DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2013

# Exercices de géométrie

## - Exercices -

**Exercice 1**

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre $O$. Les diagonales $(AC)$ et $(BD)$ se coupent en $P$. Les cercles circonscrits aux triangles $ABP$ et $CDP$ se recoupent en $Q$. Si $O, P, Q$ sont distincts, prouver que $(OQ)$ est perpendiculaire à $(PQ)$.

**Exercice 2** (formule de Brahmagupta)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible, $a, b, c, d$ les longueurs de ses côtés $AB, BC, CD, DA$ et $p$ son demi-périmètre. Montrer que :

$$aire(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

**Exercice 3**

Existe-t-il un triangle dont les longueurs des côtés sont des nombres premiers et dont l'aire est entière non nulle ?

**Exercice 4**

Soit $ABC$ un triangle, $O$ et $I$ les centres de ses cercles circonscrit (de rayon $R$) et inscrit (de rayon $r$). Calculer la puissance de $I$ par rapport au cercle circonscrit à $ABC$. En déduire la formule d'Euler : $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

**Exercice 5**

Montrer que si $a, b, c$ sont les longueurs des côtés d'un triangle, $abc \geqslant (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. En déduire que : $R \geqslant 2r$, $R$ et $r$ étant les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle.

**Exercice 6**

Les diagonales $AC$ et $BD$ d'un quadrilatère inscriptible $ABCD$ se coupent en $E$. Prouver que si $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et $AE = 3 \cdot CE$, alors la somme de deux des côtés du quadrilatère est égale à la somme des deux autres.

**Exercice 7**

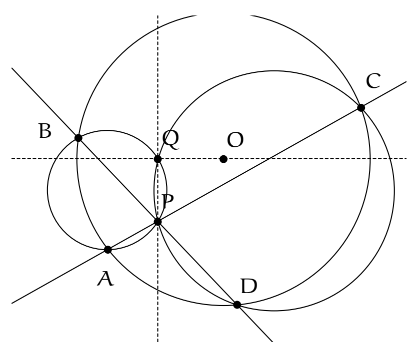
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant la propriété $(P)$ : $aire(ABC) = aire(BCD) = aire(CDE) = aire(DEA) = aire(EAB) = 1$. Calculer l'aire du pentagone $ABCDE$. Ce pentagone est-il nécessairement régulier ?

## - Solutions des exercices -

*Solution de l'exercice 1*

L'angle $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{PQD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} = \widehat{AOD}$ car les angles inscrits $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ sont égaux chacun à la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOD}$. On en déduit que $A, D, O, Q$ sont cocycliques, donc $\widehat{OQD} = \widehat{OAD}$. Dès lors $\widehat{OQP} = \widehat{OQD} + \widehat{DQP} = \widehat{OAD} + \widehat{DCA} = 90^\circ$ car l'angle inscrit $\widehat{DCA}$ est égal à l'angle de $(AD)$ à la tangente en $A$ au cercle de centre $O$, et cette tangente est perpendiculaire à $(OA)$.

*Solution de l'exercice 2*




Le quadrilatère $ABCD$ étant convexe, son aire $S$ est la somme des aires des triangles $ABC$ et $CDA$, soit : $\frac{1}{2}(ab \sin \widehat{B} + cd \sin \widehat{D})$ en appelant $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ les angles du quadrilatère. Pour faire disparaître ces sinus, il faut utiliser des cosinus : $16S^2 + (2ab\cos\widehat{B} - 2cd\cos\widehat{D})^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\widehat{B}+\widehat{D})$. Comme $ABCD$ est inscriptible, $\widehat{B} + \widehat{D} = \pi$, d'où : $16S^2 + (2ab\cos\widehat{B} - 2cd\cos\widehat{D})^2 = (2ab + 2cd)^2$. Or les cosinus s'obtiennent par la formule d'Al Kashi : $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B} = c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{D}$, d'où $2ab\cos\widehat{B} - 2cd\cos\widehat{D} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ et finalement : $16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \left((a+b)^2 - (c-d)^2\right)\left((c+d)^2 - (a-b)^2\right) = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-$

