DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Guillaume CONCHON-KERJAN
STAGE : Montpellier 2014

Graphes

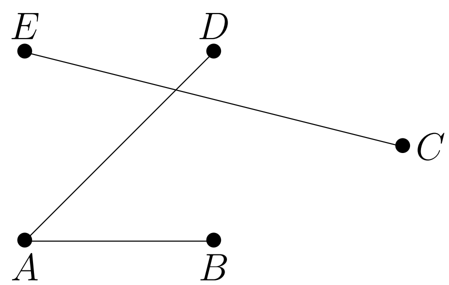
Introduction

Le petit cours donné ici peut être fructueusement approfondi en lisant le polycopié de Pierre BORNSZTEIN, "Cours - Théorie des graphes" (2003), tant pour les détails des preuves que la profusion d'exemples et exercices.

Qu'est-ce qu'un graphe ? Tout simplement la donnée de sommets, qui sont reliés entre eux par des arêtes (pas forcément droites). On peut l'écrire plus formellement comme ça :

Définition 1. *Un **graphe** G est un couple $(S(G), A(G))$, où les $x \in S(G)$ sont les sommets du graphe, et les éléments de $A(G)$, de la forme (x, y) avec $x, y \in S(G)$, en sont les arêtes.*

Plus concrètement, on le représente (de manière non unique) dans le plan par un dessin :



Exemple 2. *Ici, $S(G) = \{A, B, C, D, E\}$ et $A(G) = \{(A, B), (A, D), (C, E)\}$. On peut imaginer que ce sont des personnes, reliées par une arête si et seulement si elles se connaissent.*

On appelle **sous-graphe** d'un graphe une partie de celui-ci : on garde certains sommets, et certaines arêtes qui les relient. La seule restriction est qu'on ne peut garder une arête dont au moins une extrémité a été enlevée.
Un **chemin** est une suite d'arêtes voisines, reliant deux sommets. On parle de **cycle** lorsque le chemin arrive là ou il est parti. Un graphe est dit **connexe** lorsqu'il y a toujours un chemin entre deux sommets quelconques de celui-ci.

Remarques 3. • *On supposera ici qu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets, autrement dit que les graphes sont finis.*
• *On sous-entendra de plus, sauf mention du contraire, que les arêtes sont **non-orientées** ($(A, B) = (B, A)$) et ne sont pas **multiples** : au plus un trait peut relier deux sommets.*

On appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arête qui en sortent. Remarquons que chaque arête contribue pour un pour les degrés de deux sommets. Ce qui permet d'établir le résultat suivant :

Lemme 4. *Poignées de main Dans tout graphe, il y a un nombre pair de sommets de degré impair.*

Démonstration. En effet, la somme des degrés des sommets vaut deux fois le nombre d'arêtes. Il y a donc bien un nombre pair de termes impairs dans cette somme. □

Formulons cela différemment :
Exercice 1
Lors d'une soirée, certaines personnes se serrent la main. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair. Une autre propriété utile :
Exercice 2
Montrez qu'au cours de la soirée, deux personnes ont serré le même nombre de mains.

Structure d'un graphe

Ici, on regarde quelle peut être la tête d'un graphe. Déjà, peut-on le dessiner dans le plan, c'est-à-dire sans que deux arêtes ne se croisent ? Il y a un exemple bien connu où c'est impossible.

Exemple 5. *Il était une fois trois isbas perdues au fin fond de la taïga sibérienne. Un château d'eau, une usine de gaz et une centrale électrique traînaient non loin de là. Il fallait relier les trois pauvres habitations à chacun des trois autres bâtiment. Hélas, personne n'y est jamais arrivé sans que deux conduites ne se superposent...*

On va généraliser un peu tout ça.

Définition 6. *On dit qu'un graphe est* ***planaire*** *lorsqu'il existe une manière de le dessiner dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent.*
On appelle K_n le ***graphe complet*** *à n sommets, c'est-à-dire qu'entre deux sommets il y a toujours une arête.*
On appelle $K_{n,m}$ le graphe à $n+m$ sommets tel que n de ceux-ci soient chacun reliés à tous les m autres et qu'il n'y ait aucune autre arête.

