

## Algèbre linéaire

Introduction : Commençons par quelques rappels :

- Les ensembles couramment utilisés :  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .
- Produit cartésien de deux ensembles  $A$  et  $B$  :  $A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}$ .
- Intersection de deux ensembles  $A$  et  $B$  :  $A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$ .
- Réunion de deux ensembles  $A$  et  $B$  :  $A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$ .
- Somme de deux ensembles  $A$  et  $B$  :  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ .

### I) Groupes et espaces vectoriels.

#### 1) Groupes.

Définition. Un groupe est la donnée d'un ensemble  $G$  et d'une loi de composition interne notée  $*$  définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

et telle que  $(G, *)$  vérifie les trois propriétés suivantes :

- (1) (Elément neutre) Il existe  $e$  dans  $G$  tel que  $\forall x \in G, e * x = x * e = x$ .
- (2) (Associativité) Pour tout  $x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$ .
- (3) (Elément inverse) Pour tout  $x$  dans  $G$ , il existe  $x'$  dans  $G$  tel que :  $x * x' = x' * x = e$ . On pourra noter :  $x' = x^{-1}$  à ne pas confondre avec la notation  $\frac{1}{x}$ .

Si de plus  $\forall x, y \in G, x * y = y * x$ , on dit que la loi  $*$  est commutative et que  $(G, *)$  est un groupe commutatif ou abélien.

Exemples :  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe abélien. En effet, la loi  $+$  est bien une loi de composition interne de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  (la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif),  $0 \in \mathbb{Z}$  est élément neutre pour la loi  $+$ ,  $+$  est associative et pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tel que :  $x + y = y + x = 0$  : on prend  $y = -x$ . Enfin, la loi  $+$  est commutative.

Par contre,  $(\mathbb{N}, +)$  n'est pas un groupe. En effet,  $2 \in \mathbb{N}$  mais  $2$  n'a pas d'inverse dans  $\mathbb{N}$  muni de  $+$  car  $-2 \notin \mathbb{N}$ .

Propriétés. Soit  $(G, *)$  un groupe.

- 1) L'élément neutre de  $G$  est unique.
- 2) L'inverse  $y$  d'un élément  $x$  de  $G$  est unique.
- 3) L'inverse de l'inverse de  $x$  est  $x$ .
- 4) Pour tous  $x, y \in G$ ,  $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ .
- 5) Pour tous  $x, y, z \in G$ , si  $x * y = x * z$  alors  $y = z$ .

### Preuves.

1) Soient  $e$  et  $e'$  deux éléments neutres de  $G$ .

$e'$  est élément neutre de  $G$  donc  $e' * e = e * e' = e$  (c'est le point (1) de la définition pour  $x = e$ ).

$e$  est élément neutre de  $G$  donc  $e * e' = e' * e = e'$ . Ainsi,  $e = e'$ .

2) Soit  $x \in G$  d'inverses :  $y \in G$  et  $z \in G$ .

On a alors :  $x * y = e$  ainsi  $z * x * y = z * e = z$  de plus,  $z * x = e$  donc  $z * x * y = e * y = y$  ainsi  $y = z$ .

3) Soit  $x \in G$ .

On a :  $(x^{-1})^{-1} * x^{-1} = e$  puisque  $(x^{-1})^{-1}$  est l'inverse de  $x^{-1}$ .

De plus,  $x * x^{-1} = e$  (car  $x$  est l'inverse de  $x^{-1}$ ) donc par unicité de l'inverse (propriété 2), on a :  $x = (x^{-1})^{-1}$ .

4) Soient  $x, y \in G$ . On note :  $x^{-1} \in G$  l'inverse de  $x$  et  $y^{-1} \in G$  celui de  $y$ .

On a :  $(x * y)^{-1} * (x * y) = e$  donc :  $(x * y)^{-1} * (x * y) * y^{-1} = e * y^{-1} = y^{-1}$ .

Par associativité de  $*$ , on a :  $(x * y) * y^{-1} = x * (y * y^{-1}) = x * y * y^{-1} = x$ . Dès lors, on obtient :  $(x * y)^{-1} * (x * y) * y^{-1} = (x * y)^{-1} * x = y^{-1}$  ainsi,  $(x * y)^{-1} * x * x^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$  donc :  $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ .

5) Soient  $x, y, z \in G$  tels que :  $x * y = x * z$ . On a alors :  $x^{-1} * x * y = x^{-1} * x * z$  donc  $y = z$ .

## 2) Espaces vectoriels.

Dans ce qui suit on notera  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{K}$  est appelé : corps des scalaires). Dans les exemples, on ne parlera que d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ .