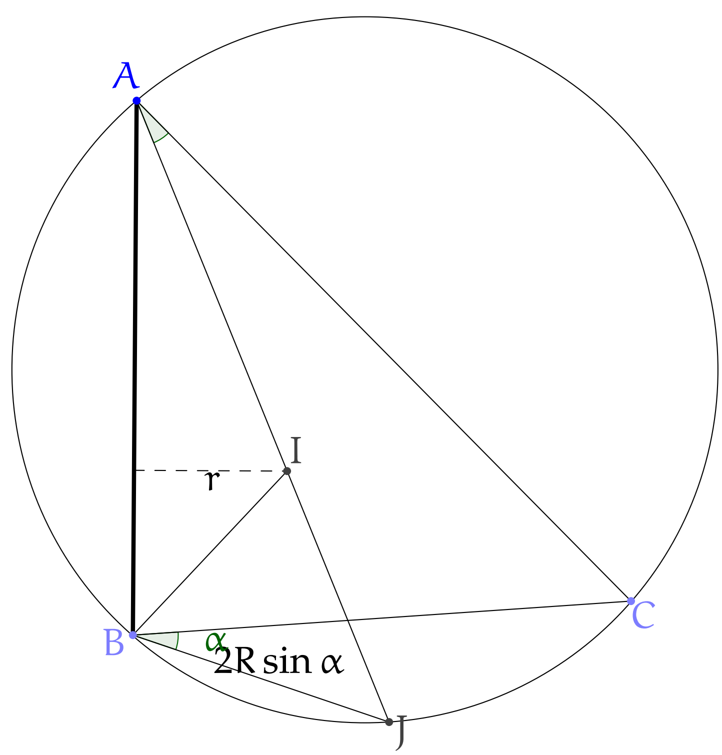
$b+c+d)(-a+b+c+d) = 16(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)$ ce qui achève la démonstration.

On notera que pour $d = 0$, soit $D = A$, on retrouve la formule bien connue de Héron : $\mathrm{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Par ailleurs, la démonstration ci-dessus montre que si $\widehat{B} + \widehat{D} \neq \pi$, alors l'aire est inférieure à $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ : un quadrilatère de côtés $a, b, c, d$ a une aire maximale lorsqu'il est inscriptible.

*Solution de l'exercice 3*

Si l'on appelle $a, b, c$ les longueurs des côtés du triangle et $S$ son aire, la formule de Héron peut s'écrire : $16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$. Or les quatre facteurs sont entiers de même parité, ils sont obligatoirement tous pairs. Ce qui signifie que soit un soit trois des nombres $a, b, c$ sont pairs. Ces trois nombres étant premiers, un ou trois d'entre eux est égal à 2. Si tous les trois sont égaux à 2, alors la formule de Héron donne $S^2 = 3$ et $S$ n'est pas entier. Si un seul est égal à 2, soit $p$ le plus petit des deux autres : d'après l'inégalité triangulaire (stricte car le triangle est d'aire non nulle), le plus grand sera strictement inférieur à $p+2$, donc égal à $p$ car lui aussi doit être premier. On trouve alors $S^2 = p^2 - 1$, qui ne peut pas être un carré parfait. Donc un tel triangle n'existe pas.