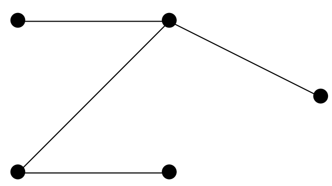
Par exemple, le graphe précédent était $K_{3,3}$. Et on a un super-théorème :

Théorème 7. ***(Kuratowski)***
Un graphe est planaire si et seulement si aucun de ses sous-graphes n'est K_5 ou $K_{3,3}$

La démonstration n'est vraiment pas facile.

Nous connaissons maintenant les graphes complets, regardons à l'inverses des graphes avec peu d'arêtes :

Définition 8. *On appelle* ***arbre*** *à n sommets un graphe* ***connexe*** *avec $n-1$ arêtes.*



Proposition 9. *-Un graphe connexe a au moins $n-1$ arêtes (donc il admet un arbre comme sous-graphe).*
-Les arbres sont les seuls graphes connexes sans cycle.
-De tout graphe connexe, on peut supprimer un certain nombre d'arêtes (éventuellement nul) pour obtenir un arbre.

Exercice 3
Prouver cela.

Maintenant, revenons aux graphes planaires. Il y a une jolie manière de les caractériser. A tout seigneur tout honneur, celui à qui revient son mérite n'est autre que le grand, le fantastique, l'immense Leonhard Euler.

Théorème 10. ***Formule d'Euler***
Si G est un graphe planaire, s son nombre de sommets, a son nombre d'arêtes et f son nombre de faces, alors $s - a + f = 2$.

Remarque 11. *Dans les faces, on compte la face extérieure du graphe, qui est infinie.*

Donnons une esquisse de la démonstration : on utilise le fait qu'un graphe n'est rien d'autre qu'un arbre auquel on ajoute des arêtes, d'après la proposition 9. On commence par démontrer la formule pour un arbre, et on montre qu'elle reste vraie à chaque ajout d'arête.

On en déduit quelques inégalités :

Proposition 12. *Pour tout graphe planaire,*
- $a \leq 3s - 6$
- *si aucune face n'est un triangle, on a* $a \leq 2s - 4$.

Exercice 4
Ben... le démontrer, quoi.

Ceci permet de caractériser assez bien les graphes non planaires.
Exercice 5
Montrer que K_4 est planaire, mais que $K_{3,3}$ et K_5 ne le sont pas.

Promenons-nous sur un graphe

Il est difficile de rester tout le temps en place lors d'un cours trop long. Partons donc nous promener le long des arêtes et des sommets du graphe.

Définition 13. *On dit qu'un graphe est* ***eulérien*** *lorsque l'on peut parcourir ses arêtes de proche en proche sans jamais passer deux fois par la même, en revenant au point de départ.*

Pour caractériser ceci, on a la propriété suivante :

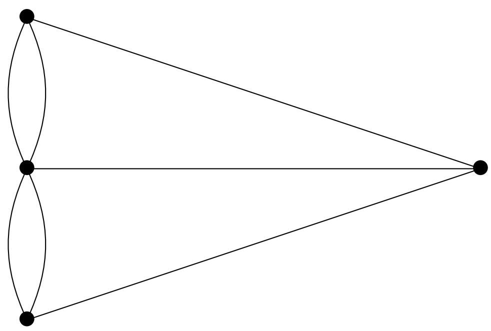
Théorème 14. *Un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

Démonstration. Si un sommet est de degré impair, on ne peut en entrer et en sortir jusqu'à épuiser toutes ses arêtes. Si un sommet est de degré pair, on peut faire une récurrence sur le nombre d'arêtes (à vous de jouer !) □

Remarque 15. *Si on se permet d'avoir un point de départ et un point d'arriver éventuellement distincts, alors une autre configuration est possible : deux sommets de degré impair, le départ et l'arrivée, dont on part ou revient une fois de plus.*

Remarque 16. *Ici, on n'a pas besoin de supposer les graphes simples, il peut y avoir des arêtes multiples.*

L'exemple suivant est fameux : on se demandait au 18e siècle s'il était possible de faire le tour des ponts de la belle cité de Königsberg sans jamais passer deux fois par le même. Voici son plan, qu'en pensez-vous ?