Définition. On appelle  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ) tout ensemble non vide  $E$  muni de deux lois :  $+$  et  $\times$  vérifiant :

- 1)  $(E, +)$  est un groupe commutatif (i.e :  $+$  est une loi de composition interne de  $E \times E$  dans  $E$ ,  $+$  est associative,  $E$  possède un unique élément neutre, tout élément de  $E$  a un unique inverse et  $+$  est commutative).
- 2) Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda \times (\mu \times x) = (\lambda\mu) \times x$  et  $1 \times x = x$ .
- 3)  $\times$  est distributive par rapport à  $+$  dans  $E$  et dans  $\mathbb{K}$ .

Les éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel sont appelés vecteurs et les éléments de  $\mathbb{K}$  sont appelés scalaires.

### Exemples.

- 1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2)  $\mathbb{R}[X]$  : l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Remarque :  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie et  $\mathbb{R}[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie. On étudiera par la suite la notion de dimension d'un espace vectoriel.

En général, il est peu pratique de démontrer qu'un ensemble donné est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec la définition, il est plus facile de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Définition. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (dorénavant abrégé : s.e.v) si  $F$  vérifie les conditions suivantes :

- 1)  $0 \in F$ .
- 2)  $\forall x, y \in F, x + y \in F$  ( $F$  est stable par addition).
- 3)  $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$  ( $F$  est stable par la multiplication par un scalaire).

Remarques.

- 1) Tout s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- 2) Les points 2 et 3 de la définition peuvent être fusionnés en un seul : au lieu de montrer que  $F$  est stable par addition et par multiplication par un scalaire, on peut montrer que  $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda x + \mu y \in F$ , autrement dit : que  $F$  est stable par combinaisons linéaires.

Propriété. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .

Alors,  $F + G$  et  $F \cap G$  sont des s.e.v de  $E$ .

Définition : sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $e_1, \dots, e_n$   $n$  vecteurs de  $E$ . On note  $Vect(e_1, \dots, e_n)$  le s.e.v engendré par les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des  $e_i, 1 \leq i \leq n$ . On peut écrire :  
$$x \in Vect(e_1, \dots, e_n) \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{K}, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Exemple. On considère :  $E = \mathbb{R}^2$  et  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ .

On a :  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1, 1)\}$ .

Tous les vecteurs de  $F$  sont alors des combinaisons linéaires du vecteur  $(1, 1)$ .

## II) Applications linéaires.

Définition. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On dit que  $f : E \longrightarrow F$  est linéaire si :

- 1)  $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$ .
- 2)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$ , l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Remarque. Les points 1 et 2 de la définition peuvent être fusionnés en un seul : on dit que  $f$  est linéaire si :  $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ .

Définitions. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

- 1) On dit que  $f$  est surjective si  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que :  $y = f(x)$ .

- 2) On dit que  $f$  est injective si  $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ .  
 3) On dit que  $f$  est bijective si  $f$  est injective et surjective.

Vocabulaire. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une application linéaire de  $E$  dans lui-même est appelée : endomorphisme de  $E$ .

Une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels est un isomorphisme.

Un endomorphisme de  $E$  bijectif est un automorphisme de  $E$ .

Définition-propriété. Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

On appelle image de  $f$  le s.e.v de  $F$  :  $\text{Im } f = f(E) = \{f(x), x \in E\}$ .

Définition-propriété. Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

On appelle noyau de  $f$  le s.e.v de  $E$  :  $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : f(x) = 0\}$ .

Propriété.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

- 1)  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$ .  
 2)  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .

### III) Familles de vecteurs et dimension d'un espace vectoriel.

Définitions. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1) On dit qu'une famille  $F = \{e_1, \dots, e_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de vecteurs de  $E$  est une famille génératrice de  $E$  si tous les vecteurs de  $E$  peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille  $F$ , i.e :  $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ .

2) On dit qu'une famille  $F = \{e_1, \dots, e_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de vecteurs de  $E$  est une famille libre si on a :  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . On dit que les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  sont linéairement indépendants.

3) On dit qu'une famille  $B = (e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs de  $E$  est une base de  $E$  si elle est libre et génératrice de  $E$ .

4) On dit que  $E$  est de dimension finie si  $E$  admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base incomplète. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et non réduit à  $\{0\}$ . Soient  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$  une famille libre de  $E$  et  $\{g_1, \dots, g_q\}$  une famille génératrice de  $E$ .

Alors il existe un entier  $n \geq p$  et une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  tels que :

- 1) pour tout  $i \leq p$ , on a :  $e_i = \ell_i$  ;  
 2) pour tout  $i > p$ , on a :  $e_i \in \{g_1, \dots, g_q\}$ .

Démontrons le théorème de la base incomplète ! Pour ce faire, nous allons commencer par démontrer une propriété intermédiaire.

Propriété. Si  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$  est une famille libre de  $E$  ( $E$  étant un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) et si  $u$  est un vecteur de  $E$  alors  $u$  est combinaison linéaire de  $\ell_1, \dots, \ell_p$  si et seulement si la famille  $\{\ell_1, \dots, \ell_p, u\}$  est liée.

Démonstration. Le sens direct repose sur la définition d'une famille liée.