*Solution de l'exercice 4*

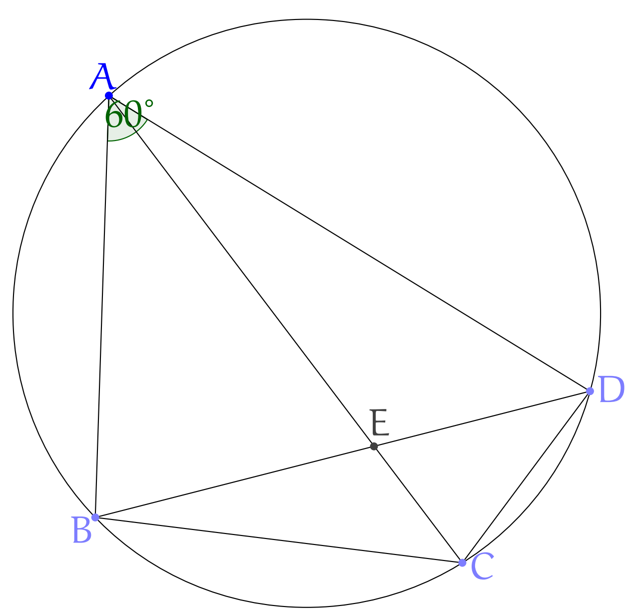


Posons $\alpha = \widehat{BAI} = \widehat{IAC}$, et $\beta = \widehat{CBI} = \widehat{IBA}$, et appelons J le point où $(AI)$ recoupe le cercle circonscrit. Dans le triangle BIA, $\widehat{BIJ} = \widehat{BAI} + \widehat{IBA} = \alpha + \beta$, mais comme l'angle inscrit $\widehat{JBC} = \widehat{JAC} = \alpha$, $\widehat{JBI}$ vaut lui aussi $\alpha + \beta$, donc le triangle JBI est isocèle : $JI = JB = 2R \sin\alpha$ (corde interceptée par un angle inscrit de mesure $\alpha$). Or $AI \sin\alpha = r$ ($r$ est la distance de I au côté AB de l'angle $\widehat{ABI} = \alpha$). Donc en valeur absolue, $IA \cdot IJ = 2Rr$ et comme I est intérieur au cercle circonscrit, sa puissance par rapport audit cercle est $-2Rr$. Par ailleurs la puissance d'un point par rapport à un cercle est le carré de sa distance au centre moins le carré du rayon du cercle. On en déduit : $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

*Solution de l'exercice 5*

Remarquons d'abord que d'après l'inégalité triangulaire, chacun des trois nombres $a+b-c, a-b+c, -a+b+c$ est positif ou nul. Or : $(a+b-c)(a-b+c) = a^2 - (b-c)^2 \leqslant a^2$, tout comme $(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant c^2$ et $(-a+b+c)(a+b-c) \leqslant b^2$. En multipliant ces trois inégalités, toutes entre termes positifs, on obtient : $(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2 \leqslant a^2b^2c^2$, d'où l'inégalité cherchée sachant que chacun des membres est positif ou nul. Or d'après la formule de Héron, $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \frac{8S^2}{p}$, en appelant classiquement S l'aire du triangle et $p = \frac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre. Et $abc = 4RS$ car $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$ et $c = 2R\sin\widehat{C}$. Donc $R \geqslant \frac{2S}{p} = 2r$, la formule $S = rp$ résultant classiquement de $S = \text{aire}(ABI) + \text{aire}(BCI) + \text{aire}(CAI)$.

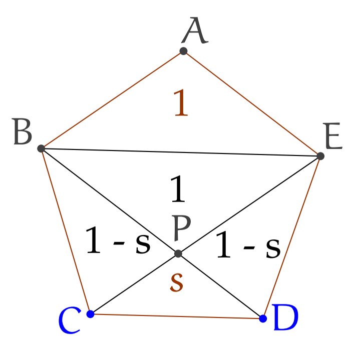
*Solution de l'exercice 6*



Pour utiliser l'hypothèse $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ il faut faire intervenir l'aire du triangle BAD, égale à $\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\frac{\pi}{3}$, soit la formule d'Al Kashi : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\frac{\pi}{3} = AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD$. Pareillement, comme les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ du quadrilatère inscriptible ABCD sont supplémentaires : $BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2 \cdot CB \cdot CD \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = CB^2 + CD^2 + CB \cdot CD$. Or la deuxième relation de l'hypothèse permet de comparer les aires de DAB et BCA : $\mathfrak{aire}(DAE) = 3 \cdot \mathfrak{aire}(DCE)$ et $\mathfrak{aire}(BAE) = 3 \cdot \mathfrak{aire}(BCE)$, donc $\mathfrak{aire}(DAB) = 3 \cdot \mathfrak{aire}(DCB) = 3 \cdot CD \cdot CB \sin\frac{2\pi}{3}$. Comme $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$, on en déduit : $AB \cdot AD = 3 \cdot CB \cdot CD$. Donc $(AB - AD)^2 = BD^2 - AB \cdot AD = BD^2 - 3 \cdot CB \cdot CD = (CB - CD)^2$, d'où l'on déduit : ou bien $AB - AD = CB - CD$, soit $AB + CD = AD + BC$, ou bien $AB - AD = -(CB - CD)$, soit $AB + BC = CD + DA$.

*Solution de l'exercice 7*

Les triangles BCD et CDE, de même aire, ont même base CD donc même hauteur relative à CD, d'où (BE) parallèle à (CD). On démontre pareillement que, par exemple, (CE) parallèle à (AB) et (BD) à (AE). Si l'on appelle P l'intersection des diagonales BD et CE, ABPE est un parallélogramme. Par symétrie par rapport au centre du parallélogramme, $\mathfrak{aire}(BPE) = \mathfrak{aire}(EAB) = 1$. Reste à déterminer l'aire $s$ de PCD, car $\mathfrak{aire}(PCB) = \mathfrak{aire}(PDE) = 1 - s$ d'où $\mathfrak{aire}(ABCDE) = 4 - s$. Or $\frac{\mathfrak{aire}(PCB)}{\mathfrak{aire}(PCD} = \frac{PB}{PD} = \frac{\mathfrak{aire}(EPB)}{\mathfrak{aire}(EPD)}$ peut s'écrire : $\frac{1-s}{s} = \frac{1}{1-s}$, soit : $1 - 3s + s^2 = 0$, dont la seule racine comprise entre 0 et 1 est : $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. D'où $\mathfrak{aire}(ABCDE) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.