Il existe également des graphes **hamiltoniens**, c'est-à-dire que l'on peut passer une et une seule fois par chaque sommet. Leur caractérisation est un problème fort difficile.

Nombre chromatique

On définit le **nombre chromatique** d'un graphe comme le nombre minimal de couleurs à utiliser pour colorier les sommets de sorte que deux sommets reliés par une arête ne soient pas de la même couleur. On le note en général $\chi(G)$. Pour le calculer, on dispose de différents algorithmes. Le plus simple est...

...L'algorithme dit "glouton" : il s'agit de prendre le sommet de degré le plus haut, le colorier, puis de colorier avec la même couleur par ordre décroissant de degré tous les sommets non reliés à un sommet colorié de cette couleur. Une fois que cela est fait, on recommence avec une autre couleur, en prenant un sommet non colorié de degré maximal.

Exercice 6

Montrer que si $D(G)$ est le degré maximal de G, alors $\chi(G) \leq D(G)+1$.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

C'est une application directe du lemme des poignées de main.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

Soit n le nombre de personnes. Si tout le monde a serré un nombre différent de mains, les n personnes en ont salué respectivement $0, \cdots, n-1$ (aux dernières nouvelles, il n'y avait pas de schizophrène). Celle qui en a salué $n-1$ a dit bonjour à tout le monde, y compris à la personne qui n'en a salué aucune. Contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Prouvons le premier point par récurrence. Pour $n=1$ c'est clair. Si maintenant on sait que tout graphe connexe à n sommets a au moins $n-1$ arêtes, on rajoute un sommet, et il faut bien au moins une arête pour le relier aux autres, donc on a besoin d'au moins n arêtes. Ceci clôt la récurrence.

Pour le second point, qui revient à montrer qu'un graphe connexe avec au moins n sommets possède un cycle, une récurrence fonctionne également. On initialise à $n=3$ (on a un triangle). Maintenant, si on a un graphe avec $n+1$ sommets et au moins $n+1$ arêtes, soit chaque sommet est de degré au moins 2, auquel cas on peut assez facilement faire un circuit fermé dans le graphe (à chaque arrivée sur un sommet, on peut repartir sans faire demi-tour, on finira bien par retomber sur un sommet déjà parcouru). Sinon, on prend un sommet de degré au plus 1. On le supprime avec son arête éventuelle, et on obtient un sous-graphe à n sommets et au moins n arêtes, qui a un cycle par hypothèse de récurrence.

Le troisième point découle du second : on prend un graphe, on casse les cycles un par un en retirant une arête à chaque fois (ce qui ne brise pas la connexité du graphe).

Solution de l'exercice 4
C'est un petit calcul assez simple (donc voir le polycopié de 2003 pour plus de détails...).

Solution de l'exercice 5
Pour K_4, on trouve une représentation planaire assez facilement : un carré avec une diagonale dedans, une diagonale dehors. Et hop.
$K_{3,3}$ comporte 6 sommets, 9 arêtes. Et, aucune face n'est un triangle (sinon on aurait deux usines ou deux maisons reliées entre elles). Donc s'il est planaire, d'après le deuxième point de la propriété un peu plus haut, $9 \leq 2 \times 6 - 4$, ce qui est impossible.
K_5, quant à lui, vérifie $s = 5$, $a = 10$, donc par le premier point de la propriété, on aurait $10 \leq 3 \times 5 - 6$ s'il était planaire.

Solution de l'exercice 6
Soit M le dernier sommet colorié, s'il n'a pas été colorié avant (lors de l'algorithme glouton), c'est qu'un de ses voisins l'a été avant. Donc on a utilisé au plus $d(M)$ couleurs, donc en coloriant M, cela fait $d(M)+1 \leq d(G)+1$ couleurs maximum.