Réciproquement, supposons que la famille  $\{\ell_1, \dots, \ell_p, u\}$  est liée alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$  tels que :  $\lambda_1 \ell_1 + \dots + \lambda_p \ell_p + \lambda_{p+1} u = 0$  et l'un de ces coefficients au moins n'est pas nul. Si  $\lambda_{p+1} = 0$  alors on obtient une combinaison linéaire de  $\ell_1, \dots, \ell_p$  nulle où au moins l'un des  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  est non nul donc ceci contredit la liberté de la famille  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$ . Donc  $\lambda_{p+1} \neq 0$  et alors on peut écrire :  $u = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}} \ell_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} \ell_p$  ainsi,  $u$  est combinaison linéaire de  $\ell_1, \dots, \ell_p$ .

Démonstration du théorème de la base incomplète. Distinguons deux cas.

1er cas : On suppose que dans ce cas, tous les vecteurs de  $\{g_1, \dots, g_q\}$  sont combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$ . Si  $u$  est un vecteur quelconque de  $E$  alors il est combinaison linéaire des vecteurs  $g_1, \dots, g_q$  donc des vecteurs  $\ell_1, \dots, \ell_p$ . Autrement dit : la famille  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$  est génératrice de  $E$ . Comme cette dernière famille est libre, c'est une base de  $E$  et donc  $n = p$ .

2ème cas : on suppose qu'il existe un vecteur  $g_j$  de la famille  $\{g_1, \dots, g_q\}$  qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs  $\ell_1, \dots, \ell_p$  donc par la propriété précédente, la famille  $\{\ell_1, \dots, \ell_p, g_j\}$  est libre. Soit alors  $n$  le plus grand entier, nécessairement compris entre  $p + 1$  et  $p + q$ , tel qu'il existe une famille libre  $\{e_1, \dots, e_n\}$  vérifiant :

1) pour tout  $i \leq p$ ,  $e_i = \ell_i$ .

2) pour tout  $i > p$ ,  $e_i \in \{g_1, \dots, g_q\}$ .

Montrons alors que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$ . Il suffit de montrer que cette famille est génératrice puisque par construction elle est libre. Par définition de  $n$ , en ajoutant n'importe quel vecteur de  $\{g_1, \dots, g_q\}$  à  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , on obtient une famille liée. Autrement dit, tout vecteur de  $\{g_1, \dots, g_q\}$  est combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ . Puisque tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\{g_1, \dots, g_q\}$  alors tout vecteur de  $E$  est aussi combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\{e_1, \dots, e_n\}$  donc la famille  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est génératrice de  $E$ .

Corollaire. Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit à  $\{0\}$  admet au moins une base.

Démonstration. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  et de dimension finie.

Comme  $E \neq \{0\}$ , il existe au moins un vecteur  $\ell \in E$  tel que  $\ell \neq 0$ . Donc la famille  $\{\ell\}$  est libre. De plus,  $E$  est de dimension finie donc il a une famille génératrice :  $\{g_1, \dots, g_q\}$  finie. L'existence d'une base de  $E$  est alors une conséquence du théorème de la base incomplète.

Remarque. Le théorème de la base incomplète affirme que l'on peut obtenir une base en ajoutant des éléments d'une famille génératrice à une famille libre. La base obtenue aura donc au moins autant d'éléments que la famille libre considérée. De cette remarque, découle la propriété ci-dessous :

Propriété (admise). Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  et de dimension finie.

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$  une famille libre de  $E$ . Alors  $p \leq n$ .

Théorème. Toutes les bases d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et non réduit à  $\{0\}$  ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et non réduit à  $\{0\}$ .

Soient  $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B_2 = (f_1, \dots, f_p)$  deux bases de  $E$ . Montrons que  $n = p$ .

Puisqu'en particulier  $B_1$  est une famille libre et  $B_2$  est une base de  $E$ , on a :  $n \leq p$  mais  $B_1$  est une base de  $E$  et  $B_2$  est une famille libre donc  $p \leq n$ . Ainsi,  $n = p$ .

Définition. Etant donné  $E$  : un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, non réduit à  $\{0\}$ , le nombre d'éléments de chacune des bases de  $E$  est appelé : dimension de  $E$ . On note  $\dim E$  la dimension de l'espace vectoriel  $E$ .

Propriété. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ .

Alors  $\dim F \leq n$  et  $\dim F = n$  si et seulement si  $F = E$ .

Preuve. Pour montrer que  $\dim F \leq n$ , supposons par l'absurde que  $\dim F > n$ . Alors, il existe  $n + 1$  vecteurs libres appartenant à  $F$ . Comme  $F$  est un s.e.v de  $E$ , il existe alors  $n + 1$  vecteurs linéairement indépendants dans  $E$ , ce qui contredit le fait que  $\dim E = n$ . Donc  $\dim F \leq n$ .

