DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

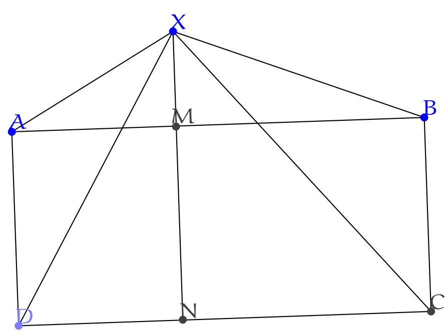
AUTEUR : Simon PÉPIN-LEHALLEUR
STAGE : Montpellier 2012

Exercices de géométrie

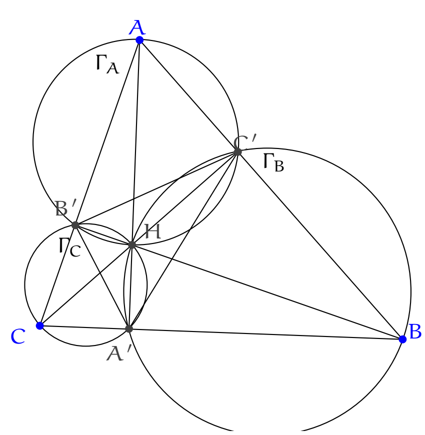
- Énoncés -

Exercice 1 Soient A, B, C, D quatre points du plan. Prouver l'équivalence des deux conditions suivantes :

1. $ABCD$ est un rectangle.
2. Pour tout point X du plan, $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$

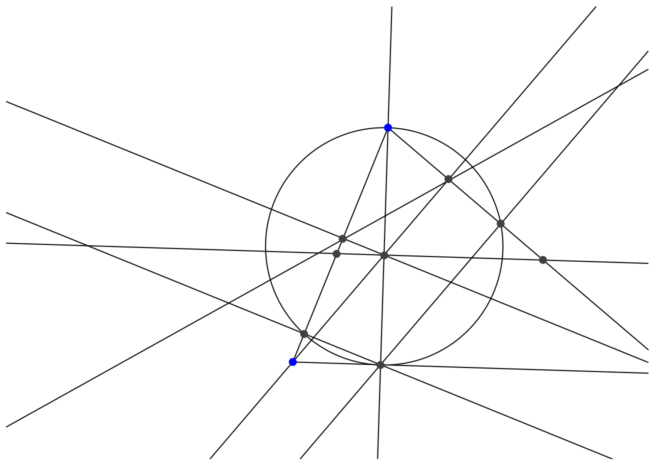


Exercice 2



Soit ABC un triangle aigu. On note A' le pied de la hauteur issue de A, et de même pour B' et C'. Calculer les angles du triangle $A'B'C'$ en fonction de ceux de ABC. Montrer que le plus grand angle de $A'B'C'$ est supérieur ou égal au plus grand angle de ABC. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 3

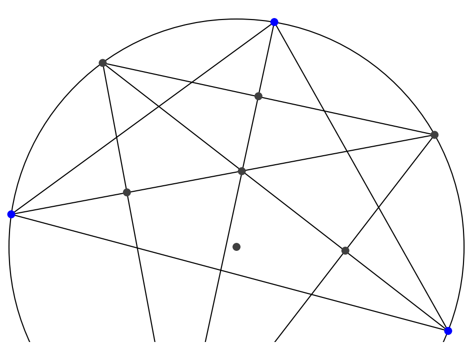


Soit ABC un triangle, H_A le point d'intersection de la hauteur issue de A avec la droite (BC), H_B le point d'intersection de la hauteur issue de B avec la droite (AC) et H_C le point d'intersection de la hauteur issue de C avec la droite (AB). On projette orthogonalement H_A sur les droites (AB), (BC) ce qui donne deux points D et E. Prouver que $(DE) \parallel (H_BH_C)$.

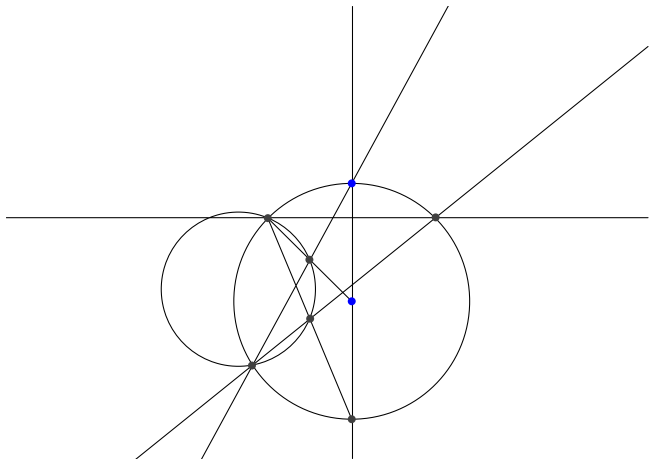
Exercice 4 Soit ABC un triangle, G son centre de gravité. Prouver que

$$AG \perp BG \Leftrightarrow BC^2 + AC^2 = 5AB^2$$

Exercice 5



Soient six points A, C_1, B, A_1, C, B_1 pris sur un cercle dans cet ordre. Prouver que les droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont les hauteurs du triangle ABC si et seulement si ce sont les bissectrices du triangle $A_1B_1C_1$.



Exercice 6 Soit Γ un cercle de centre O et de diamètre AB, CD une corde de Γ avec $(AB)\perp(CD)$. Soit AE la corde passant par A et le milieu M de OC. Prouver que DE passe par le milieu de BC.

Exercice 7 Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = 1/2(a+b+c)$, r le rayon du cercle inscrit et R le rayon du cercle circonscrit. Montrer que :

$$abc = 4prR$$
$$ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR$$

- Corrigé -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> "ABCD est un rectangle" est équivalent à "ABCD est un parallélogramme" et "$AB\perp AD$", ou encore en termes vectoriels à "$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$" et "$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$".

<u>Solution avec le théorème de Pythagore</u> : Preuve de $(1) \Rightarrow (2)$: on introduit les projetés orthogonaux M et N de X sur (AB) et (CD) respectivement. Par le théorème de Pythagore :

$$AX^2 + CX^2 = AM^2 + MX^2 + CN^2 + NX^2$$
$$BX^2 + DX^2 = BM^2 + MX^2 + DN^2 + NX^2$$

Comme $ABCD$ est un rectangle, les points X, M, N sont alignés (sur la perpendiculaire commune à (AB) et (CD) passant par X), et l'on a :

$$\begin{aligned} AM^2 &= DN^2 \\ BM^2 &= CN^2 \end{aligned}$$

En mettant tout ensemble, on obtient (2).

Preuve de $(2) \Rightarrow (1)$: on spécialise l'hypothèse (2) aux points particuliers du problème, à savoir les sommets A, B, C, D, ce qui donne :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + AD^2 \\ AB^2 + BC^2 &= BD^2 \\ AC^2 &= BC^2 + CD^2 \\ AD^2 + CD^2 &= BD^2 \end{aligned}$$

En sommant deux à deux, cela entraîne $2AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2BD^2$, d'où $AC = BD$. En réinjectant dans le système, on obtient tout de suite $AB = CD$ et $AD = BC$. Mais alors on a par exemple $BD^2 = AB^2 + AD^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on a $(AB)\perp(AD)$, et de même pour tous les autres angles. Donc $ABCD$ est un rectangle.

Solution vectorielle : On manipule l'expression intervenant dans (2) pour isoler la dépendance en X :

$$\begin{aligned} AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX})^2 + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DX})^2 - BX^2 - DX^2 \\ &= AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BX} + CD^2 + 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DX} \\ &= AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DX}) + CD^2 + 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DX} \\ &= AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + CD^2 + 2\overrightarrow{DX} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \end{aligned}$$

Preuve de $(2) \Rightarrow (1)$: l'hypothèse (2) entraine en particulier que $AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2$ est indépendant de X, donc d'après le calcul précédent que le vecteur en facteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est nul. Donc (2) entraine que $ABCD$ est un parallélogramme. On a en particulier $AB = CD$. On réinjecte ces informations dans le calcul :

$$\begin{aligned} AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2 &= 2AB^2 + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Donc (2) entraine que $AB \perp AD$. On a montré que $ABCD$ est un rectangle.

Preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) : il suffit de reprendre le raisonnement précédent à l'envers.

Solution de l'exercice 2 Le fait que ABC est aigu implique que H est à l'intérieur du triangle ABC, ce qui assure que l'ordre des points sur les cercles considérés est celui qu'on utilise dans la preuve. Que se passe-t-il si ABC n'est pas aigu ?

Notons α, β, γ les angles de ABC en A, B, C, et la même chose pour $A'B'C'$. On introduit l'orthocentre H de ABC, et les cercles Γ_A, Γ_B, Γ_C de diamêtre HA, HB et HC. On a $A' \in \Gamma_B \cap \Gamma_C$, $B' \in \Gamma_A \cap \Gamma_C$, $C' \in \Gamma_A \cap \Gamma_B$. D'après la propriété des angles inscrits, on a $\widehat{B'C'H} = \widehat{B'AH}$. D'autre part le triangle ACA' est rectangle donc $\widehat{B'AH} = 90^\circ - \gamma$. On montre de même que $\widehat{CC'A'} = 90^\circ - \gamma$, d'où

$$\gamma' = \widehat{B'C'A'} = 180^\circ - 2\gamma$$

On montre de même que $\alpha' = 180^\circ - 2\alpha$, $\beta' = 180^\circ - 2\beta$.

Par symétrie, on peut supposer que $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Alors $\gamma' \geqslant \beta' \geqslant \alpha'$ et $\gamma' - \alpha = 180^\circ - 2\gamma - -\alpha = \beta - \gamma \geqslant 0$. On a égalité si et seulement si $\beta = \gamma$, i.e si ABC est isocèle en A et $\alpha \geqslant \beta = \gamma$.

Solution de l'exercice 3 On va montrer qu'en fait les triangles AH_CH_B et ADE sont directement semblables car chacun est inversement semblable au triangle ABC. La réciproque du théorème de Thalès montre alors que $(DE) \parallel (H_BH_C)$.

ADE et ABC inversement semblables : On introduit le cercle Γ de diamêtre AH_A. On a $\widehat{H_ADA} = \widehat{AEH_A} = 90^\circ$, donc les points D et E lui appartiennent. La propriété des angles inscrits implique que $\widehat{EDA} = \widehat{EH_AA}$. Or $\widehat{EH_AA} = 90^\circ - \widehat{CH_AE}$ car $(AH_A) \perp (BC)$ et $\widehat{CH_AE} = 90^\circ - \widehat{ACB}$ car $(H_AE) \perp (AC)$. Donc $\widehat{EDA} = \widehat{ACB}$. De même $\widehat{AED} = \widehat{CBA}$. Comme on a bien sûr $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$, on en conclut que ADE et ABC sont inversement semblables.

AH_CH_B et ABC inversement semblables : Soit H l'orthocentre du triangle (qui est le point de concours des trois hauteurs). On introduit la parallèle à (BC) passant par H, qui coupe (AB) en B' et (AC) en C'. Par le théorème de Thalès, les triangles ABC et $AB'C'$ sont directement semblables. Mais par ailleurs, le point H joue le même rôle dans le triangle $AB'C'$ que le point D dans le triangle ABC ! (et les points H_B, H_C jouent le rôle des points E et D.) Donc par la première partie de la preuve, AH_CH_B et $AB'C'$ sont inversement semblables, et on a terminé.

Solution de l'exercice 4 Le théorème de Pythagore et sa réciproque montrent que $AG \perp BG \Leftrightarrow AB^2 = AG^2 + BG^2$. Pour exploiter cette condition, on donne deux rédactions : une utilisant seulement la formule d'Al Kashi, l'autre avec du calcul vectoriel. Les deux sont équivalentes, mais cela illustre comment le produit scalaire "automatise" ce type de raisonnement. Solution avec Al Kashi : Soient M_A, M_B les milieux de BC et de AC. Comme G est le centre de gravité de ABC, on $AG = 2/3AM_A$ et $2/3BM_B$. D'autre part, en appliquant la formule d'Al Kashi dans les triangles ABM_B et ABM_A, on obtient :

$$BM_B^2 = AB^2 + AC^2/4 - AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$$

$$AM_A^2 = AB^2 + BC^2/4 - AB \cdot BC \cdot \cos(\beta)$$

D'où $AG^2 + BG^2 = AB^2 + AC^2 - 4AB(BC \cdot \cos(\alpha) + AC \cdot \cos(\beta))$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$AB = BC \cdot \cos(\alpha) + AC \cdot \cos(\beta)$$

formule qui vient en découpant AB au niveau du pied de la hauteur issue de C.

Solution vectorielle : Comme G est le centre de gravité de ABC, on a $\overrightarrow{AG} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{BG} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AG^2 + BG^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} \\ AB^2 &= 1/9(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} \\ 5AB^2 &= AC^2 + BC^2 + 18\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} \end{aligned}$$

L'équivalence à démontrer est maintenant claire.

Solution de l'exercice 5 Implication directe : on suppose que (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont les hauteurs de ABC. Montrons par exemple que (AA_1) es la bissectrice de $A_1B_1C_1$ en A_1, c'est-à-dire que $\widehat{B_1A_1A} = \widehat{AA_1C_1}$ (les deux autres se traitent de la même manière). Soit $D = (AC) \cap (BB_1)$ et $E = (AB) \cap (CC_1)$. Alors les deux triangles rectangles ABD et AEC ont un angle commun, d'où $\widehat{B_1BA} = \widehat{ACC_1}$. Or par la propriété des angles inscrits, $\widehat{B_1BA} = \widehat{B_1A_1A}$ et $\widehat{ACC_1} = \widehat{AA_1C_1}$, ce qui conclut.

Implication inverse : on suppose que (AA_1), (BB_1) et (CC_1) sont les bissectrices de $A_1B_1C_1$. Montrons par exemple que (AA_1) est la hauteur de ABC en A, c'est-à-dire que $(AA_1) \perp (BC)$. On écrit :

$$\widehat{CFA} = 180° - \widehat{ACF} - \widehat{CAF}$$

D'une part, par la propriété des angles inscrits et l'hypothèse :

$$\widehat{CAF} = \widehat{CC_1A_1} = 1/2\widehat{B_1C_1A_1}$$

D'autre part, en appliquant deux fois la propriété des angles inscrits, puis l'hypothèse :

$$\widehat{ACF} = \widehat{AA_1B} = \widehat{AA_1C_1} + \widehat{C_1A_1B} = \widehat{AA_1C_1} + \widehat{C_1A_1B} = 1/2(\widehat{B_1A_1C_1} + \widehat{C_1B_1A_1})$$

D'où finalement :

$$\widehat{CFA} = 180^\circ - 1/2(\widehat{B_1C_1A_1} + \widehat{B_1A_1C_1} + \widehat{C_1B_1A_1}) = 90^\circ$$

Solution de l'exercice 6 Notons $N = (DE) \cap (BC)$. La réciproque du théorème de Thalès dans le triangle OCB montre que N est le milieu de BC si et seulement si (MN) est parallèle à (BC), ou encore si et seulement si $\widehat{MNC} = \widehat{OBC}$. C'est cette égalité d'angle que l'on va démontrer. Par la propriété des angles inscrits, on a $\widehat{OBC} = \widehat{AEC} = \widehat{MEC}$, donc l'égalité à démontrer se réécrit $\widehat{MEC} = \widehat{MNC}$, ce qui est équivalent à montrer que M, N, E, C sont cocycliques. On va démontrer cette cocyclicité.

Les arcs AC et AD de Γ sont de même longueur par symétrie. Comme $E \in \Gamma$, ceci entraîne $\widehat{DEA} = \widehat{AEC}$. Par la propriété des angles inscrits, $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$. Comme le triangle OCB est isocèle, $\widehat{ABC} = \widehat{BCO}$. Donc $\widehat{DEA} = \widehat{BCO}$, c'est-à-dire $\widehat{NEM} = \widehat{NCM}$, ce qui montre que M, N, E, C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7 Notons $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{ACB}$ et S l'aire de ABC.

Première formule : On écrit la formule standard pour S et la loi des sinus en C :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma) = \frac{1}{4} abc/R$$

Donc on est ramené à démontrer $S = pr$, qui devient évidente si l'on découpe ABC en trois triangles le long des bissectrices et que l'on applique la formule "base*hauteur/2".

Seconde formule : On combine la formule de Héron avec la première formule démontrée et la formule $S = pr$:

$$\begin{aligned} p^2r^2 &= S^2 \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c) \\ &= p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ac)p - abc \\ &= -p^3 + (ab+bc+ac)p - 4prR. \end{aligned}$$

On obtient ce qu'on cherche en divisant par p.