DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Louis NEBOUT
STAGE : Montpellier 2012

Double-comptage et bijections

Cette séance est consacrée aux preuves combinatoires. Il est donc interdit d'utiliser d'autres méthodes pour résoudre les exercices. En particulier, les récurrences sont bannies, ainsi que l'utilisation des formules donnant les coefficients binomiaux ou les nombres de Fibonacci.

- **Double comptage** -

Dans cette partie, seule les preuves par double comptage sont autorisées. Comme son nom l'indique, la méthode de double comptage consiste à compter le nombre d'éléments d'un ensemble de deux façons différentes. On obtient alors deux expressions donnant le nombre d'éléments de A, ce qui nous donne une identité algébrique. Pour prouver une identité par double comptage, il faut commencer par essayer de comprendre ce que compte un des membre de l'identité, puis il faut essayer de faire ce compte d'une autre manière en essayant de faire apparaître les termes de l'autre membre de l'identité.

Exercice 1 Essayez de prouver deux des égalités suivantes :

- $n! = \binom{n}{k} k!(n-k)!$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Exercice 2 Essayez de prouver deux des égalités suivantes :

- $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$
- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- $\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

– $\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k}\binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}$

Nous allons maintenant nous concentrer sur des identités concernant les termes de la suite de Fibonacci. Pour pouvoir obtenir des preuves combinatoires de ce type d'identités, il nous faut tout d'abord un moyen de donner du sens combinatoire aux termes de la suite de Fibonacci. Il y a de nombreuses façons de le faire, on en propose une dans le prochain exercice.

Exercice 3 Soit F_n le n-ième terme de la suite de Fibonacci (avec la convention usuelle $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$), et soit f_n le nombre de façons de paver un rectangle $1 \times n$ avec des carrés 1×1 et des dominos 1×2. Montrer que $F_n = f_{n-1}$.

Exercice 4 Montrer que $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$.

Exercice 5 Montrer que

$$f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}.$$

Exercice 6 Montrer que

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = f_n.$$

Exercice 7 Montrer que si m divise n alors f_{m-1} divise f_{n-1}.

Exercice 8 Montrer que

$$f_{2n+1} = \sum_{i \geqslant 0} \sum_{j \geqslant 0} \binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}.$$

Exercice 9 Montrer que

$$f_n + f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} f_k 2^{n-2-k} = 2^n.$$

Notre méthode ne se limite pas aux seuls termes de la suite de Fibonacci : cette interprétation combinatoire se généralise à une classe bien plus large de suites récurrentes, comme le montre l'exercice suivant, et il est donc possible de prouver de façon combinatoire de nombreux résultats sur les suites récurrentes.

Exercice 10 Trouver une interprétation combinatoire des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant $u_n = 0$ si $n < 0$, $u_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k},$$

où les c_i sont des entiers positifs.

Pour finir, un petit exemple d'exercice de type olympique faisant appel au double comptage.

Exercice 11 Dans une école, il y a 2007 filles et 2007 garçons. Chaque élève appartient à au plus 100 clubs, et toute paire formée d'un garçon et d'une fille appartient à exactement un club. Montrer qu'il y a un club comportant au moins 11 filles et 11 garçons.

- Bijections -

On dit que deux ensembles A et B sont en bijection s'il existe une application f allant de l'un dans l'autre (disons de A dans B), telle que chaque élément de B est atteint précisément une fois par f. Autrement dit, f apparie les éléments de A avec ceux de B. Si deux ensembles sont en bijection, alors ils ont le même nombre d'éléments. Cela nous donne une nouvelle méthode pour obtenir des identités : si le membre de gauche (resp. de droite) d'une identité compte le nombre d'éléments d'un ensemble A (resp. B), et si ces deux ensembles sont en bijection, alors l'identité est vérifiée.

Exercice 12 On pave un triangle équilatéral de côté n par n^2 petits triangles équilatéraux de côté 1. Combien la figure obtenue comporte-t-elle de parallélogrammes ?