Si  $F = E$  alors il est évident que  $\dim F = \dim E = n$ . Supposons maintenant que  $\dim F = n$ . Alors  $F$  admet une base composée de  $n$  éléments :  $(f_1, \dots, f_n)$ . Comme  $F$  est un s.e.v de  $E$ , les vecteurs  $f_1, \dots, f_n$  appartiennent à  $E$ . Ainsi,  $E$  admet  $n$  vecteurs linéairement indépendants. De plus, comme  $\dim E = n$ , toutes les bases de  $E$  ont  $n$  éléments. Puisque la famille  $\{f_1, \dots, f_n\}$  est libre, on peut la compléter en une base de  $E$  qui doit avoir  $n$  éléments. La famille  $\{f_1, \dots, f_n\}$  ayant  $n$  éléments, on en déduit que c'est une base de  $E$ . Ainsi, toute base de  $F$  est une base de  $E$  donc  $F = E$ .

Théorème du rang (en dimension finie). Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire. Alors :

$$rgf + \dim \text{Ker } f = \dim E$$

où  $rgf$  désigne le rang de  $f$ , i.e : la dimension de l'image de  $f$ .

#### IV) Exercices.

##### Exercice 1.

On se place dans  $E = \mathbb{R}^2$  (qui est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

Soit  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Solution de l'exercice 1. On a bien sûr :  $(0, 0) \in F$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y') \in F$ .

On a :  $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$ . Montrons que  $\lambda u + \mu v \in F$  i.e :  $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = 0$ . Comme,  $u$  et  $v$  appartiennent à  $F$ , on a :  $x + y = 0$  et  $x' + y' = 0$ . On a alors :  $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = 0$  donc  $\lambda u + \mu v \in F$  donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Propriété. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .  
Alors,  $F + G$  et  $F \cap G$  sont des s.e.v de  $E$ .

Exercice 2.

- 1) Démontrer la propriété précédente.
- 2) On reprend les notations de la propriété précédente.  
L'ensemble  $F \cup G$  est-il toujours un s.e.v de  $E$  ?

Solution de l'exercice 2.

1) Montrons que  $F + G$  est un s.e.v de  $E$ .

Déjà,  $(0, 0) = (0, 0) + (0, 0)$  et  $(0, 0)$  appartient à  $F$  et à  $G$  donc il appartient à  $F + G$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, u, v \in F + G$ . Montrons que  $\lambda u + \mu v \in F + G$  i.e : que  $\lambda u + \mu v$  peut s'écrire comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ . Comme  $u$  et  $v$  appartiennent à  $F + G$ , on en déduit qu'il existe  $u_1, v_1 \in F$  et  $u_2, v_2 \in G$  tels que :  $u = u_1 + u_2$  et  $v = v_1 + v_2$ . Dès lors,  $\lambda u + \mu v = \lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = \lambda u_1 + \mu v_1 + \lambda u_2 + \mu v_2$ . Comme  $u_1, v_1 \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $F$  est un s.e.v de  $E$ , on a :  $\lambda u_1 + \mu v_1 \in F$ . De même, on montre que :  $\lambda u_2 + \mu v_2 \in G$ . Donc  $\lambda u + \mu v$  s'écrit bien comme une somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  donc il appartient à  $F + G$ . Ainsi,  $F + G$  est un s.e.v de  $E$ .

Montrons que  $F \cap G$  est un s.e.v de  $E$ .

$0 \in F$  et  $0 \in G$  donc  $0 \in F \cap G$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, u, v \in F \cap G$ . Alors  $u \in F$  et  $v \in F$  donc  $\lambda u + \mu v \in F$  car  $F$  est un s.e.v de  $E$ . De plus,  $u \in G$  et  $v \in G$ , donc  $\lambda u + \mu v \in G$  car  $G$  est un s.e.v de  $E$ . Ainsi,  $\lambda u + \mu v \in F \cap G$ . Donc  $F \cap G$  est un s.e.v de  $E$ .

2) Soient  $F = Vect\{(1, 0)\}$  et  $G = Vect\{(0, 1)\}$ .  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ . On a :  $(1, 0) \in F$  donc  $(1, 0) \in F \cup G$  et  $(0, 1) \in G$  donc  $(0, 1) \in F \cup G$  mais :  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$  car  $(1, 1) \notin F$  et  $(1, 1) \notin G$ . Donc  $F \cup G$  n'est pas toujours un s.e.v de  $E$ .

Exercice 3.

On note :  $E = \mathbb{R}^3$ .

On considère les ensembles  $F$  et  $G$  tels que :  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x + y = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$ . Déterminer les vecteurs qui engendrent  $F$  et ceux qui engendrent  $G$ .

Solution de l'exercice 3. On a :  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y = -x, x = x\} = \{(x, -x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, 0), x \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1, -1, 0)\}$ .

Par ailleurs,  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y + 3z, y = y, z = z\} = \{(-2y + 3z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-2y, y, 0) + (3z, 0, z), y, z \in \mathbb{R}\} = Vect\{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ .

Propriété.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

- 1)  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$ .
- 2)  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .

Exercice 4. Démontrer les points 1 et 2 de la propriété précédente.

#### Solution de l'exercice 4.

1) Sens direct : supposons que  $f$  est injective et montrons que  $\text{Ker } f = \{0\}$ . Soit  $x \in \text{Ker } f$  alors  $f(x) = 0 = f(0)$  donc  $x = 0$  par injectivité de  $f$ .

Réciproque : supposons que  $\text{Ker } f = \{0\}$  et montrons que  $f$  est injective. Soient  $x, y \in E$  tels que :  $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x - y) = 0$  (par linéarité de  $f$ ) ainsi,  $x - y \in \text{Ker } f$  mais comme  $\text{Ker } f = \{0\}$ , on en déduit que  $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ .

2) Sens direct :  $f$  est surjective donc  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que :  $y = f(x)$  mais par la définition de l'image de  $f$ , on a directement :  $y \in \text{Im } f$ . Donc  $F \subset \text{Im } f$  (et l'autre inclusion étant claire car  $\text{Im } f$  est un s.e.v de  $F$ ), on en déduit que  $\text{Im } f = F$ .

Réciproque : supposons que  $\text{Im } f = F$  alors par définition de l'image,  $\forall y \in \text{Im } f, \exists x \in E$  tel que :  $y = f(x)$ , comme  $\text{Im } f = F$ , on en déduit que  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que :  $y = f(x)$ . Donc  $f$  est surjective.

Exercice 5. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, 2x + 2y) \end{aligned}$$

1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

2) Déterminer  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$ .

3) L'application linéaire  $f$  est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Solution de l'exercice 5. Voici une proposition de rédaction. Bien sûr, ce n'est pas la seule, on aurait pu utiliser le théorème du rang ou raisonner avec des bases : on montrera ces deux façons de rédiger dans d'autres exos.

1) Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ .

On a :  $f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 2(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y')) = (\lambda(x + y), \lambda(2x + 2y)) + (\mu(x' + y'), \mu(2x' + 2y')) = \lambda f(u) + \mu f(v)$  donc  $f$  est linéaire.

$f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  donc  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

2) Déterminons  $\text{Im } f$  : soit  $v = (a, b) \in \text{Im } f \Rightarrow \exists u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, v = f(u) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ b = 2a \end{cases}$  ainsi, on obtient que : si  $v = (a, b) \in \text{Im } f$ , alors  $b = 2a$ .

Réciproquement, si  $(a, b)$  vérifie :  $b = 2a$  alors  $f(2a, -a) = (a, b)$  donc  $(a, b) \in \text{Im } f$ . Ainsi,  $\text{Im } f = \text{Vect}\{(1, 2)\}$ .

Déterminons  $\text{Ker } f$  : soit  $u = (x, y) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = x \end{cases}$ .

En conclusion, on a :  $\text{Ker } f = \text{Vect}\{(1, -1)\}$ .

3) On a :  $\text{Ker } f \neq \{0\}$  et  $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^2$  donc  $f$  n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.

#### Exercice 6.

Soient  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Montrer que les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Solution de l'exercice 6. Montrons que la famille  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^3$  puis libre. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On écrit :  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$  donc tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , ce qui prouve que la famille  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Montrons maintenant que cette famille est libre : soit  $\lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 = (0, 0, 0)$ ,  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ . On a immédiatement :  $\lambda = \mu = \gamma = 0$  donc la famille  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est libre.

La famille  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est libre et génératrice de  $\mathbb{R}^3$  donc c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 7.

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer une base de  $F$  puis la dimension de  $F$ .

Solution de l'exercice 7. On écrit :  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y - z, y = y, z = z\} = \{(-y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, 0) + (-z, 0, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ . Cette écriture nous permet de déduire que la famille  $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$  est génératrice de  $F$ . On remarque de plus que cette famille est libre. Ainsi, c'est une base de  $F$ . Comme elle comporte 2 éléments, on en déduit que  $F$  est de dimension 2 (il s'agit alors d'un plan vectoriel).

### Exercice 8.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) &\longmapsto XP(X) \end{aligned}$$

où  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n$  étant un entier naturel non nul).

1) Montrer que  $f$  est une application linéaire.

2) On note :  $P_i(X) = X^i, \forall i \in \mathbb{N}$ .

On admet que  $P_0(X), P_1(X), P_2(X)$  et  $P_3(X)$  forment une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et que  $P_0(X), P_1(X), P_2(X), P_3(X)$  et  $P_4(X)$  forment une base de  $\mathbb{R}_4[X]$ . Quelle est la dimension de  $\mathbb{R}_3[X]$  ? Quelle est la dimension de  $\mathbb{R}_4[X]$  ?

3) Calculer  $f(P_i(X)), \forall 0 \leq i \leq 3$ .

