaussettes et les tiroirs.

Comme le polyèdre est par définition fini, la plupart des tiroirs seront inutiles. Plus précisément, supposons que la face du polyèdre ayant le plus d'arêtes possède m arêtes. Alors, les seuls tiroirs utiles seront les tiroirs $(3, 4, 5, \dots, m)$: il y en a $m - 2$. Pour conclure, il nous suffit de prouver que le polyèdre a plus de $m-1$ faces. Regardons une face à m arêtes. Cette face a exactement m faces voisines (c'est la que l'on utilise l'hypothèse de convexité), ce qui termine l'exercice.