Exercice 13 Une partition de n est une écriture de n comme somme d'entiers. Par exemple, $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$ possède 7 partitions. Montrer que le nombre de partitions de n à k termes est égal au nombre de partitions de n dont le plus grand élément est k.

Exercice 14 Montrer que le nombre de partitions de n dont tous les éléments sont distincts est égal au nombre de partitions de n dont tous les éléments sont impairs.

Exercice 15 Montrer que $3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}$.

Exercice 16 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$.

Exercice 17 Montrer que $f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n$.

Exercice 18 Essayez de fabriquer de nouvelles identités en construisant à la main des bijections.

Une dernière remarque pour terminer : dans cette séance, nous avons surtout prouvé des identités faciles, c'est à dire des identités qui pourraient aisément se prouver par des méthodes classiques de type récurrence (essayez !). Mais n'allez pas croire que la méthode combinatoire est une méthode faible ! En particulier, des preuves combinatoires du même type que celles utilisées dans cette séance permettent de montrer dès identités très fortes sur les suites récurrentes, dont les preuves "classiques" utilisent des techniques algébriques relativement poussées (par exemple des fonctions génératrices ou des fonctions hyperboliques). Si ce sujet vous intéresse, je recommande vivement le livre "Proofs that really count" de Arthur T. Benjamin et Jennifer J. Quinn (la séance correspond au premier chapitre du livre).

Solution de l'exercice 1

- Comptons de deux façons différentes le nombre de façon d'ordonner n personnes. Il y a n choix pour la première personne, puis $n-1$ pour la seconde (car il ne faut pas choisir à nouveau la première personne), et ainsi de suite. Il y a donc $n!$ ordres. Mais on peut aussi commencer par choisir les k personnes qui seront placées devant ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis ordonner ces k personnes ($k!$ possibilités) et finir par ordonner les $n-k$ dernières personnes ($(n-k)!$) possibilités). Il y a donc $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ ordres.
- On considère une classe de n élèves, un des élèves s'appelant Georges. Comptons de deux façons combien il existe de groupes de k élèves. Par définition, cela vaut $\binom{n}{k}$. Mais on peut aussi dire qu'il y a précisément $\binom{n-1}{k-1}$ groupes contenant Georges (on met Georges d'office dans le groupe, puis on choisit $k-1$ élèves parmi les $n-1$ élèves autres que Georges), et $\binom{n-1}{k}$ groupes ne contenant pas Georges, d'où le résultat.
- Pour choisir un groupe de k élèves dans une classe de n, on peut soit choisir directement les k élèves qui seront dans le groupe ($\binom{n}{k}$ façons de le faire), soit ce qui revient au même choisir les $n-k$ élèves qui ne seront pas dans le groupe ($\binom{n}{n-k}$ façons de le faire).
- On compte le nombre de façons de choisir dans notre classe de n élèves un groupe de k élèves comportant un président. On peut commencer par choisir le groupe ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis le président parmi les k élèves du groupe (k possibilités). Le nombre cherché est donc $k\binom{n}{k}$. Mais on peut

aussi choisir le président en premier (n possibilités), puis choisir les $k-1$ autres élèves du groupe parmi les $n-1$ élèves restants. Le nombre cherché vaut donc aussi $n\binom{n-1}{k-1}$.
– On compte le nombre de façons de choisir un groupe dans une classe de n élèves. Pour chaque élève, on choisit s'il est dans le groupe ou non (2 possibilités par élève). Le nombre de groupes vaut donc 2^n. On peut aussi distinguer selon le nombre d'élèves du groupe : pour $0 \leqslant k \leqslant n$ il y a $\binom{n}{k}$ groupes de k élèves, d'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