4) Démontrer la propriété suivante : soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies (supérieures ou égales à 1) et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire. Alors, l'image d'une base de  $E$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

Déduire de cette propriété une base puis la dimension de  $\text{Im } f$  (où  $f$  est l'application linéaire définie au début de l'exo).

5) Déduire de la question précédente que  $f$  est injective.

6) L'application linéaire  $f$  est-elle bijective ?

### Solution de l'exercice 8.

1) Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ .

$$f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)(X) = X(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda XP(X) + \mu XQ(X) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

Donc  $f$  est linéaire.

2) Avec les indications de l'énoncé, on a immédiatement :  $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$  et  $\dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$ .

3) On a :  $f(P_i(X)) = X^{i+1} = P_{i+1}(X) \forall 0 \leq i \leq 3$ .

4) Notons  $n = \dim E$ . Soit  $B_E = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Montrons que :  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ . Soit  $y \in \text{Im } f$  alors  $\exists x \in E$  tel que :  $y = f(x)$ . Comme  $x \in E$  et que  $B_E$  est une base de  $E$ , il existe un unique  $n$ -uplet de scalaires :  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ . On a alors :  $y = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$  (par linéarité de  $f$ ) i.e :  $y = f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)$ . Ainsi, tout  $y \in \text{Im } f$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs :  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$  donc la famille  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

On rappelle que :  $P_0(X), P_1(X), P_2(X)$  et  $P_3(X)$  forment une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et que :  $f(P_i(X)) = X^{i+1} = P_{i+1}(X) \forall 0 \leq i \leq 3$  ainsi (en utilisant le résultat que nous venons de démontrer), on en déduit que la famille  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ . Comme cette famille est libre puisque les polynômes  $P_0(X), P_1(X), P_2(X), P_3(X)$  et  $P_4(X)$  sont libres (ils forment une base de  $\mathbb{R}_4[X]$ ), on en déduit que c'est une base de  $\text{Im } f$  et donc  $\dim(\text{Im } f) = 4$ .

5) Par le théorème du rang, on a :  $\dim(\text{Ker } f) = 0$  donc  $\text{Ker } f = \{0\}$  donc  $f$  est injective.

6) L'application linéaire  $f$  n'est pas surjective (car  $\dim(\text{Im } f) \neq \dim(\mathbb{R}_4[X])$ ) donc elle n'est pas bijective.

### Exercice 9.

On note  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

1) Déterminer les deux suites géométriques non nulles, notées  $(a_n)$  et  $(b_n)$  avec  $a_0 = b_0 = 1$  qui appartiennent à  $E$ .

2) Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  forment une base de  $E$  et en déduire la dimension de  $E$ .

3) Soit  $(\mathcal{F}_n)$  la suite de  $E$  telle que :  $\mathcal{F}_0 = 0$  et  $\mathcal{F}_1 = 1$ .

Déterminer, à l'aide des questions précédentes, le terme général de la suite  $(\mathcal{F}_n)$ . De quelle suite s'agit-il ?

### Solution de l'exercice 9.

1) Soit  $(u_n)$  une suite géométrique non nulle de raison  $q$ , appartenant à  $E$  et telle que  $u_0 = 1$ .

On peut écrire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$ . Comme la suite  $(u_n)$  appartient à  $E$ , on a :  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \Rightarrow q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0$  (en simplifiant par  $q^n \neq 0$  car  $q \neq 0$ ) d'où :

$q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  ou  $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Réciproquement, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que pour tout entier

naturel  $n, a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$  et  $b_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$  appartiennent à  $E$ .

2) Montrons d'abord que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont libres. Soit :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda a_n + \mu b_n = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

En prenant  $n = 0$  puis  $n = 1$ , on obtient le système suivant : 
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

on résout ce système et on obtient :  $\lambda = \mu = 0$ . Ainsi, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont libres.

Montrons que ces deux suites engendrent  $E$ . Soit  $(u_n)$  une suite appartenant à  $E$ .

On prouve l'égalité suivante par récurrence (on trouve cette égalité en trouvant  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que :  $u_n = \lambda a_n + \mu b_n$ . Pour trouver  $\lambda$  et  $\mu$ , on prend  $n = 0$  puis  $n = 1$  et on résout le système obtenu) :

$$u_n = \left( \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \right) u_0 + \frac{u_1}{\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( -\frac{u_1}{\sqrt{5}} + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) u_0 \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (*).$$

La récurrence que l'on fait ici est une récurrence d'ordre 2 : pour démontrer cette formule (nommée  $(*)$ ) au rang  $n+2$ , on a besoin de la formule au rang  $n$  et au rang  $n+1$  (et on utilisera le fait que :  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ). Ainsi, on procède de la manière suivante : on vérifie d'abord  $(*)$  pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$ .

Puis, on suppose que l'on a l'égalité  $(*)$  aux rangs  $n$  et  $n+1$  et on prouve par un calcul que  $(*)$  est vraie au rang  $n+2$ . (On ne détaille pas les calculs car ils sont assez indigestes).

