DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2013

Barycentres, géométrie affine

- Barycentres -

Soient ABC un triangle et (α, β, γ) un triplet de réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Définition 1. Le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ) est l'unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Pour vous représenter physiquement le barycentre, imaginez que le triangle ABC est un mobile et que l'on a accroché un poids de α grammes au point A, un poids de β grammes en B et un de γ grammes en C. Le point G est le point par lequel il faut tenir le mobile pour que tout soit en équilibre.

Pour construire ce barycentre, et pour vérifier qu'il est bien unique, on utilise la condition suivante :

Proposition 2. Soit O un point quelconque du plan, alors

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de remplacer $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}$, pareil pour les deux autres, et d'utiliser la définition.

Faisons une pause un instant pour regarder le barycentre de 2 points : soit G le barycentre des points (A, α) et (B, β). En utilisant la proposition avec A à la place de O, on trouve

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Le point G est donc le point de la droite (AB) tel que $AG = \frac{\beta}{\alpha+\beta}AB$. En particulier, $\frac{AG}{GB} = \frac{\beta}{\alpha}$. Je souligne cette identité puisqu'elle sera très importante par la suite.

- Coordonnées barycentriques -

Soit ABC un triangle fixé.

Définition 3. Pour tout point G du plan on peut associer un triplet de réels (α, β, γ) tel que G soit le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ). On appelle ce triplet les coordonnées barycentriques de G, et il est unique à un coefficient multiplicatif près.

Pour montrer cette propriété, on utilise l'existence et l'unicité de coordonnées du point G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, et on utilise la première propriété des barycentres.

Comme on peut multiplier les triplets par un coefficient multiplicatif quelconque, on met à part triplet particulier qui vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 1$: on l'appelle les coordonées barycentriques homogènes de G.

Discutons un peu un des avantages des coordonnées barycentriques : dans ce système, on a $A : (1, 0, 0)$, $B : (0, 1, 0)$ et $C : (0, 0, 1)$, ce qui est très facile à retenir.

De plus les droites ont des équations d'une forme facile à retenir : un point G de coordonnées barycentriques (α, β, γ) apparient à une droite d ssi

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

où (u, v, w) est un triplet de réels particulier à d, unique à coefficient multiplicatif près. Pour la démonstration, allez voir l'exercice 3 plus bas.

- Associativité des barycentres -

Une propriété très pratique des barycentres est la suivante :

Proposition 4 (associativité des barycentres)**.** Soit $P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$ et $Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q)$. Soit G le barycentre de $(P, \lambda), (Q, \mu)$, alors G est le barycentre de

$$\left(A, \lambda\frac{\alpha_P}{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P} + \mu\frac{\alpha_Q}{\alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q}\right),$$

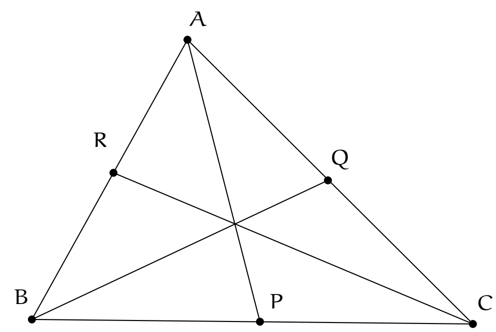
$$\left(B, \lambda\frac{\beta_P}{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P} + \mu\frac{\beta_Q}{\alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q}\right),$$

$$\left(C, \lambda\frac{\gamma_P}{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P} + \mu\frac{\gamma_Q}{\alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q}\right).$$

Cette propriété est un peu dure à utiliser sous cette forme, mais permet de construire plus facilement le barycentre de 3 points. Soit $G : (\alpha, \beta, \gamma)$. On introduit M le barycentre de (B, β) et (C, γ), alors G est le barycentre de (A, α) et $(M, \beta + \gamma)$. Pour le construire, on place d'abord le point M sur (BC) tel que $BM = \frac{\gamma}{\beta+\gamma} BC$, puis on place G sur AM tel que $AG = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} AM$.

Maintenant si on fait le raisonnement à l'envers : soit $G : (\alpha, \beta, \gamma)$ et soit M le point d'intersection de AG avec BC. Alors M est le barycentre de (B, β) et (C, γ), et $\frac{BM}{MC} = \frac{\gamma}{\beta}$.