– Le nombre de gauche compte le nombre de paires de paires d'entiers de 1 à n (par définition, une paire est non ordonnée, par exemple $(1,2)$ et $(2,1)$ sont considérées comme la même paire). Parmi ces paires, certaines comme la paire $((1,2),(3,4))$ comportent 4 nombres différents. Il y en a $3\binom{n}{4}$ (on choisit d'abord les 4 entiers, puis on regarde le plus petit de nos quatre entiers, et on choisit celui de trois autres qui ira dans la même paire). Les autres paires ont un entier en commun (c'est le cas par exemple de la paire $((1,2),(1,3))$), il y en a $3\binom{n}{3}$ (on choisit d'abord les 3 entiers, puis on choisit celui des 3 qui sera commun aux deux paires).
– Le terme de gauche est égal au nombre de façons dans une classe de n de choisir un groupe de k élèves contenant un sous groupe de m élèves. Pour compter cela on peut aussi commencer par choisir le sous-groupe de m élèves ($\binom{n}{m}$ choix), puis par le compléter en choisissant $k-m$ élèves à rajouter pour former le groupe de k ($\binom{n-m}{k-m}$ choix).
– Le terme de gauche compte le nombre de groupes d'élèves possédant un président. Or on peut aussi choisir le président (n choix), puis choisir un groupe quelconque parmi les $n-1$ autres élèves ($2^{n-1}\mathrm{choix}$).
– On veut compter les ensembles de $k+1$ entiers parmi $\{1,\dots n+1\}$. Il y a précisément $\binom{m}{k}$ tels ensembles dont le plus grand élément est $m+1$.
– On veut compter les ensembles de $2k+1$ entiers parmi $\{1,\dots 2n+1\}$. Il y a précisément $\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}$ tels ensembles dont l'élément médian est $m+1$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> C'est vrai pour n valant 1 ou 2, il suffit donc pour conclure de montrer que les deux suites vérifient la même relation de récurrence. Or il y a deux sortes de pavages du rectangle $1 \times n+1$: ceux qui se terminent par un carré (il y en a f_n) et ceux qui se terminent par un domino (il y en a f_{n-1}), et donc $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Petit point de vocabulaire : s'il n'y a pas de domino à

cheval entre les deux cases i et $i+1$ d'un pavage, alors on dit que ce pavage a une coupure en position i (car on peut séparer le pavage en deux pavages plus petits en coupant entre les cases i et $i+1$).

On va essayer de couper notre pavage en position m. Si c'est possible, on obtient un pavage du rectangle $1 \times m$ ainsi qu'un pavage du rectangle $1 \times n$, il y a donc $f_m f_n$ pavages pour lesquels la coupure est possible en m. Si cette coupure est impossible, alors il y a un domino à cheval sur les cases m et $m+1$. En effaçant ce domino, on se retrouve avec deux pavages des rectangles $1 \times m-1$ et $1 \times n-1$: il y a $f_{m-1} f_{n-1}$ cas où la coupure est impossible.

Solution de l'exercice 5 Tout pavage du rectangle $1 \times 2n+1$ comporte nécessairement un carré. Intéressons nous au dernier carré de notre pavage (celui placé le plus à droite). Il est suivi d'une succession de dominos, donc il est placé en position impaire dans le pavage. Il y a exactement f_{2k} pavage du rectangle ou le dernier carré est en position $2k+1$, d'où la formule.

Solution de l'exercice 6 On distingue selon le nombre de dominos appartenant à notre pavage du rectangle $1 \times n$. Un pavage comportant k dominos comporte $n-k$ blocs, pour compter ces pavages, il suffit donc de compter le nombre de façons de positionner nos k dominos parmi ces $n-k$ blocs, il y a donc $\binom{n-k}{k}$ partitions à k dominos.

Solution de l'exercice 7 Devant une expression compliquée de la sorte, il faut se demander ce que compte le terme de gauche, en essayant d'interpréter combinatoirement chacun de ses termes. On se rappelle que $\binom{n-i}{j}$ est le nombre de pavages du rectangle $1 \times n+j-i$ ayant précisément j dominos (et donc $n-i-j$ carrés). L'autre coefficient $\binom{n-j}{i}$ correspond lui au nombre de pavages du rectangle $1 \times n+i-j$ ayant précisément $n-i-j$ carrés. Les deux termes comptent des pavages ayant le même nombres de carrés. Cela nous donne l'idée d'introduire le carré médian.