Le pentagone n'est pas nécessairement régulier. Considérons en effet un pentagone régulier, et choisissons un repère orthonormé dans lequel les sommets A, B, C, D, E ont pour coordonnées respectives ; $(a, a')$, $(b, b')$, $(c, c')$, $(d, d')$, $(e, e')$. Considérons un autre repère, ni orthogonal ni normé, et traçons dans cet autre repère les points de mêmes coordonnées. Toutes les aires du premier repère seront multipliées par la même constante dans le second repère, donc dans ce second repère les cinq triangles auront également la même aire. Pourtant le pentagone ne sera plus du tout régulier.

**Utilisation des nombres complexes en géométrie**

Pour conclure, voici deux exemples d'utilisation des nombres complexes en géométrie, un classique et facile, un autre non classique et plus difficile.

Rappelons que les nombres complexes sont les nombres de la forme $x + iy$, où $i$ vérifie $i^2 = (-i)^2 = -1$. A chaque nombre complexe $x+iy$ on peut associer le point de coordonnées $(x, y)$ ou le vecteur de composantes $(x, y)$. $x + iy$ est appelé l'affixe du point ou du vecteur. On peut ainsi quotienter deux vecteurs en calculant le quotient de leurs affixes : ce quotient $x + iy$ a pour module $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ le rapport des modules des vecteurs et pour argument $\theta$ (tel que $x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ l'angle entre le vecteur dénominateur et le vecteur numérateur. Les deux complexes $x + iy$ et $x - iy$ sont dits conjugués, et si un complexe est de module $1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ son conjugué est égal à son inverse.

**Exercice 8**

Sur les côtés d'un quadrilatère convexe $ABCD$, à l'extérieur du quadrilatère, on construit quatre triangles rectangles isocèles $AMB, BNC, CPD, DQA$, rectangles en $M, N, P, Q$ respectivement. Montrer que $MP$ et $NQ$ sont perpendiculaires et de même longueur.

*Solution de l'exercice 8*

Dire que $MA$ et $MB$ sont perpendiculaires et de même longueur signifie : $MB = i \cdot MA$ ou $MB = -i \cdot MA$. Supposons que les sommets $A, B, C, D$ soient positionnés de telle sorte que $MB = i \cdot MA$, appelons $a, b, c, d$ les affixes de $A, B, C, D$ et $m, n, p, q$ ceux de$M, N, P, Q$. $b - m = i(a - m)$, d'où $(1-i)m = b - ia$. On obtient pareillement : $(1-i)n = c - ib$, $(1-i)p = d - ic$ et $(1-i)q = a - id$, donc l'affixe de $MP$, $p - m = \frac{ia-b-ic+d}{1-i} = i\frac{a+ib-c-id}{1-i} = i(q - n)$ a même module que l'affixe de $NQ$, leurs arguments diffèrent de $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit à prouver que les segments sont perpendiculaires et de même longueur.

**Exercice 9**

*Théorème de Morley*

Montrer que les points d'intersection des trissectrices d'un triangle forment un triangle équilatéral.

*Ce théorème, historiquement important, se démontre de plusieurs manières. L'une d'elles, due à Alain Connes, a fait l'objet d'un problème d'agrégation. En voici une utilisant les nombres complexes :*

*Solution de l'exercice 9*

Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les affixes des sommets $A, B, C$ d'un triangle, inscrit dans un cercle de centre $O$ (d'affixe 0) et de rayon $R$. Considérons trois complexes $a, b, c$, de module 1, tels que : $\beta = \alpha c^6, \gamma = \beta a^6, \alpha = \gamma b^6$ et $a^2b^2c^2 = j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, racine cubique de l'unité. Comme $(\alpha\beta\gamma)a^6b^{12} = \alpha\beta\gamma\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right) = \alpha^3$, l'une des racines cubiques de $\alpha\beta\gamma$, $m$, vérifie :