On a trouvé des réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \lambda a_n + \mu b_n$  donc les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  engendrent  $E$ .

Ainsi, ces deux suites forment une base de  $E$  et on en déduit que  $\dim E = 2$ .

3) La suite  $(\mathcal{F}_n)$  appartient à  $E$  et les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  forment une base de  $E$  donc il existe un unique couple de réels  $(\lambda, \mu)$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}_n = \lambda a_n + \mu b_n$ . En prenant  $n = 0$  puis  $n = 1$ , on obtient un système que l'on résout et on trouve :  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$  et  $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . On retrouve alors le terme général de la suite de Fibonacci très connue !

Exercice 10. On considère l'ensemble  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$ .

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Solution de l'exercice 10. On a bien sûr :  $(0, 0, 0) \in F$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $u = (x, y, z)$ ,  $v = (x', y', z') \in F$ . Montrons que  $\lambda u + \mu v \in F$ .

Comme,  $u, v \in F$ , on a :  $x + y - 2z = 0$  et  $x' + y' - 2z' = 0$ . On a :  $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ .

On calcule :  $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' - 2(\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - 2z) + \mu(x' + y' - 2z') = 0$ . Ainsi,  $\lambda u + \mu v \in F$  donc  $F$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ .

Exercice 11. On considère l'ensemble appelé  $E$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 tels que  $P(1) = 0$ .

Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$ . (On rappelle que  $\mathbb{R}_3[X]$  est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et que c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

Solution de l'exercice 11. Il est clair que le polynôme nul appartient à  $E$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $P, Q \in E$ . On a alors :  $P(1) = Q(1) = 0$ . Montrons que  $\lambda P + \mu Q \in E$  i.e que :  $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$ . On a :  $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$  donc  $\lambda P + \mu Q \in E$  et  $E$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

Exercice 12. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  étant un entier supérieur ou égal à 1) et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1) Montrer que si  $\text{Ker } f = \{0\}$  alors  $f$  est injective puis montrer que  $f$  est bijective.

- 2) En déduire que  $f$  est bijective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$ .
- 3) Montrer que si  $\text{Im } f = E$  alors  $f$  est surjective puis montrer que  $f$  est bijective.
- 4) En déduire que  $f$  est bijective si et seulement si  $\text{Im } f = E$ .
- 5) Donner alors deux conditions suffisantes pour montrer qu'un endomorphisme de  $E$  ( $E$  étant un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ ) est bijectif.

Solution de l'exercice 12.

- 1) La preuve de : " $\text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow f$  est injective" est donnée dans la solution de l'exercice 4. En utilisant le théorème du rang, on déduit que l'image de  $f$  est de dimension  $n = \dim E$ . De plus, l'image de  $f$  est un s.e.v de  $E$  donc  $\text{Im } f = E$ . Ainsi,  $f$  est surjective. L'application linéaire  $f$  est surjective et injective donc elle est bijective.
- 2) Si  $f$  est bijective alors elle est injective donc  $\text{Ker } f = \{0\}$ . Réciproquement, si  $f$  est injective, alors  $f$  est bijective d'après la question 1.
- 3) La preuve de : " $\text{Im } f = E \Rightarrow f$  est surjective" est donnée dans la solution de l'exercice 4. Comme pour la question 1, on utilise le théorème du rang pour montrer que  $\dim(\text{Ker } f) = 0$  donc  $\text{Ker } f = \{0\}$  donc  $f$  est injective. Comme  $f$  est aussi surjective,  $f$  est bijective.
- 4)  $f$  est bijective donc elle est surjective donc  $\text{Im } f = E$ . Réciproquement, si  $\text{Im } f = E$  alors, d'après la question 3,  $f$  est bijective.
- 5) Ainsi, pour montrer qu'un endomorphisme de  $E$  est bijectif, il suffit de montrer que son image est égale à l'espace  $E$  tout entier ou que son noyau est le singleton  $\{0\}$ .

Exercice 13. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. L'application  $f$  est appelée : forme linéaire. L'objectif de cet exercice est de montrer que le noyau de  $f$ , si  $f$  est non nulle, est un hyperplan inclus dans  $E$ , un hyperplan de  $E$  étant un espace de dimension :  $n - 1$ .

Dans les questions 1 à 3, on suppose que l'application linéaire  $f$  est non identiquement nulle.

- 1) Traduire à l'aide de quantificateurs la phrase : "l'application linéaire  $f$  est non identiquement nulle".
- 2) Déterminer le rang de l'application linéaire  $f$  et en déduire  $\text{Im } f$ .
- 3) En déduire la dimension de  $\text{Ker } f$  et conclure.
- 4) On suppose que  $f$  est l'application linéaire nulle. Déterminer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

Solution de l'exercice 13.

