DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Céline ABRAHAM
STAGE : Montpellier 2013

Exercices d'arithmétique

- Énoncé des exercices -

Exercice 1 Soient $a, b \geqslant 1$ des entiers.

(i) A-t-on a divise b^2 si et seulement si a divise b ?

(ii) A-t-on a^2 divise b^2 si et seulement si a divise b ?

Exercice 2 Trouver tous les entiers n tels que $2^n + 3$ est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 3 Montrer que si n admet un diviseur impair, alors $2^n + 1$ n'est pas premier.

Exercice 4 Montrer que pour tout p premier et tout entier $0 < k < p$, $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ est divisible par p.

Exercice 5 Montrer que la fraction $\frac{12n+1}{30n+2}$ est toujours irréductible.

Exercice 6 Montrer qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres dans la décomposition en base 10 de ce nombre est un multiple de 3. Montrer ensuite le même résultat pour 9.

Exercice 7 Montrer que si (x, y, z) est une solution de l'équation suivante alors x ou y est un multiple de 2.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Exercice 8 Écrire sous forme d'une fraction le nombre

$$x = 0,51234123412341234123412341234\ldots$$

Exercice 9 Montrer que l'équation

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$$

n'a pas d'autre solution rationnelle que $x = y = z = 0$. On commencera par chercher les solutions entières.

Exercice 10 Montrer que le produit de cinq nombres consécutifs ne peut pas être un carré.

- Solution des exercices -

Solution de l'exercice 1

(i) Si a divise b, alors comme b divise b^2, on a a divise b^2. En revanche, si a divise b^2, il ne divise pas forcément b. Par exemple 9 divise 3^2 mais 9 ne divise pas 3.

(ii) Si a divise b, on peut écrire $b = ka$ avec $k \geqslant 1$ entier. On élève cette égalité au carré, on obtient $b^2 = k^2a^2$ donc a^2 divise b^2.

Supposons réciproquement que a^2 divise b^2. On va montrer que a divise b. On note pour un nombre n $\nu_p(n)$ la plus grande puissance de p divisant n (valuation p-adique). Pour tout nombre p premier divisant a, on a $\nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)$. En effet, comme a^2 divise b^2, on a $\nu_p(a^2) \leqslant \nu_p(b^2)$. Or $\nu_p(a^2) = 2\nu_p(a)$ et $\nu_p(b^2) = 2\nu_p(b)$. Donc $\nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)$.

Solution de l'exercice 2

- Un carré n'est jamais congru à 3 mod 4, donc si $n \geqslant 2$, $2^n + 3$ ne peut jamais être un carré. Pour $n = 1$, on a $2^1 + 3 = 5$ n'est pas le carré d'un entier. Pour $n = 0$, $2^0 + 3 = 4$ est le carré de 2.
- On cherche deux entiers n et x tels que $2^n + 1 = x^2$. On réécrit cette équation $2^n = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. $x+1$ et $x-1$ sont tous les deux des puissance de 2. Les seules puissances de 2 à distance 2 l'une de l'autre sont 2 et 4. Donc $2^n = 2 \times 4 = 8 = 2^3$. $n = 3$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 3 On écrit $n = km$ avec $k, m \geqslant 1$ et m impair. Comme $a^m + b^m$ se factorise par $a+b$ quand m est impair, l'entier $(2^k)^m + 1$ est divisible par $2^k + 1$, donc n'est pas premier.

Solution de l'exercice 4 Écrivons l'égalité sans dénominateur : $\binom{p}{k} \times k!(p-k)! = p!$. Comme $0 < k < p$, on a $k < p$ et $p - k < p$. Ainsi p divise $\binom{p}{k} \times k!(p-k)!$ mais ne divise pas $k!(p-k)!$. D'après le lemme de Gauss, p divise donc $\binom{p}{k}$.

Solution de l'exercice 5 D'après l'algorithme d'Euclide, on a $\text{pgcd}(30n+2, 12n+1) = \text{pgcd}(12n+1, 6n) = \text{pgcd}(6n, 1) = 1$.

Solution de l'exercice 6 Soit n un entier naturel et $a_0, \dots, a_k$ les chiffres de la décomposition de n en base 10, c'est-à-dire $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \dots + a_k 10^k$. On $10 \equiv 1 \bmod 3$ donc par récurrence pour $j \geqslant 1$ on a $10^j \equiv 1 \bmod 3$. Donc $n \equiv a_0 + \dots + a_k \bmod 3$. Les restes de la division par 3 de n et de la somme des chiffres de la décomposition de n en base 10 sont les mêmes. La preuve précédente est exactement la même pour 9.

Solution de l'exercice 7 On regarde l'équation modulo 4. Si x et y sont tous les deux impairs, alors $x^2 \equiv 1$ donc $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2$. Or un carré ne peut pas être congru à 2 modulo 4.

Solution de l'exercice 8 On a

$$10x = 5,123412341234123412341234\dots$$

et

$$100000x = 51234,123412341234123412341234\dots$$

donc $99990x = 51229$ et finalement $x = \frac{51229}{99990}$. On peut généraliser cette méthode à tout nombre qui admet un développement décimal périodique.

Solution de l'exercice 9 Si on a une solution rationnelle non nulle alors en multipliant par le cube du ppcm de x, y et z on obtient une solution entière non nulle. On cherche donc les solutions entières. On suppose par l'absurde qu'on a un triplet d'entiers (x_0, y_0, z_0) dont au moins un est non nul qui vérifie l'équation. On regarde l'équation modulo 3, on obtient $x_0 \equiv 0 \bmod 3$, x_0 est donc un multiple de 3. On peut écrire $x_0 = 3x_1$ avec x_1 entier. L'équation devient

$$27x_1^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 27x_1y_0z_0 = 0,$$

soit

$$9x_1^3 + y_0^3 + 3z_0^3 - 9x_1y_0z_0 = 0.$$

Ainsi (y_0, z_0, x_1) est une autre solution de l'équation de départ. De même, on peut montrer que $y_0 = 3y_1$ et $z_0 = 3z_1$ avec y_1 et z_1 entiers, donc (x_1, y_1, z_1) est une nouvelle solution.

On obtient que x_0, y_0, z_0 sont divisibles par toute puissance de 3, ce qui est impossible pour des entiers non nuls.

Solution de l'exercice 10 On suppose que a, b, c, d, e sont des entiers consécutifs tels que le produit $abcde$ soit un carré. Si un des cinq nombres contient un facteur premier p supérieur ou égal à 5, alors les quatre autres ne le contiennent pas (car ils sont consécutifs). Comme le produit est un carré, ce facteur premier p apparaît avec une puissance paire. Selon les puissances de 2 et de 3 dans chaque nombre, chacun des nombres a, b, c, d ou e est

1. un carré ;
2. deux fois un carré ;
3. trois fois un carré ;
4. six fois un carré.

On applique le principe des tiroirs, deux des cinq nombres sont dans la même catégorie. Si ces deux nombres sont dans les catégories 2, 3 ou 4, alors leur différence est au moins six, ce qui est impossible car a, b, c, d, e sont consécutifs. Si les deux nombres sont dans la catégorie 1, ils sont tous les deux des carrés. Alors e ne peut pas dépasser 5 car les seuls carrés à distance inférieure à 5 sont 1 et 4. Or $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, qui n'est pas un carré.

Il est donc impossible que les produit de cinq entiers strictement positifs consécutifs soit un carré.