Un pavage du rectangle $1 \times 2n+1$ possède un nombre impair de carrés, et possède donc un carré médian. On essaye de compter le nombre de pavages tels qu'il y a i dominos à gauche de ce carré médian, et j dominos à droite. Alors le pavage possède $2n+1-2i-2j$ carrés au total, dont $n-i-j$ sont à gauche du médian. Il y a donc $\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}$ tels pavages, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8 Soit q tel que $n = qm$. Il nous faut trouver un moyen de dénombrer le nombre de pavages du rectangle $1 \times qm-1$ faisant apparaître des pavages du rectangle $1 \times m-1$. L'idée naturelle est de regarder les $m-1$ premières cases de notre rectangle. Il y a $f_{m-1} f_{(q-1)m}$ pavages pour lesquelles une coupure est possible en $m-1$. On suppose maintenant cette coupure impossible, et on regarde le prochain bloc potentiel de taille $m-1$: celui compris entre les cases $m+1$ et $2m-1$. Il y a $f_{m-2}f_{m-1}f_{(q-2)m}$ cas où la coupure est possible en $2m-1$ (le f_{m-2} correspond au pavage des $m-2$ cases avant le domino empêchant la première coupure).

Plus généralement, il y a précisément $f_{m-2}^{j-1}f_{m-1}f_{(q-j)m}$ pavages pour lesquels la coupure est impossible en $im-1$ pour $i<j$, mais possible en $jm-1$. Enfin, si les coupures sont impossibles en $im-1$ pour tout $i<q$, alors le domino recouvrant les cases $(q-1)m-1$ et $(q-1)m$ est suivi d'un bloc de taille $m-1$, il y a donc $f_{m-2}^{n-1}f_{n-1}$ tels pavages (je mets ce dernier cas en évidence, car c'est là que l'on se sert de l'hypothèse m divise n). On a donc au final obtenu la formule :

$$f_{n-1} = f_{m-1}\sum_{j=1}^{q} f_{m-2}^{j-1}f_{(q-j)m}.$$

Remarque : l'idée que des résultats de divisibilités peuvent se prouver par des méthodes combinatoires est cruciale et à retenir absolument.

Solution de l'exercice 9 Il nous faut choisir une interprétation combinatoire de 2^n, on choisit par exemple le nombre de nombres binaires à n chiffres. Il nous faudrait maintenant un moyen d'inclure nos pavages dans cet ensemble de nombres binaires. On va par exemple décider de coder un carré par le chiffre 0 et un domino par la série de chiffre 10, ce qui nous permet de coder un pavage par un nombre binaire (par exemple, le pavage "carré-carré-domino-carré" est codé par 00100). On remarque enfin que les codes correspondant à des pavages sont ceux qui ne comportent pas deux 1 consécutifs, et qui se terminent par 0, ce qui nous donne une nouvelle interprétation combinatoire des nombres de Fibonacci, mieux adaptée au problème. (Il y aurait bien sûr de nombreuses autres façons d'aboutir à une interprétation satisfaisante).

Maintenant, comptons le nombre de nombres binaires à n chiffres. Il y en a $f_{n-1}+f_n$ n'ayant pas deux 1 consécutifs (il y en a f_n qui se terminent par 0, et f_{n-1} qui se terminent par 01). Maintenant, comptons ceux ayant deux 1 consécutifs, en distinguant selon la position de la première telle paire de 1. Si cette première paire est en position $k+1$ et $k+2$, alors le k-ième chiffre est un 0 et donc k premiers chiffres du nombre binaire codent un pavage du rectangle $1\times k$, les valeurs des $n-2-k$ chiffres à partir de la position $k+3$ sont arbitraires, il y a donc $f_k 2^{n-2-k}$ tels nombres, ce qui montre le résultat.

Solution de l'exercice 10 Si n est positif u_n est le nombre de façon de paver un rectangle $1\times n$ en utilisant des carrés 1×1 de c_1 couleurs différentes, des dominos 1×2 de c_2 couleurs différentes, des tuiles 1×3 de c_3 couleurs différentes, ..., et des tuiles $1 \times k$ de c_k couleurs différentes.

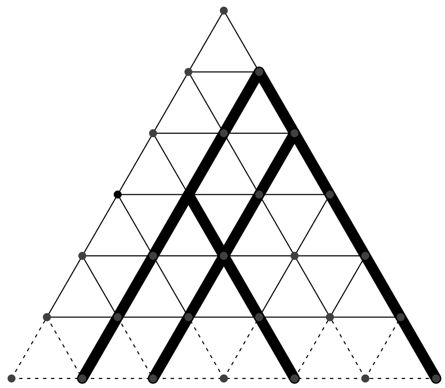
<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Quand on voit ce type de problème, il faut immédiatement penser à une approche par double comptage. En effet, les deux hypothèses, ainsi que ce que l'on nous demande de prouver, sont des hypothèses de comptage, et on a donc beaucoup de façon de dénombrer des choses. Il est possible que parmi ces dénombrements, il y en ai un qui résolve le problème.

Raisonnons par l'absurde et supposons que dans chaque club, il y a soit au plus 10 filles (on appelle un tel club un club de type A), soit au plus 10 garçons (club de type B). Dénombrons le nombre de triplets (f, g, c) où f et g sont une fille et un garçon appartenant au club c. Comme chaque paire appartient à exactement un club, il y a exactement 2007^2 tels triplets.

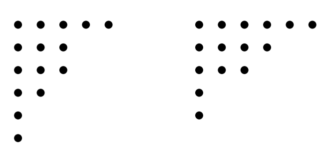
Maintenant, comptons le nombre de triplets où c est un club de type A. On a 2007 choix pour le garçon g, puis au plus 100 choix pour le club c de type A (un élève appartenant à au plus 100 clubs), puis au plus 10 choix pour la fille par définition du club de type A : il y a au plus $10 \times 100 \times 2007$ triplets où c est de type A, et de même pour ceux où c est de type B.

On a donc montré que $2007^2 \leqslant 2 \times 10 \times 100 \times 2007$, une contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Tout d'abord, les parallélogrammes n'ont que 3 orientations possibles, et par symétrie il y a autant de parallélogrammes de chaque orientation. On se contente de compter ceux avec une pointe vers le haut. Pour cela, on prolonge notre pavage d'une ligne comme sur le dessin. Pour chacun des parallélogrammes, on prolonge ses côtés, et on obtient quatre intersection avec la ligne rajoutée sous notre triangle. On vérifie que cela donne une bijection entre les parallélogrammes pointant vers le haut et les ensembles de quatre points de notre grille sur la dernière ligne rajoutée. Comme il y a $n+2$ points de la grille sur cette ligne, il y a $\binom{n+2}{4}$ parallélogrammes pointant vers le haut, et donc $3\binom{n+2}{4}$ parallélogrammes au total.



Solution de l'exercice 13 On va introduire une interprétation plus combinatoire des partitions d'un entier. Ce n'est pas indispensable, mais ça aide à mieux voir les choses. À la partition $n = a_1 + \ldots + a_k$, où les a_i sont classés par ordre décroissant, on associe la figure comportant a_i points, alignés à gauche, dans la ligne i, appelé diagramme de Ferrar. Par exemple, la partition $15 = 5+3+3+2+1+1$ est représentée dans le diagramme de gauche sur la figure. Le nombre d'éléments de la partition est le nombre de lignes du diagramme, et le plus grand élément est le nombre de points dans la première ligne. La symétrie d'axe la diagonale (qui transforme le diagramme de droite en le diagramme de gauche, qui correspond à la partition $15 = 6+4+3+1+1$) donne une bijection entre les diagrammes de k lignes et ceux de première ligne de longueur k, ce qui conclut.



Solution de l'exercice 14 On part d'une partition à éléments distincts, par exemple $30 = 12 + 7 + 6 + 4 + 1$. On décompose chaque élément de la partition en parties paire et impaire (on les écrit sous la forme $2^n k$ avec k impair), par exemple $30 = 4 \cdot 3 + 7 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1$, puis on casse chaque produit en remplaçant $2^n k$ par $k + k + \ldots + k$, par exemple $30 = 3+3+3+3+7+3+3+1+1+1+1+1$, et on obtient une partition à nombres impairs.

