DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Razvan BARBULESCU
STAGE : Montpellier 2012

Exercices de combinatoire, Permutations

- Exercices généraux -

Exercice 1 Il y a $n > 1$ clous et $\binom{n}{2}$ ficelles relient deux à deux les clous. Chaque ficelle a une couleur et, pour tout triplet de couleurs, il y a un triangle ayant précisément ces trois couleurs. Décider si n peut être égal à 6. Même question pour $n = 7$.

Exercice 2 On se donne 18 points dans le plan de façon que tout triplet est noncolinéaire. On note A la somme des aires des 816 triangles formés. On choisit une couleur pour chaque point de façon que l'on ait 6 bleus, 6 jeunes et 6 rouges. Montrer que la somme des aires des triangles monochromes (3 sommets de la même couleur) est inférieur à $\frac{A}{4}$.

Exercice 3

1. Pour tout n naturel on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{1}$$

2. Pour tous a, N et k naturels on a :

$$\binom{N+a+1}{k+1} - \binom{N}{k+1} = \sum_{j=0}^{a} \binom{N+j}{k}. \tag{2}$$

Exercice 4 De combien de façons peut-on ranger n chaussettes identiques dans un placard avec $k \geqslant 1$ tiroirs.

Exercice 5 Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Compter le nombre de paires non-ordonnées (A, B) telles que $A \bigcup B \subset E$, $A \bigcap B = \emptyset$ et $A \neq \emptyset \neq B$.

Exercice 6 Calculer les chiffres imédiatement à gauche et à doite de la virgule dans $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012}$.

Exercice 7 On appelle arangement chaque façon d'asseyer n couples à une table ronde de $2n$ places. On dit qu'un couple est ensemble si ses deux membres sont assis l'un à côté de l'autre. Quel est le nombre moyen de couples ensemble par arangement.

Exercice 8 Les mots d'un langage sont définis de la manière suivante. ab et bb sont les seuls mots de longueur 2. Pour tout $a \geqslant 3$, tous les mots de longurur n s'obtiennent d'un mot de longueur inférieure en remplaçant chaque occurence de b par un mot. Deux occurence différentes peuvent ne pas être remplacées par le même mot. Il y a combien de mots de longueur n ?

- Permutations -

Si E est un ensemble on appelle permutation de E toute fonction bijective $f : E \to E$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La définition suivante sert à partager $\mathcal{S}_n$ en deux sous-ensemble : les permutations qui peuvent être transformées en l'identit́e par un nombre pair d'échanges.

Définition 1. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on pose

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Proposition 2. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\epsilon\sigma \in \{1, -1\}$.

Démonstration. Les ensembles $\{|i - j| \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ et $\{|\sigma(i) - \sigma(j)| \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ sont égaux car σ est une bijection. $\square$

Définition 3. On appelle paire toute permutation σ telle que $\epsilon(\sigma) = 1$. On dit que σ est impaire si $\epsilon(\sigma) = -1$.

Proposition 4. Pour toutes permutations σ et τ, on a $\epsilon(\tau \circ \sigma) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\epsilon(\tau\circ\sigma) &= \Pi_{\{i,j\}}\frac{\tau(\sigma(i))-\tau(\sigma(j))}{\sigma(i)-\sigma(j)} && (3)\\
&= \Pi_{\{i,j\}}\left(\frac{\tau(\sigma(i))-\tau(\sigma(j))}{\sigma(i)-\sigma(j)}\cdot\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right) && (4)\\
&= \left(\Pi_{\{i,j\}}\frac{\tau(\sigma(i))-\tau(\sigma(j))}{\sigma(i)-\sigma(j)}\right)\cdot\left(\Pi_{\{i,j\}}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right) && (5)\\
&= \left(\Pi_{\{i,j\}}\frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j}\right)\cdot\left(\Pi_{\{i,j\}}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right) && (6)\\
&= \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma). && (7)
\end{aligned}$$

Le passage de (4) à (5) provient du fait qu'un produit de nombre réels peut se faire dans n'importe quel ordre. Le passage de (5) à (6) provient du faite que l'ensemble $\{\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \mid i,j \in \{1,2,\ldots,n\}\}$ coincide avec l'ensemble $\{\frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)} \mid i,j \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. □

Proposition 5. Il y a autant de permutations paires et impaires.