- Théorème de Ceva -



Théorème 5 (Ceva)**.** Soit ABC un triangle et P, Q, et R des points de BC, AC et AB respectivement. Les droites AP, BQ et CR sont concourantes ssi

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

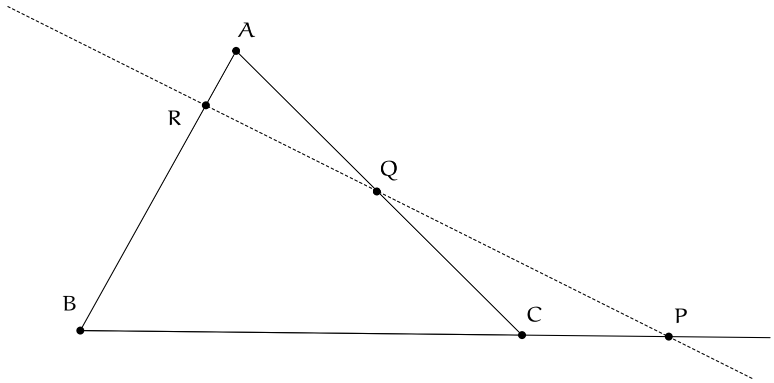
NB. Ici, et dans toute cette partie, les longueurs sont algébriques.

La démonstration utilise la section précédente. Supposons que les trois droites se coupent au point G de coordonnées barycentriques (α, β, γ). Comme P est le point d'intersection de AG avec BC, cela signifie que P est le barycentre de (B, β) et (C, γ), et $\frac{BP}{PC} = \frac{\gamma}{\beta}$. De même $\frac{CQ}{QA} = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{AR}{RB} = \frac{\beta}{\alpha}$, et

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Pour montrer la réciproque, supposons que le produit est égal à 1, et notons G le point d'intersection de AP et BQ, et (α, β, γ) ses coordonnées. On en déduit que $\frac{BP}{PC} = \frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{CQ}{QA} = \frac{\alpha}{\gamma}$. Ensuite, comme $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$, $\frac{AR}{RB} = \frac{\beta}{\alpha}$, et R est bien le point d'intersection de CG avec AB.

Il est aussi possible de montrer le théorème de Ménélaüs grâce aux coordonnées barycentriques :



Théorème 6 (Ménélaüs)**.** Soit ABC un triangle et P, Q, et R des points de BC, AC et AB respectivement. Les P, Q et R sont alignés ssi

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1.$$

Remarque 7. Pour déterminer le signe de $\frac{BP}{PC}$, on dit que si BP et PC sont de sens différents (*ie* si P est à l'extérieur du segment $[BC]$), alors le quotient est négatif.

La démonstration du théorème fait l'objet de l'exercice 6.

- Exercices -

Dans tous les exercices, ABC est un triangle, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. J'utiliserai la notation $[ABC]$ pour l'aire du triangle ABC.

Exercice 1 Utilisez Ceva pour montrer que les médianes sont concourantes et exprimer les coordonnées barycentriques de G. Idem pour les bissectrices et I et les hauteurs et H.

Exercice 2 (Point de Gergonne) Soient P, Q, R les points de contact du cercle inscrit avec les trois côtés. Montrer que AP, BQ et CR sont concourantes. Trouver les coordonnées barycentriques du point d'intersection.

Soit P' le point de contact du cercle exinscrit en A avec BC, Q' le point de contact du cercle exinscrit en B avec AC et R' le point de contact du cercle exinscrit en C avec AB etc. Montrer que AP', BQ' et CR' qont concourantes. Trouver les coordonnées barycentriques du point d'intersection.

Exercice 3 En coordonnées barycentriques, calculer l'équation d'une droite passant par A, d'une droite quelconque.

($\star$) Calculer l'équation d'un cercle, puis celle du cercle circonscrit à ABC en particulier.

Exercice 4 Montrez Ceva trigonométrique : Soit ABC un triangle et P, Q, et R des points de BC, AC et AB respectivement. Les droites AP, BQ et CR sont concourantes ssi

$$\frac{\sin(\widehat{BAP})}{\sin(\widehat{PAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBQ})}{\sin(\widehat{QBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACR})}{\sin(\widehat{RCB})} = 1.$$

Exercice 5 Soit P un point à l'intérieur du triangle. Montrer que P a pour coordonnées barycentriques $([BPC], [PCA], [PAB])$.