- 1) La phrase : "l'application linéaire  $f$  est non identiquement nulle" peut être traduite par :  $\exists x_0 \in E, f(x_0) \neq 0$ .
- 2) L'image de  $f$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}$  donc on a :  $\dim(\text{Im } f) = 0$  ou  $\dim(\text{Im } f) = 1$ . Comme  $f$  est non identiquement nulle, son image ne peut être réduite au singleton  $\{0\}$  donc la dimension de  $\text{Im } f$  ne peut pas être nulle. Ainsi, on a :  $\dim(\text{Im } f) = 1$  et alors :  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ .
- 3) D'après le théorème du rang, on a :  $\dim(\text{Ker } f) = n - 1$  donc le noyau de  $f$  est un hyperplan inclus dans  $E$ .
- 4) Si  $f$  est l'application linéaire nulle, son image est le singleton  $\{0\}$  et alors, d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension  $n = \dim E$ . De plus, comme  $\text{Ker } f$  est un s.e.v de  $E$ , on en déduit que  $\text{Ker } f = E$ .

Exercice 14. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $n$  et  $p$  ( $n, p \geq 1$ ) et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire.

1) Dans cette question uniquement, on suppose que  $n > p$ . L'application linéaire  $f$  peut-elle être injective ?

2) Dans cette question uniquement, on suppose que  $n < p$ . L'application linéaire  $f$  peut-elle être surjective ?

*Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*

3) On suppose enfin que  $n = p$ . L'application linéaire  $f$  peut-elle être bijective ?

Solution de l'exercice 14.

1) L'image de  $f$  est un s.e.v de  $F$  donc  $\dim(\text{Im } f) \leq \dim F \Rightarrow \dim(\text{Im } f) \leq p$ . Appliquons le théorème du rang :  $\dim E = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) \Rightarrow \dim(\text{Ker } f) \geq n - p > 0$  donc en particulier :  $\dim(\text{Ker } f) \neq 0$ . Ainsi,  $\text{Ker } f \neq \{0\}$  donc  $f$  ne peut pas être injective.

2) Supposons par l'absurde qu'il existe une telle application linéaire  $f$  surjective. Alors, on a d'après le théorème du rang :  $n = p + \dim(\text{Ker } f) \Rightarrow \dim(\text{Ker } f) = n - p < 0$ , c'est absurde ! Ainsi, il n'existe pas d'application linéaire surjective de  $E$  dans  $F$  lorsque  $\dim E < \dim F$ .

3) Oui,  $f$  peut être bijective si  $n = p$ . Par exemple : l'application linéaire  $f : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  telle que : pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_1[X]$ ,  $f(P) = (P(0), P(1))$  (on rappelle que  $\mathbb{R}_1[X]$  est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1). On a :  $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$  et  $f$  est bijective ! (Il suffit de montrer qu'elle est injective par exemple et on aura la surjectivité avec le théorème du rang !).

Exercice 15. Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow G$  deux applications linéaires. Démontrer que  $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .

Solution de l'exercice 15. Montrons d'abord le sens direct : supposons alors que  $g \circ f = 0$ .

Soit  $y \in \text{Im } f$  alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . En appliquant  $g$  à cette égalité, on obtient :  $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$  (puisque  $g \circ f = 0$ ). Ainsi,  $y \in \text{Ker } g$ . D'où,  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$  et montrons que  $g \circ f = 0$ .

$\forall x \in E$ ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Comme  $x \in E$ ,  $f(x) \in \text{Im } f$  mais alors  $f(x) \in \text{Ker } g$  car  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ . Ainsi,  $\forall x \in E$ ,  $g(f(x)) = 0$ . Par conséquent,  $g \circ f = 0$ .

Exercice 16. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ .

Solution de l'exercice 16. Sens direct : supposons que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

Soit  $y \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f \Rightarrow y \in \text{Im } f$  et  $y \in \text{Ker } f$ . Comme  $y \in \text{Im } f$ , il existe  $x \in E$  tel que :  $y = f(x)$ . Comme  $y \in \text{Ker } f$ ,  $f(y) = 0$ . Ainsi, on en déduit que  $f(y) = f^2(x) = 0$ . Donc  $x \in \text{Ker}(f^2)$ . Or,  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$  donc  $x \in \text{Ker } f$  ainsi,  $f(x) = 0$ . Par conséquent,  $y = 0$  et  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ . Montrons que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

Pour la première inclusion, soit  $x \in \text{Ker}(f)$  alors  $f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0$ . Donc  $x \in \text{Ker}(f^2)$ . Ainsi,  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$  (remarque : cette première inclusion

est toujours vraie, pour n'importe quelle application linéaire !).

Pour la seconde inclusion, soit  $y \in \text{Ker}(f^2)$  alors  $f^2(y) = 0 \Rightarrow f(f(y)) = 0$  donc  $f(y) \in \text{Ker } f$ . De plus,  $f(y) \in \text{Im } f$  donc  $f(y) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$  mais  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$  donc  $f(y) = 0$  ainsi,  $y \in \text{Ker } f$ . Par conséquent,  $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker } f$ . Finalement, on a bien :  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .