DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaires
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Raphaël BEUZART
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Exercices de géométrie

- Énoncés -

Exercice 1 Soit ABC un triangle.

1) Montrer que le point d'intersection de la médiane issue de A et de la médiane issue de B se coupent en l'unique point M tel que $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection des médianes s'appelle le centre de gravité du triangle.
2) Montrer que la hauteur issue de A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}$. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point qu'on appelle l'orthocentre du triangle.

Exercice 2 Dans un triangle ABC on note O et G le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité.

1) Reconnaître le point X tel que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
2) En déduire que si H est l'orthocentre du triangle ABC, on a la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Exercice 3 On note par h_1, h_2, h_3 les longueurs des trois hauteurs d'un triangle et par r le rayon du cercle inscrit à ce triangle. Montrer que

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}.$$

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que la bissectrice de l'angle $\hat{A}$, la médiatrice de $[AB]$ et la hauteur issue de B sont concourantes. Montrer que la bissectrice de l'angle $\hat{A}$, la médiatrice de $[AC]$ et la hauteur issue de C sont aussi concourantes.

Exercice 5 Soit $\mathcal{C}$ un cercle et BC une corde de $\mathcal{C}$. Soit A le milieu de l'arc BC. Par A on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent le segment $[BC]$ en F et G respectivement. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible.

Exercice 6 Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en E. Montrer que l'on a

$$\frac{AC}{BC}\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

Exercice 7 Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et soient A', B' et C' les symétriques de I par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Le cercle circonscrit à $A'B'C'$ passe par B. Trouver $\widehat{ABC}$.

Exercice 8 Soit ABC un triangle. On note H l'orthocentre et A', B' et C' les milieux des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que les symétriques de H par rapport aux cotés du triangle ainsi que les symétriques de H par rapport à A', B' et C' sont tous sur le cercle circonscrit à ABC.

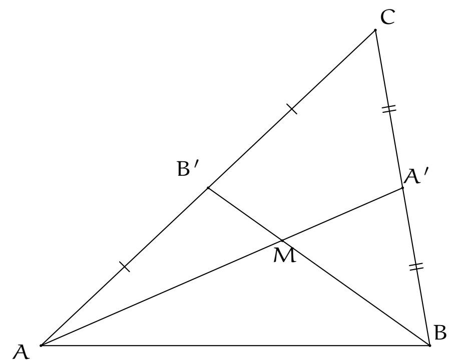
Exercice 9 Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus et dans lequel $AB \neq AC$. Le cercle de diamètre $[BC]$ rencontre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en M et N. On note O le milieu du côté $[BC]$. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR se rencontrent en un point du côté $[BC]$.

Exercice 10 Soit un triangle ABC dont on note Γ le cercle inscrit. Soit Γ_A l'unique cercle tangent aux cotés $[AB]$ et $[AC]$ ainsi qu'à Γ. On définit de même Γ_B et Γ_C. Soient r, r_A, r_B, r_C les rayons respectifs des cercles $\Gamma, \Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$. Montrer que

$$r \leqslant r_A + r_B + r_C.$$

- Corrigés -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>



1) On note A' le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[AC]$, on a alors par la relation de Chasles et puisque $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{0}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'M} \\ &= \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{A'M}\end{aligned}$$

Puisque les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M}$ sont parallèle à (AA'), le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ est parallèle à la droite (AA'). De la même façon le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ est parallèle à la droite (BB'). Comme les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèle on a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.
Soit N le point d'intersection de la médiane issue de A et de la médiane issue de C, on a de la même façon $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{0}$. En soustrayant les deux égalités, on obtient

$$3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$$

Donc $M = N$ et les trois médianes sont concourantes.

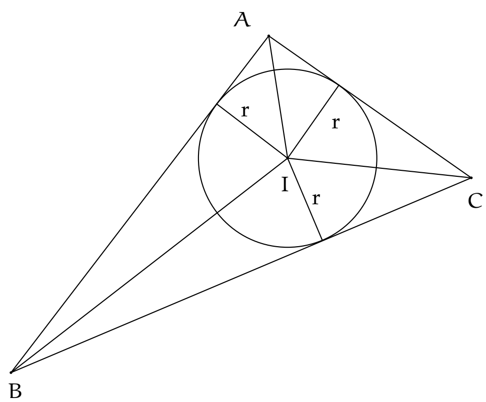
2) La hauteur issue de A est constituée de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$ ce qui revient à dire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$ c'est équivalent à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}$.
De la même façon la hauteur issue de B est l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}$ et la hauteur issue de C est l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$.
Soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B on a alors les égalités

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}$$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH}$$

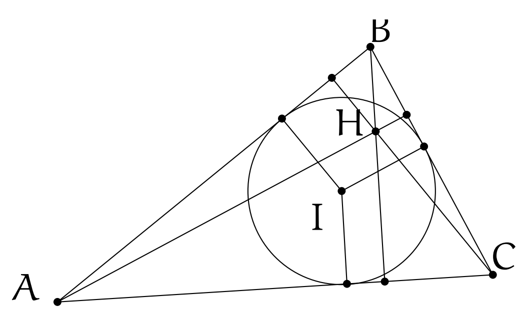
Comme les deux memebres de gauches sont égaux, on en déduit l'égalité $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH}$ c'est-à-dire que H est sur la hauteur issue de C. Les trois hauteurs sont donc concourantes en C.

Solution de l'exercice 2



1) Par la relation de Chasles on a $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Si on note A' le milieu de $[BC]$ on a aussi $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'}$ car $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$. On sait que (OA') est la médiatrice de $[BC]$ on a donc
$$\overrightarrow{AX}.\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{BC} = 0$$
Par conséquent, X est sur la hauteur issue de A. de la même façon X est sur les hauteurs issues de B et C : X est donc l'orthocentre H du triangle ABC.
2) D'après la question précédente on a $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Par la relation de Chasles on a
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$
Or, d'après l'exercice 1 on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. On obtient alors l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 3



On note a, b et c les longueurs respectives de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et I le centre du cercle inscrit. Puisque I est à distance r de chacun des cotés du triangle ABC, les aires des triangles BIC, AIC et AIB sont les suivantes

$$\mathcal{A}(BIC) = \frac{1}{2}ra$$

$$\mathcal{A}(AIC) = \frac{1}{2}rb$$

$$\mathcal{A}(AIB) = \frac{1}{2}rc$$

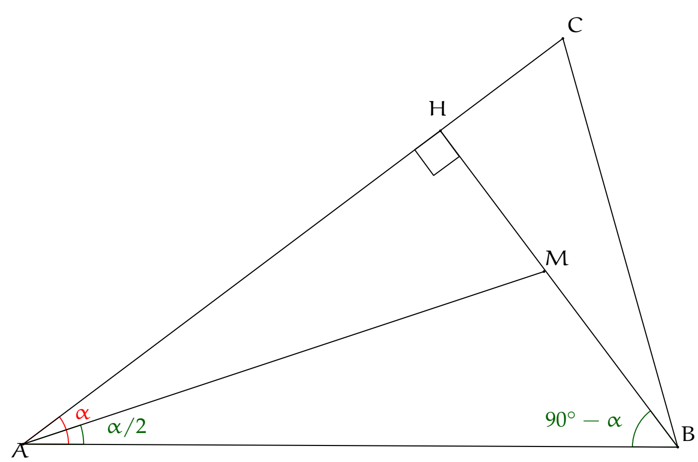
L'aire du triangle ABC est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$. Si h_1, h_2 et h_3 sont les longueurs des hauteurs issues de A, B et C respectiveùent on a aussi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}h_1a = \frac{1}{2}h_2b = \frac{1}{2}h_3c$$

On a donc $h_1a = r(a+b+c)$ et $\frac{1}{h_1} = \frac{a}{r(a+b+c)}$. De la même façon $\frac{1}{h_2} = \frac{b}{r(a+b+c)}$ et $\frac{1}{h_3} = \frac{c}{r(a+b+c)}$, d'où

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a}{r(a+b+c)} + \frac{b}{r(a+b+c)} + \frac{c}{r(a+b+c)} = \frac{1}{r}.$$