Démonstration. On appelle τ_{i_1,i_2} la permutation qui écahnge i_1 et i_2 et laisse les autres éléments inchangés. L'application $f : \epsilon^{-1}(1) \to \epsilon^{-1}(-1)$, $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau_{1,2}$ est une bijection. □

Exercice 9 Trouver le nombre de permutations $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ de $(1,2,3,4,5,6)$ telles que le nombre minimal de transpositions à utiliser pour transformer $(a_1, \ldots, a_6)$ en $(1, \ldots, 6)$ est 4.

Exercice 10 Le jeu du Taquin consiste de 15 carrés d'aire 1 placé sur un carré d'aire 16 comme dans la Figure 10. Peut-on partir de la configuration où tout carré est à sa place et arriver dans la configuration où on a échangé 15 et 14 en laissant les autres sur place ? On précise qu'un mouvement consiste à bouger le "trou" dans un espace voisin horizontal ou vertical.

- Corrigé des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Avant de répondre à la question on peut remarquer que n peut valoir 3 et 5, mais pas 4, ce qui laisse deviner qu'on doit trouver une propriété arithméthique pour les n possibles.

Pour $i \in [1, n]$, on note c_i le nombre de ficelles de couleur i. Comme chaque ficelle participe à exactement $n-2$ triangles et comme il y a $\binom{n}{3}$ triangles, ayant $3\binom{n}{3}$ côtés, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \binom{n}{2} \geqslant 3\binom{n}{3}. \tag{8}$$

Comme, $\sum_{i=1}^{n} c_i = \binom{n}{2}$, le nombre de ficelles, (8) est possible seulement en tant qu'égalité et cela si chaque ficelle forme le nombre maximal de triangles tricolores. Ainsi, on doit avoir le même nombre de ficelles de chaque couleur. Ainsi :

$$n \mid \binom{n}{2}. \tag{9}$$

Cela caractérise les nombres impaires, donc $n = 6$ est impossible.

Pour n impair on appelle les couleurs par des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, \dots, n-1\}$ l'ensemble des restes modulo n. On associe à chaque clou un élément i différent. Si $i + j$ donne reste k modulo n, alors on donne la couleur k à la ficelle $[i, j]$. Si un triangle i_1, i_2, i_3 a le coloriage (k_1, k_2, k_3) alors il vérifie $2i_1 \equiv k_2 + k_3 - k_1$ et les analogues. Si $2i_1 \equiv 2i_1' \mod n$ pour un certain $i_1' \in \{0, \dots, n-1\}$, alors $n \mid 2(i_1' - i_1)$. Comme n est impair, $i_1 = i_1'$. Donc les triangles sont deux à deux distincts. Comme il y a le même nombre de coloriages que de triangles, tous les coloriages sont obtenus. Donc $n = 7$ est possible.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On note A_1 la somme des aires des triangles monochromes et A_2 la somme des triangles qui contiennent exactement deux couleurs. On considère un des triangle monochrome ABC et M un point d'une autre couleur. On a clairement :

$$S[ABC] < S[ABM] + S[BCM] + S[ACM]. \tag{10}$$

On écrit toutes les équations du type de celle ci-dessus. Chaque triangle monochrome apparait exactement 12 fois dans le membre droit car il y a 12 points d'une couleur autre que celle du triangle ABC. Chaque triangle à deux couleurs apparait exactement 4 fois à doite car son côté monochrome fait partie d'exactement 4 triangles monochromes. Ainsi $12A_1 < 4A_2$, soit $4A_1 < A_1 + A_2$. On conclut que $A_1 < \frac{A}{4}$.