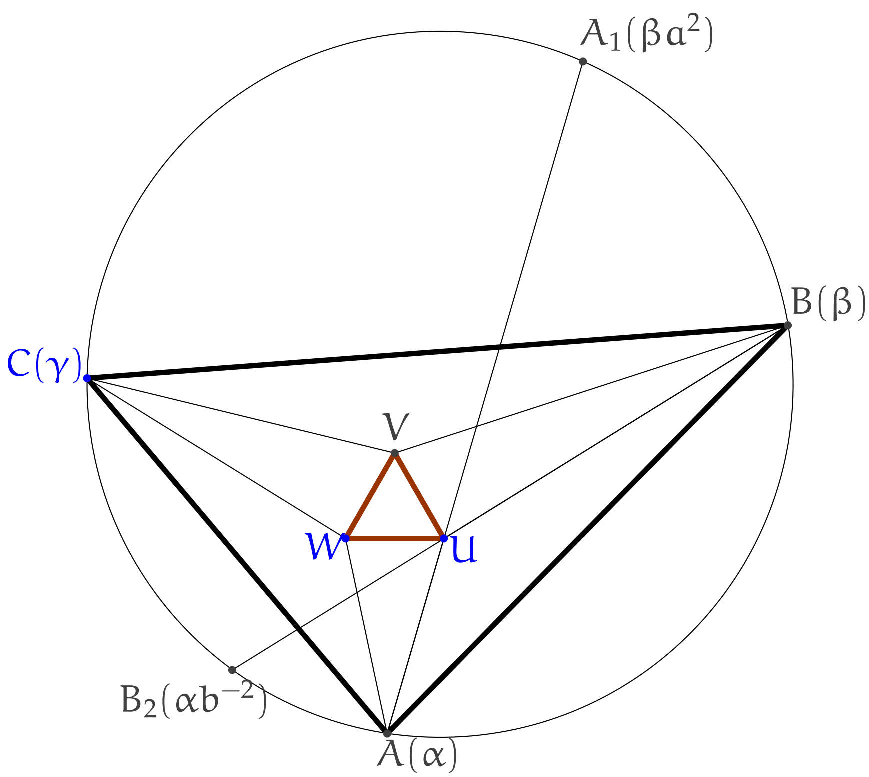
$$\alpha = ma^2b^4 = mj^2c^{-4}a^{-2}$$

$$\beta = \alpha c^6 = mjb^2c^4 = ma^{-4}b^{-2}$$

$$\gamma = mj^2c^2a^4 = mjb^{-4}c^{-2}$$

Or, de manière très générale, si $z$ et $z'$ sont deux complexes de même module non nul, pour tout $m \neq 0$, $m(z^2 - z'^2)$ est perpendiculaire à $mzz'$, puisque $\frac{z}{z'}$ et $\frac{z'}{z}$ sont conjugués.

Il en résulte que la trisectrice issue de $A$, d'affixe $\alpha = ma^2b^4$, et passant par $A_1$, d'affixe $\beta a^2 = ma^{-2}b^{-2}$, est perpendiculaire à $mb$, donc parallèle à $mb(a-a^{-1})(ab+a^{-1}b^{-1})$, puisque $(a-a^{-1})$ est imaginaire pur et $(ab+a^{-1}b^{-1})$ est réel. Dès lors, le point d'affixe : $u = ma^{-2}b^{-2}+mb(a-a^{-1})(ab+a^{-1}b^{-1}) = m\left(a^{-2}b^{-2} + (a^2b^2 - b^2) + (1 - a^{-2})\right)$ appartient à la trisectrice $AA_1$.



La trisectrice issue de B, d'affixe $\beta = ma^{-4}b^{-2}$, et passant par $B_2$, d'affixe $\alpha b^{-2} = ma^2b^2$, est, quant à elle, perpendiculaire à $ma^{-1}$, donc parallèle à $ma^{-1}(b - b^{-1})(ab + a^{-1}b^{-1})$, et elle passe par le point $u' = ma^2b^2 - ma^{-1}(b - b^{-1})(ab + a^{-1}b^{-1})$.

Il se trouve que

$$u = u' = m(1 + jc^{-2} + j^2c^2 - a^{-2} - b^2)$$

Le point d'affixe $u = u'$ est donc l'intersection des trisectrices $AA_1$ et $BB_2$.

Une simple permutation suffit pour déterminer les affixes des deux autres intersections :

$$v = mj(1 + ja^{-2} + j^2a^2 - b^{-2} - c^2)$$
$$w = mj^2(1 + jb^{-2} + j^2b^2 - c^{-2} - a^2)$$

et il est clair que : $u + jv + j^2w = 0$, soit : $j(v - u) = -j^2(w - u)$, ce qui entraîne que $u, v$ et $w$ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.