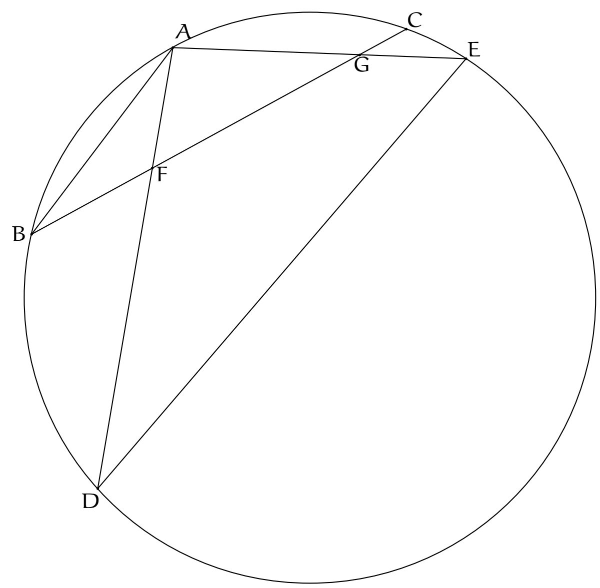
Solution de l'exercice 4



On appelle triangle spécial un triangle ABC tel que la bissectrice de l'angle en A, la hauteur issue de B et la médiatrice de $[AB]$ sont concourantes. On va montrer qu'un triangle est spécial si et seulement si $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ce qui résoudra l'exercice. Pour cela on considère un triangle ABC quelconque, on note H le

pied de la hauteur issue de B, M le point d'intersection de (BH) et la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Puisque BHA est rectangle en H, on a $\widehat{ABM} = 90^\circ - \alpha$. Comme (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ on a $\widehat{BAM} = \frac{\alpha}{2}$.
Le triangle ABC est spécial si et seulement si M est sur la médiatrice de $[BC]$ c'est-à-dire si et seulement si BMC est isocèle en M ce qui est aussi équivalent à $\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$. d'après ce qui précède c'est la même chose que $90^\circ - \alpha = \frac{\alpha}{2}$ c'est-à-dire $\alpha = 60^\circ$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



On a $180^\circ - \widehat{DFG} = 180^\circ - \widehat{AFB} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$. Par la propriété de l'angle inscrit, on a $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$. Comme A est le milieu de l'arc BC on a aussi $\widehat{AEC} = \widehat{AEB}$. On en déduit que $180^\circ - \widehat{DFG} = \widehat{AEB} + \widehat{BED} = \widehat{AED} = \widehat{GED}$ donc D, F, G et E sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Par la propriété de l'angle inscrit, on a $\widehat{EAC} = \widehat{BDE}$ et comme évidemmment $\widehat{AEC} = \widehat{BED}$ les triangles ACE et DBE sont semblables dans cet ordre, on a donc

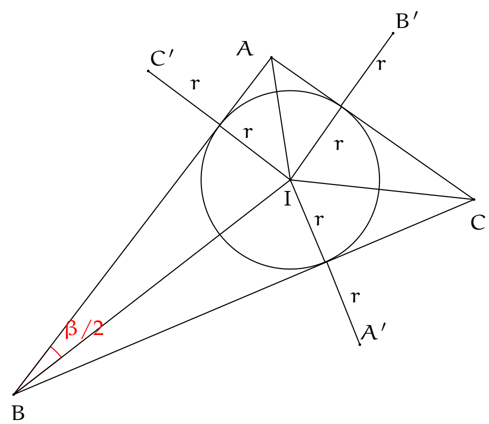
$$\frac{AC}{DB} = \frac{AE}{DE}$$

De la même façon les triangles ADE et CBE sont semblables dans cet ordre, on a donc

$$\frac{AD}{CB} = \frac{DE}{BE}$$

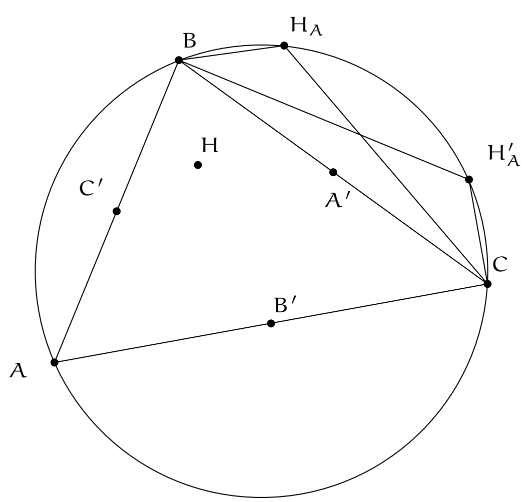
En multipliant les deux égalités on obtient celle de l'énoncé.

Solution de l'exercice 7



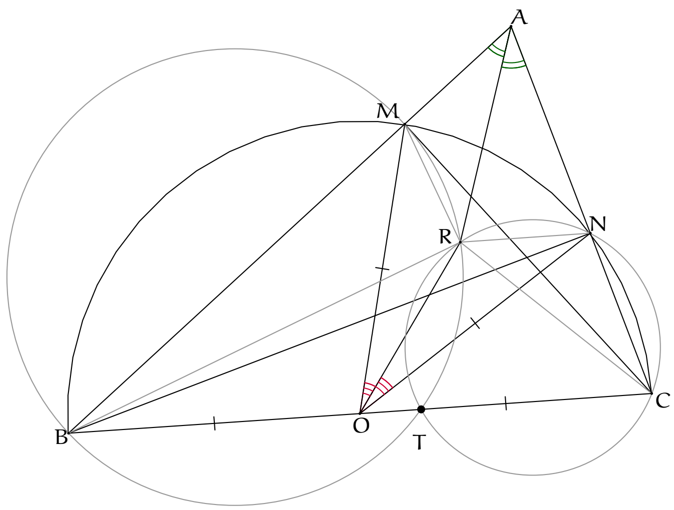
Notons r le rayon du cercle inscrit. On a alors $IA' = IB' = IC' = 2r$, donc le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est le cercle de centre I et de rayon $2r$. Puisque B est sur ce cercle on a $IB = 2r$. Notons $\beta = \widehat{ABC}$ et H le projeté orthogonal de I sur [AB]. On a alors $\widehat{ABI} = \frac{\beta}{2}$ et dans le triangle rectangle IHB on a $\sin(\beta/2) = \frac{r}{2r} = 1/2$ donc $\beta/2 = 30°$ et $\beta = 60°$.

Solution de l'exercice 8



Soit H_A le symétrique de H par rapport à (BC) et H'_A le symétrique de H par rapport à A'. On veut montrer que A, B, H_A, H'_A et C sont des points cocycliques ce qui revient à montrer que $\widehat{BH_AC} = \widehat{BH'_AC} = 180° - \widehat{BAC}$. Or, on a $\widehat{BH_AC} = \widehat{BHC} = \widehat{BH'_AC}$. Tout revient donc à montrer que $\widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$, une simple chasse aux angles donne le résultat.

Solution de l'exercice 9



Soit T l'autre point d'intersection des cercles circonscrits à BMR et CNR. On doit montrer que $\widehat{BTR} + \widehat{CTR} = 180°$. Mais on a $\widehat{BTR} = 180 - \widehat{BMR} = \widehat{AMR}$ et $\widehat{CTR} = 180 - \widehat{CNR} = \widehat{ANR}$. Tout revient donc à voir que $\widehat{AMR} + \widehat{ANR} = 180°$ ou encore que R est sur le cercle circonscrit à MAN.

Les points M et N sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, on a donc $OM = ON$ et le triangle MON est isocèle en O, par conséquent la droite (OR) qui est la bissectrice de $\widehat{MON}$ est aussi la médiatrice de $[MN]$: R est donc aussi le point d'intersection de la médiatrice de $[MN]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$.

Soit R' le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$ et du cercle circonscrit à MAN, R' est alors le milieu de l'arc MN donc est aussi sur la médiatrice de $[MN]$. Par conséquent R' est aussi l'intersection de la bissectrice de $\widehat{MAN}$ et la médiatrice de $[MN]$ donc $R = R'$.