DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Victor QUACH
STAGE : Montpellier 2013

Divisibilité

Ceci constitue le premier cours d'arithmétique donné aux groupe A. Ont été étudiées les notions de divisibilité, de nombres premiers, de décomposition en facteurs premiers, de division euclidienne, de pgcd de ppcm ainsi que le théorème de Bézout et le lemme de Gauss. Nous renvoyons le lecteur au polycopié d'Animath à ce sujet : `http://www.animath.fr/IMG/pdf/cours-arith1.pdf`.

Exercice 1 Soient x et y deux entiers. Montrer que $2x+3y$ est divisible par 7 si et seulement si $5x+4y$ l'est.

Solution de l'exercice 1 On utilise le fait que 7 divise $7(x+y)$ et que si un nombre divise deux entiers, il divise leur différence.
Ainsi, si 7 divise $2x+3y$, alors 7 divise $7x+7y-(2x+3y)=5x+4y$.
Réciproquement, si 7 divise $5x+4y$, alors 7 divise $7x+7y-(5x+4y)=2x+3y$.

Exercice 2 Pour quels entiers n strictement positifs, le nombre n^2+1 divise-t-il $n+1$?

Solution de l'exercice 2 Les entiers considérés sont strictement positifs. Ainsi, si n^2+1 divise $n+1$, alors $n^2+1 \leqslant n+1$, d'où $n^2 \leqslant n$. Et puisque $n>0$, $n \leqslant 1$. Enfin, n étant entier le seul candidat restant est $n=1$, et on vérifie qu'il convient : 2 divise 2. C'est bon !

Les exercices suivants on pour but de montrer l'importance de la factorisation dans les exerices faisant appel à la divisibilité.
Exercice 3 Trouver toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $3^{2n}-2^n$ est premier.

Solution de l'exercice 3 L'expression dont on cherche à discuter de la primalité peut se réécrire $3^{2n}-2^n=(3^2)^n-2^n=9^n-2^n=(9-2)(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+9^{n-3}\cdot 2^2+\cdots+2^{n-1})$.

Pour $n \geqslant 2$, le facteur de droite est supérieur ou égal 9^1, donc différent de 1. Le facteur de gauche étant lui-même différent de 1, on en déduit donc que $3^{2n}-2^n$ est composé.

Il suffit de traiter les cas restants à la main : pour $n=1, 9-2=7$ est premier, pour $n=0, 0-0=0$ n'est pas premier.

L'ensemble cherché est donc $\{1\}$.

Remarque 1. Factoriser une expression n en $n=ab$ est une méthode très classique pour montrer qu'un nombre n'est pas premier. Mais attention, la factorisation ne représente que la moitié du travail. Il reste à vérifier que les deux facteurs sont des diviseurs stricts. Cela peut se faire en vérfiant que $a>1$ et $b>1$ comme tout-à-l'heure, ou en vérifiant que $1<a<n$, ou encore en vérifiant que $a<n$ et $b<n$.

Exercice 4 Montrer qu'il existe une infinité de $a \in \mathbb{N}$ tels que n^4+a n'est premier pour aucun entier $n>0$.

Solution de l'exercice 4 Ici aussi, il s'agit de chercher une factorisation de n^4+a. Les élèves ont immédiatement reconnu l'identité de Sophie-Germain étudié pendant le cours d'algèbre quelques jours plus tôt. Cela amène à poser $a=4k^4$ afin d'écrire :

$$n^4+4k^4=(n^2+2k^2)^2-2n^2\cdot k^2=(n^2+2k^2)^2-(2nk)^2=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)$$

Pour $k \geqslant 1$, les deux facteurs sont supérieurs strictement à 1. Ainsi les valeurs $\{4\cdot 1^4, 4\cdot 2^4, \ldots, 4\cdot k^4, \ldots, \ldots\}$ constituent une inifinité de valeurs convenables pour a.

Exercice 5 Étant donné $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel qu'aucun des nombres $r+1, r+2, r+3, \ldots r+n$ ne soient premiers.

Solution de l'exercice 5 Choisissons $r=(n+1)!+1$. Alors, on vérifie facilement que $r+1$ différent de 2 mais est divisible par 2, que $r+2$ est différent de 3 mais est divisible par 3, ...que $r+k$ est différent de $k+1$ mais est divisible par $k+1$,...que $r+n$ est différent de $n+1$ mais est divisible par $n+1$. Ainsi, un tel r convient.

Exercice 6 Combien 24 a-t-il de diviseurs ? et 140 ? et 2012^{2013} ?

Solution de l'exercice 6 Cet exercice appelle à la question plus générale du nombre de diviseurs de l'entier $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Pour qu'un entier d divise n, il est nécessaire est suffisant que pour tout i, l'exposant de p_i dans sa décomposition en facteurs premiers soit inférieur ou égal à l'exposant correspondant dans la décomposition de n. (Pour plus d'informations à ce sujet, consulter le paragraphe *valuation* p*-adiques* du polycopié d'arithmétique)

Ainsi, si on écrit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\delta_i}$, on doit avoir $\delta \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$ ce qui fait $\alpha_i + 1$ possibilité pour l'exposant de p_i dans d.

Finalement le nombre de diviseurs de n vaut : $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$

En conclusion, $24 = 2^3 \times 3$ admet $4 \times 2 = 8$ diviseurs, $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ admet $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs et $2012^{2013} = 2^{4026} \times 503^{2013}$ admet 4027×2014 = 8110378 divieurs.

Exercice 7 Montrer que pour tout n entier, la fraction $\frac{39n+4}{26n+3}$ est irréductible.

Solution de l'exercice 7 Les exercices de ce types amènent à faire la divisions euclidienne du numérateur par le dénominateur et à réitérer conformément à l'algorithme d'Euclide. Cela s'écrit :

$$39n + 4 = (26n + 3) + (13n + 1)$$
$$26n + 3 = 2(13n + 1) + 1$$

Le pgcd de $39n + 4$ et $26n + 3$ vaut donc 1, ce qui montre que la fraction est irréductible.

Exercice 8 Montrer que pour tout n entier, la fraction $\frac{2n^2+9n-17}{n+6}$ est irréductible.

Solution de l'exercice 8 On procède de la même façon : $2n^2 + 9n - 17 = (2n - 3)(n + 6) + 1$. Si d divise $2n^2 + 9n - 17$ et $2n - 3$, alors d divise 1. Le pgcd vaut donc 1 et la fraction est donc irréductible.

On conclut le cours en mentionnant le résultat trivial mais non moins utile qu'entre deux carrés parfaits consécutifs, il ne peut en exister un troisième.

Exercice 9 Trouver tous les a entiers positifs tels que $a^2 + 2a$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 9 On distingue deux cas. Si $a > 0$, on remarque que $a^2 < a^2 + 2a < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$. Donc $a^2 + 2a$ ne peut être un carré parfait. Si $a = 0$, on trouve $a^2 + 2a = 0$ qui est un carré parfait. C'est donc le seul.