Exercice 6 Utilisez les coordonnées barycentriques pour montrer le théorème de Ménélaüs : Soit ABC un triangle et P, Q et R des points de BC, AC et AB respectivement. Les points P, Q, R sont alignés ssi

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

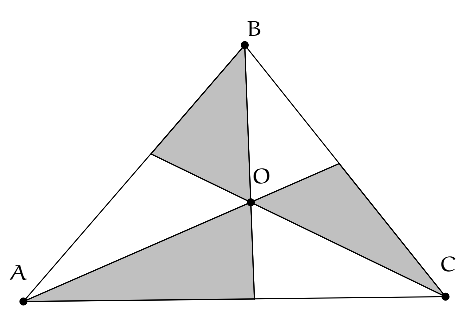
Exercice 7 Soit d une droite passant par A. La conjuguée isogonale de d est la symétrique de d par rapport à la bissectrice de $\widehat{A}$. Montrer que trois droites passant par A, B et C respectivement sont concourantes ssi leurs conjuguées isogonales (par rapport à A, B, C respectivement) sont concourantes. Si le point d'intersection des isogonales a pour coordonnées barycentriques (α, β, γ), quelles sont les coordonnées barycentriques du point d'intersection des trois droites initiales ?

Exercice 8 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier, M un point de la diagonale AC et N un point de CE tels que

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Que dire de r si B, M et N sont alignés ?

Exercice 9 Soit ABC un triangle et O un point à l'intérieur. On trace les droites AO, BO, CO qui coupent le triangle en 6 :



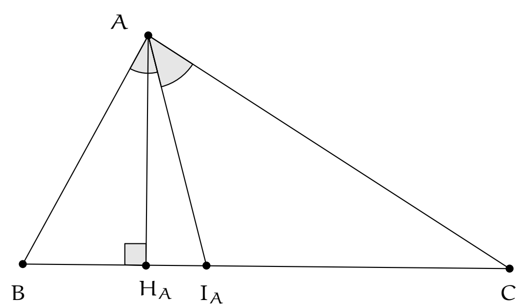
Montrer que l'aire noire est égale à l'aire blanche ssi O est sur une médiane.

Exercice 10 Soit ABC un triangle et P, Q, R les pieds des bissectrices. Montrer que si B, P, Q, R sont cocycliques, alors

$$\frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b}.$$

- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> La démonstration pour G est facile et G : $(1, 1, 1)$. Occupons-nous de I :



Utilisons la loi des sinus dans le triangle BAI_A :

$$\frac{BI_A}{\sin(\widehat{BAI_A})} = \frac{AI_A}{\sin(\widehat{B})} \text{ donc } BI_A = AI_A \frac{\sin(\widehat{A}/2)}{\sin(\widehat{B})}.$$

De même :

$$I_AC = AI_A \frac{\sin(\widehat{A}/2)}{\sin(\widehat{C})}.$$

$$\frac{BI_A}{I_AC} = \frac{\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B})}.$$

$$\frac{BI_A}{I_AC} \cdot \frac{CI_B}{I_BA} \cdot \frac{AI_C}{I_CB} = \frac{\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B})} \cdot \frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{C})} \cdot \frac{\sin(\widehat{B})}{\sin(\widehat{A})} = 1.$$

Donc les trois bissectrices sont bien concourantes. Maintenant pour les coordonnées barycentriques. Par les propriétés du barycentre, si I : (α, β, γ), et que I_A est l'intersection de AI avec BC, alors I_A est le barycentre de (B, β) et (C, γ), et donc $\frac{BI_A}{I_AC} = \frac{\gamma}{\beta}$. Essayons de trouver des poids qui vérifient $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B})}$. Le triplet $(\sin(\widehat{A}), \sin(\widehat{B}), \sin(\widehat{C}))$ marche :

$$I : (\sin(\widehat{A}), \sin(\widehat{B}), \sin(\widehat{C})).$$

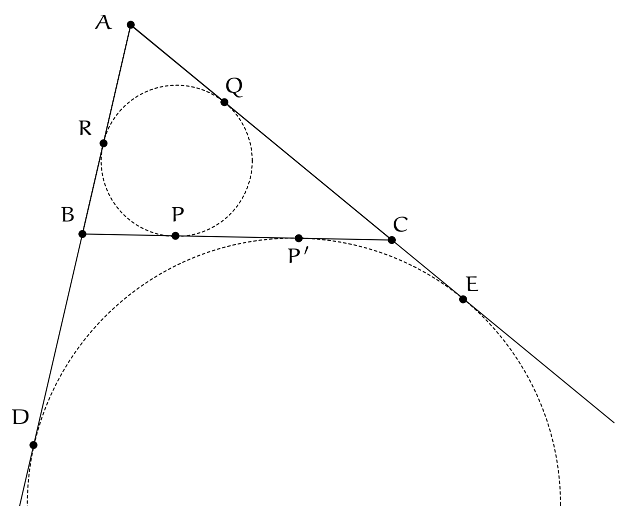
Par la loi des sinus, $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$, donc on peut aussi utiliser le triplet