Pour montrer que cette opération est bijective, exhibons sa réciproque : à partir d'une partition en nombres impairs, on commence par regrouper les termes identiques entre eux (par exemple $30 = 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 3 + 3 +$

$1+1+1+1+1$ devient $30 = 1 \cdot 7 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 1$). Ensuite on décompose chaque coefficient en sommes de puissance de 2 (notre décomposition devient $30 = 1 \cdot 7 + (4+2) \cdot 3 + (4+1) \cdot 1$), et enfin on casse les sommes de puissance de 2 (ce qui donne $30 = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1$), on vérifie que l'on retombe bien sur la partition de départ.

Dans toute la suite, on notera P_n l'ensemble de tous les pavages du rectangle $1 \times n$ par des carrés et des dominos (par convention P_0 possède un seul élément : le pavage vide).

Solution de l'exercice 15 Ici, à cause du facteur 3, une bijection fonctionnera mal. L'idée est donc d'essayer d'associer à chaque élément de P_n trois pavages des rectangles $1 \times n-2$ ou $1 \times n+2$ (c'est-à-dire trois éléments de $P_{n-2} \cup P_{n+2}$). Le premier est obtenu en rajoutant un domino à l'extrémité droite de notre pavage, le second en rajoutant deux carrés. Pour le troisième, on distingue selon le bloc final du pavage $1 \times n$: si ce pavage se termine par un domino, on lui associe le pavage $1 \times n-2$ obtenu en supprimant ce domino, mais si ce pavage se termine par un carré, on lui associe le pavage $1 \times n+2$ obtenu en insérant un domino juste avant ce carré. On vérifie aisément que chaque élément de $P_{n-2} \cup P_{n+2}$ est atteint précisément une fois, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 16 On part d'un élément de $P_n \times P_{n+1}$ (c'est-à-dire d'une paire de pavages des rectangles $1 \times n$ et $1 \times n+1$). On voudrait essayer de lui associer un élément de P_k^2 (une paire de pavages de deux rectangles de même longueur k) pour un certain k. On place les deux pavages l'un au dessus de l'autre, et soit k la dernière position à laquelle on peut couper les deux pavages (s'il n'y en a pas, on dit que l'on coupe en position 0). En retirant la partie à droite de la coupure, on obtient un élément de P_k^2. Or, la partie à droite de notre coupure est entièrement déterminée : le rectangle possédant un nombre pair de cases est rempli de dominos, l'autre commence par un carré, puis est rempli de dominos. Ceci permet, à partir de l'élément de P_k^2, de remonter à la paire initiale, et notre application de découpage est une bijection entre $P_n \times P_{n+1}$ et $\bigcup_{k=0}^{n} P_k^2$.

Solution de l'exercice 17 Il faut trouver un moyen d'associer à un élément de P_n^2 une élément de $P_{n-1} \times P_{n+1}$. Pour cela, l'idée est de disposer nos deux rectangles $1 \times n$ les uns sous les autres, en en décalant un d'un cran. Si les deux pavages ont une coupure au même endroit, on les découpe au niveau de leur dernière coupure commune, et on échange les extrémités des deux pavages. On peut alors facilement revenir en arrière : on découpe les pavages $1 \times n-1$ et

$1 \times n+1$ obtenus au niveau de leur dernière coupure commune, et on échange à nouveau les extrémités.

Dans quel cas est-il impossible de réaliser l'opération d'échange ? Quand les deux pavages n'ont pas de coupure commune. Ainsi, si n est pair, on ne peut pas procéder à l'échange sur la paire de pavages composés uniquement de dominos, et si n est impair on ne peut faire l'échange à partir de la paire de pavages $1 \times n-1$ et $1 \times n+1$ composés uniquement de dominos. C'est de là que vient le terme en $(-1)^n$.