Solution de l'exercice 3

1. On s'intéresse au coefficient de n dans $(x+1)^{2n}$. D'une part on a trivialement $\binom{2n}{n}$. D'autre part on a $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = (\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k})(\sum_{k=0} x^{n-k}\binom{n}{k})$. D'où le résultat.
2. On s'intéresse au coefficient de k dans $\sum_{j=0}^{a}(1+x)^{N+j}$. D'une part il est égal à $\sum_{i=0}^{a}\binom{N+j}{k}$. D'autre part on a l'égalité :
$$\sum_{j=0}^{a}(1+x)^{N+j} = \frac{(1+x)^{(N+a+1)}-1}{x}. \tag{11}$$
Ainsi le coefficient de k dans le membre de gauche est celui de $k+1$ dans $(1+x)^{(N+1+a)} - (1+x)^N$, donc $\binom{N+1+a}{k+1} - \binom{N}{k+1}$.

Solution de l'exercice 4 On associe un nombre de 1 à k à chaque tiroir. On représente chaque façon de ranger les chaussettes à l'aide d'un tube transparent et de $n+k-1$ billes de ping-pong dont n blanches et $k-1$ oranges. En effet, si le tube commence par a_1 billes blanches alors on met a_1 chaussettes dans le tiroir 1. Si le tube continue par une bille orange et a_2 blanches, alors on range a_2 chaussetes oranges dans le tiroir 2. Comme il y a $\binom{n+k-1}{k-1}$ façons de mettres les billes de ping-pong dans le tube (positions des billes oranges), il y a autant de façons de ranger les chaussettes dans les tiroirs.

Solution de l'exercice 5 On compte d'abords le nombre de pairs ordonnées (A, B), incluses en E, en leur permettant d'être vides. Pour cela, à chaque fonction $f : E \to \{a, b, 0\}$ on associe la pair (A, B) ordonnée telle que $x \in A \Leftrightarrow f(x) = a$ et $x \in B \Leftrightarrow f(x) = b$. Comme il y a 3^n telles fonctions, on a 3^n pairs ordonnées. Pour passer des pairs ordonnées aux pairs non-ordonnées on sostrait le couple $(\emptyset, \emptyset)$ et on divise par 2 :$\frac{3^n-1}{2}$. Pour trouver le résultat on soustrait les couples de type $(\emptyset, C)$ qui sont en nombre de $2^n - 1$. Ainsi, la réponse est $\frac{3^n+1}{2} - 2^n$.

Solution de l'exercice 6 On montre que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2012} = \ldots 7, 9\ldots$. On pose $a = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+\sqrt{24}$ et $b = (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 5-\sqrt{24}$. On doit étudier a^{1006}. Le point de départ est la remarque que $a^{1006}+b^{1006}$ est un nombre entier, alors que b^{1006} est petit. En effet, $a^{1006}+b^{1006} = (S_1+\sqrt{24}S_2)+(S_1-\sqrt{24}S_2)$ avec $S_1 = \sum_{k=0}^{503} 5^{2k}24^{503-k}\binom{1006}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{502} 5^{2k+1}24^{503-k}\binom{1006}{2k+1}$. De plus $ab = 25-24 = 1$, donc $0 < b < \frac{1}{5}$ et ainsi $b^{1006} < \frac{1}{5^{1006}} < \frac{1}{10}$. En tant qu'entier moins une quantité inférieure à $\frac{1}{10}$, a^{1006} vaut $\ldots, 9\ldots$.

Pour évaluer le dernier chiffre de a^{1006} il suffit d'évaluer le dernier chiffre de $a^{1006} + b^{1006} = 2S_1$ et d'enlever 1. Chaque terme de S_1 divisible par 5 ne contribue pas au dernier chiffre de $2S_1$. Ainsi, le dernier chiffre est celui de $2 \cdot 24^{503}$. Comme $24^{503} \equiv 4^{503} \mod 10$ et une réurrence imédiate montre que pour tout k, $4^k \equiv 4 \mod 10$ si et seulement si $k \equiv 1 \mod 2$, le dernier chiffre de $2S_1$ est 8. On conclut que $a^{1006} = \dots 7, 9 \dots$.