$$I : (a, b, c).$$

L'intersection des hauteurs se fait de la même manière, j'en laisse l'exercice au lecteur. Les coordonnées barycentriques de H sont

$$H : (\tan(\widehat{A}), \tan(\widehat{B}), \tan(\widehat{C})).$$

Solution de l'exercice 2 Commençons par la figure :



Faisons le cercle inscrit en premier. Par les propriétés des bissectrices, $AQ = AR$ (si vous voulez vous en convaincre, regardez les triangles AIQ et AIR : ce sont deux triangles rectangles qui ont l'hypothénuse en commun et $IQ = IR$), et de même cycliquement. Notons $x = AQ = AR$, $y = BP = BR$ et $z = CP = CQ$.

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1.$$

Comme dans l'exo précédent, on trouve que les coordonnées barycentriques du point d'intersection sont $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$. Essayons d'exprimer x, y et z de façon plus satisfaisante. On sait que $a = y + z$, $b = x + z$ et $c = x + y$. Il est facile d'en déduire les formules suivantes :

$$x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{a+c-b}{2},\ z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Attaquons nous maintenant aux cercles exinscrits. Je note D et E les points de contact du cercle exinscrit en A avec AB et AC respectivement. Comme dans la partie précédente, $BD = BP'$ et $CP' = CE$ et $AD = AE$. On a les équations suivantes :

$$x + y + BP' = x + z + CP' \quad \text{et} \quad BP' + CP' = BC = y + z.$$

On en déduit facilement que $BP' = z$ et $CP' = y$. La fin de la preuve est facile, AP', BQ' et CR' sont concourantes, le point d'intersection a pour coordonnées barycentriques (x, y, z).

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Prenons une droite d qui passe par A, et soit P l'intersection de cette droite avec BC. Soient v et w des poids tels que P soit le barycentre de (B, v) et (C, w). Un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) est sur la droite d ssi

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{BP}{PC} = \frac{w}{v} \ \text{ ssi } \ \beta w - \gamma v = 0.$$

Pour une droite quelconque, prenons P et Q deux points de la droite de coordonnées barycentriques homogènes (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Un point M : (α, β, γ) est sur la droite PQ ssi il existe deux réels λ et μ tels que M soit le barycentre de (P, λ) et (Q, μ).

$$M : (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2).$$

Je vais un peu tricher et utiliser des propriétés d'algèbre linéaire que vous verrez en prepa. L'équation précédente veut dire que le vecteur (α, β, γ) est combinaison linéaire des deux vecteurs (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), ce qui est équivalent à

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha \\ y_1 & y_2 & \beta \\ z_1 & z_2 & \gamma \end{pmatrix} = 0$$

ce qui revient à l'équation suivante :

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)\alpha + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\beta + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\gamma = 0.$$

Donc les droites en coordonnées barycentriques ont une équation du type :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

pour un triplet de réels (u, v, w) unique à un coefficient multiplicatif près.

En ce qui concerne les cercles, c'est un cauchemar. L'équation est de la forme

$$-a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta + (u\alpha + v\beta + w\gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

pour un triplet de réels (u, v, w) unique.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Appliquons la loi des sinus dans les triangles BAP et PAC :

$$\frac{BP}{\sin(\widehat{BAP})} = \frac{AP}{\sin(\widehat{B})} \quad \text{et} \quad \frac{PC}{\sin(\widehat{PAC})} = \frac{AP}{\sin(\widehat{C})}.$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\sin(\widehat{BAP})}{\sin(\widehat{PAC})}\frac{\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B})}.$$

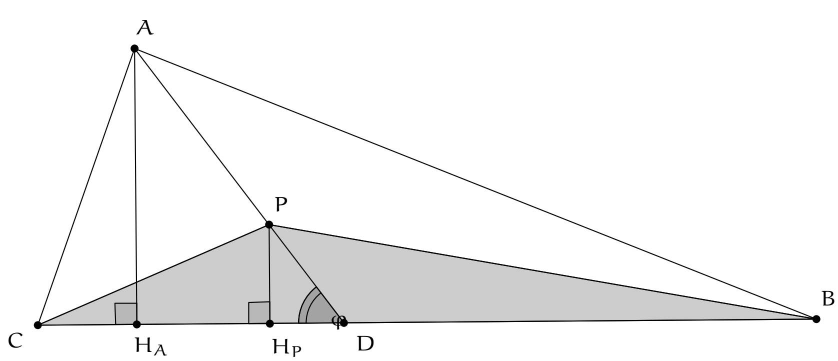
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\sin(\widehat{BAP})}{\sin(\widehat{PAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBQ})}{\sin(\widehat{QBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACR})}{\sin(\widehat{RCB})}.$$

Le théorème de Ceva classique est donc equivalent au théorème de Ceva trigonométrique.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit P un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ). Je veux montrer que le triplet $([BPC], [PCA], [PAB])$ est aussi un jeu de coordonnées barycentriques de P, c'est-à-dire que les deux triplets sont proportionneles l'un à l'autre. Montrons que

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{[BPC]}{[BPC] + [PCA] + [PAB]} = \frac{[BPC]}{[ABC]},$$

les deux autres équations se font de la mème manière.



On note D l'intersection de AP avec BC, et on note φ l'angle $\widehat{ADC}$. D'après les propriétés des barycentres, P est le barycentre de (A, α) et $(D, \beta + \gamma)$ et

$$\frac{PD}{AD} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Maintenant calculons les deux aires qui nous intéressent :

$$[PBC] = \frac{1}{2} BC \cdot PH_P = \frac{1}{2} BC \cdot PD \sin(\varphi) \quad \text{et} \quad [ABC] = \frac{1}{2} BC \cdot AD \sin(\varphi).$$

En faisant le quotient de ces deux égalités on trouve le résultat voulu.

$$P : ([BPC], [PCA], [PAB]).$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Nous allons utiliser le résultat de l'exo 3 qui dit que les droites ont pour équation $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$. Faisons le premier sens : on suppose que les trois points sont alignés, et soit $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ l'équation de cette droite. Soit $(\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$ un triplet de coordonnées barycentriques de P. Comme P est sur BC, $\alpha_P = 0$, et comme P est sur la droite qui passe par P, Q, R, $v\beta_P + w\gamma_P = 0$. Le point P est le barycentre de (B, β_P) et (C, γ_P), donc

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\gamma_P}{\beta_P} = \frac{-v}{w}.$$

On trouve de même

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{-w}{u} \quad \text{et} \quad \frac{AR}{RB} = \frac{-u}{v}.$$

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{-v}{w} \cdot \frac{-w}{u} \cdot \frac{-u}{v} = -1.$$

Pour faire l'autre sens, on suppose $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$. Soit d la droite PQ d'équation $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$. Comme P et Q sont sur la droite, on peut utiliser le même raisonnement qu'avant pour montrer

$$\frac{BP}{PC} = \frac{-v}{w} \quad \text{et} \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{-w}{u}.$$

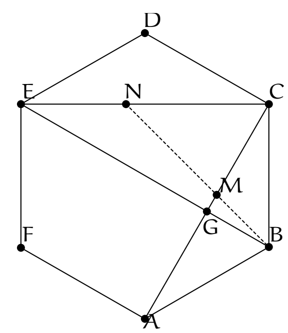
On utilise ensuite l'égalité $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$ pour montrer que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{-u}{v},$$

et il est facile de vérifier ensuite que R est bien sur la droite.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> La démonstration est quasi immédiate avec Ceva trigonométrique. Si un point a pour coordonnées barycentriques (α, β, γ), alors son conjugué isogonal a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Commençons par faire la figure, en rajoutant G le point d'intersection de AC et BE (par les symétries de l'hexagone, G est le milieu de AC) :