Solution de l'exercice 7 On compte le nombre de couples ensemble dans tous les arangements. Pour tout i on note N_i le nombre de fois où il est ensemble. Par symétrie, pour tout i, $N_i = N_1$. Le nombre d'arangements où le couple 1 est ensemble est $4n \cdot (2n-2)!$, $4n$ choix pour les places du couple 1 et $(2n-2)!$ pour asseyer les autres couples. Finalement, le nombre de couples ensemble dans tous les arangements cumulés est $N_1 + \cdots + N_n$, soit nN_1. La réponse est donc $\frac{4n(2n-2)!}{(2n)!} = \frac{2n}{2n-1}$.

Solution de l'exercice 8 Pour $n = 2$ et $n = 3$ on remarque que tous les mots commencent par un nombre pair de lettres b, possiblement 0, et finissent par (au moins) un b. Montront par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n. Supposons le résultat pour $1, 2, \dots, n-1$. Si w est un mot obtenu à partir de $c_1 \dots c_k$ avec $k < n$, alors w ne peut pas finir par a. En effet, $c_k \neq a$ par hypothèse de récurrence, donc la fin de w est un mot de longueur inférieure, obtenu par remplacement. Par l'hypothèse de récurrence ce dernier finit par b, donc w finit par b. Maintenant, la parité du nombre de lettres b au début du mot est gardée par tout remplacement. Comme ab et bb commencent par un nombre pair de lettres b, tout autre mot fait de même.

Montrons maintenant réciproquement que toute suite qui commence par un nombre pair de lettres b et finit par b. Si une suite est de type $bbx \dots xb$, alors on l'obtient de bb en remplaçant le premier b par bb et le deuxième par $x \dots xb$ qui est un mot par l'hypothèse de récurrence. Si une suite w est de type $w = aBax \dots xb$ avec B une suite finie de lettres b, alors on distingue deux cas. Si B est de longueur paire, alors on obtient w de ab en relmplaçant b par $Bax \dots b$, qui est un mot par l'hypothèse de récurrence. Si B est de longueur impaire, on obtient w comme $bb \to (ab)(u)$ où u est $Bax \dots b$ sauf la première lettre b. Par l'hypothèse de récurrence u est un mot. Cela finit la description des mots.

Il reste à compter le nombre de suites de n lettres qui commencent par un nombre pair de lettres b et fnissent par b . On note N_n cette quantité. Un mot de $n+2$ lettres peut être bbu avec u un mot de n lettres ou avb avec v n'importe quelle suite. On a N_n choix pour u et 2^n choix pour v. Ainsi on a :

$$N_{n+2} = N_n + 2^n. \tag{12}$$

Cela donne $N_n = 2^{n-2} + 2^{n-4} + \cdots$, où la somme finit quand l'exposant devient négatif. Cela vaut $N_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

Solution de l'exercice 9 On note n_i le nombre de permutations $(a_1, \dots, a_6)$ qui ont besoin d'exactement i transpositions pour obtenir $(1, 2, \dots, 6)$. Comme on a $\frac{6!}{2}$ permutations paires, $n_0 + n_2 + n_4 + n_6 = 360$. Pour toute permutation on peut mettre a_1 à sa place, puis a_2 et ainsi de suite jusqu'à a_5, ce qui implique que a_6 est également à sa place. Ainsi $a_6 = 0$. Clairement $a_0 = 1$. Si on calcule a_2 on aura le résultat.

Une permutation qui se transforme en $(1, \dots, 6)$ par deux transposition est soit le produit de deux permutations de supports disjoints, soit un $3-$cycle. Le nombre de produits de 2 transpositions à supports disjoints est $\binom{\binom{6}{2}}{2}$. Le nombre de 3 cycles et 2 fois le nombre de supports à 3 éléments, donc $2\binom{6}{3}$. Ainsi $a_4 = 274$.

Solution de l'exercice 10 La configuration de départ et d'arrivée ont des parités différentes. Chaque mouvement est une trasposition, de signature -1, donc on a besoin d'un nombre impair de mouvements.

On colorie les cases du grand carré comme les cases d'un échiquier. À chaque mouvements le trou change de couleur. Au début et 'a la fin il a la même couleur. Ainsi le nombre de mouvements est pair. Contradiction.