Considérons le triangle CEG : les points M, N et B sont sur GC, CE et EG respectivement, et sont alignés, nous pouvons donc utiliser Ménélaüs :

$$\frac{GM}{MC} \cdot \frac{CN}{NE} \cdot \frac{EB}{BG} = -1.$$

Calculons les trois quotients :

$$GM = AM - AG = rAC - \frac{1}{2}AC \quad \text{donc} \quad \frac{GM}{MC} = \frac{(r - 1/2)AC}{(1-r)AC}) = \frac{2r-1}{2-2r}.$$

$$\frac{CN}{NE} = \frac{rCE}{CE - rCE} = \frac{r}{1-r}.$$

Pour le dernier quotient on va calculer EB et BG en utilisant les propriétés de l'hexagone régulier. Soit c la longueur du côté de l'hexagone, EB est une grande diagonale et mesure $2c$ (on divise l'hexagone en 6 triangles equilatéraux et ça saute aux yeux), et $BG = c/2$ (AG est l'axe de symétrie de l'un des petits triangles equilatéraux), $\frac{EB}{BG} = -4$. Donc r vérifie l'équation suivante

$$\begin{array}{rrcl} & -4 \cdot \frac{2r-1}{2-2r} \cdot \frac{r}{1-r} & = & -1 \\ \text{ssi} & 2(2r-1)r & = & (1-r)^2 \\ \text{ssi} & 4r^2 - 2r & = & r^2 - 2r + 1 \\ \text{ssi} & r & = & \pm\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}$$

Le réel r vaut soit $\sqrt{3}3$, soit $-\sqrt{3}/3$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Soit (α, β, γ) les coordonnées barycentriques de O et P, Q, R les points d'intersection respectifs de AO et BC, BO et AC, CO et AB. On veut trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'aire noire soit la moitié de l'aire totale. Vérifiez que les deux conditions ci dessous sont bien équivalentes :

$$[AOQ] + [BOR] + [COP] = \frac{1}{2}[ABC]$$
$$\text{ssi} \quad [APC] + [BQA] + [CRB] = \frac{3}{2}[ABC].$$

Exprimons ces aires en fonction de α, β et γ. Soit h_A la longueur de la hauteur issue de A,

$$[ABC] = \frac{1}{2}BC \cdot h_A \quad \text{et} \quad [APC] = \frac{1}{2}PC \cdot h_A.$$
$$\frac{[APC]}{[ABC]} = \frac{PC}{BC} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}.$$

Ainsi l'aire noire est égale à l'aire blanche ssi

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{2}.$$

Il faut montrer que ceci est équivalent à "O est sur une médiane". Montrons le premier sens. Supposons que O soit sur une médiane, disons la médiane de AB, cela veut dire que $\alpha = \beta$.

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} + \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{3}{2}.$$

Maintenant attaquons nous au deuxième sens : on suppose que α, β, γ vérifient

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} &= \frac{3}{2} \\
\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\gamma}{\gamma+\alpha} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\
\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} &= 0
\end{aligned}$$

On peut supposer que $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ (ici je vous truande un peu, je vous laisse chercher pourquoi je suis un truand, et pourquoi ça marche quand même).

L'équation devient
$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma}.$$
Mais ceci ressemble à une équation de convexité (un peu cachée). Soient

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x=\alpha+\beta,\ y=\beta+\gamma, \lambda=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma},\ 1-\lambda=\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}.$$

L'équation que l'on a trouvée se réecrit ainsi :

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=f(\lambda x+(1-\lambda)y).$$

Mais la fonction $f(x)=1/x$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}+$, donc cette égalité n'a lieu que si $\lambda=0$, $\lambda=1$ ou $x=y$. Ces trois cas correspondent à $\alpha=\beta$, $\beta=\gamma$ et $\alpha=\gamma$, donc seulement si O est sur une médiane.

Solution de l'exercice 10 Nous avons vu dans l'exo 1 que le centre du cercle cercle inscrit avait pour coordonnées barycentriques (a,b,c), on peut donc facilement en déduire les coordonnées barycentriques des points de la figure :$P:(0,b,c)$, $Q:(a,0,c)$, $R:(a,b,0)$. On regarde le cercle qui passe par B,P,Q et R. Dans l'exo 3 je vous ai dit qu'un cercle avait pour équation

$$-a^2\beta\gamma-b^2\gamma\alpha-c^2\alpha\beta+(u\alpha+v\beta+w\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=0.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le triplet (u,v,w). Comme le cercle passe par $B:(0,1,0)$, on vérifie facilement que $v=0$. On utilise le fait que P et R sont sur le cercle pour montrer que

$$u=\frac{c^2b}{a+b} \quad \text{et} \quad v=\frac{a^2b}{b+c}.$$

Ensuite on utilise le fait que Q est sur le cercle pour montrer que

$$ua+wc=\frac{b^2ac}{a+c} \ \text{ donc } \ \frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}=\frac{b}{a+c}.$$