DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2013

Fonctions

La notion de fonction est relativement récente en mathématiques, puisqu'elle est due à Leonhard Euler (1707 - 1783). La plupart des théorèmes que vous étudierez au lycée sont antérieurs, y compris ceux utilisés pour l'étude des variations d'une fonction, comme le théorème de Rolle. Car avant Euler, on savait étudier comment une "quantité" variait en fonction d'une autre quantité.

L'idée originale d'Euler est d'introduire un objet mathématique "fonction" qui associe une valeur à une variable. C'est une notion très générale : la variable et la valeur associée ne sont pas obligatoirement des nombres. Et les fonctions ainsi définies n'ont pas de propriétés a priori, c'est l'hypothèse qui permet de leur définir des propriétés en rapport avec le problème posé. La plupart des fonctions que vous manipulerez sont des "bonnes fonctions", comme les fonctions polynômes ou la fonction exponentielle par exemple. Mais quand vous devrez résoudre un problème très général sur les fonctions, par exemple une équation fonctionnelle (environ 10% des problèmes d'Olympiades sont des équations fonctionnelles), même si, en définitive, la solution est une fonction très élémentaire, vous ne pourrez pas utiliser, dans la démonstration, le présupposé que vous cherchez une "bonne fonction".

Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble. Combien existe-t-il de fonctions f de E dans E vérifiant, pour tout x appartenant à E, $f(f(f(x))) = x$?

Solution de l'exercice 1

L'identité, définie pour tout x par $f(x) = x$, est évidemment solution. Si l'un des éléments a une image distincte de lui-même, par exemple $f(x) = y$, à quoi peut être égal $f(y)$? Si l'on avait $f(y) = x$, on aurait : $f(f(f(x))) = f(f(y)) = f(x) = y$, la relation de l'hypothèse ne serait pas vérifiée. De même si l'on avait

$f(y) = y$. Il en résulte que $f(y) = z$ distinct de x et y, et $f(z) = f(f(f(x))) = x$. La fonction permute circulairement trois des éléments x, y, z de l'ensemble, et laisse invariant le dernier t. En effet, si l'on avait $f(t) \in \{x, y, z\}$, on aurait également $f(f(f(t))) \in \{x, y, z\}$ ce qui contredirait $f(f(f(t))) = t$. Pour définir une de ces fonctions, il suffit de déterminer son "point fixe" (élément t tel que $f(t) = t$, puis le sens de la permutation circulaire des trois autres éléments, ce qui donne $4 \times 2 = 8$ fonctions, plus l'identité, soit 9 en tout.

Exercice 2

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, $f(f(n)) = n + 1$?

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

Etudions quelques valeurs de la fonction, en appelant a la valeur de $f(0)$: $f(a) = f(f(0)) = 1$ par hypothèse, $f(1) = f(f(a)) = a + 1$, et ainsi de suite...

x :	0	a	1	$a+1$	2	$a+2$	3	$a+3$	$\cdots$
$f(x)$:	a	1	$a+1$	2	$a+2$	3	$a+3$	4	$\cdots$

On remarque dans ce tableau que pour tout $n \geqslant 0$, $f(n) = n+a$. Démontrons-le par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$ (initialisation), et si c'est vrai pour n, $f(n + a) = f(f(n)) = n + 1$, $f(n + 1) = f(f(n + a)) = n + a + 1$, ce qui prouve que la relation est encore vraie pour $n + 1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est en particulier vraie pour $n = a$: $f(a) = 2a$. Mais par ailleurs, on sait que $f(a) = 1$. On doit donc avoir : $2a = 1$, ce qui est impossible vu que a est entier. Donc une telle fonction n'existe pas.

A propos de deux fonctions particulières : partie entière et valeur absolue

On notera $[x]$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exercice 3

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $[\sqrt{n} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{4n+1}]$

b) Trouver un réel x tel que $[\sqrt{x} + \sqrt{x+2}] \neq [\sqrt{4x+1}]$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

a) $[\sqrt{4n+1}]$ est le plus grand entier i dont le carré soit inférieur ou égal à $4n+1$, et $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right]$ le plus grand entier j inférieur ou égal à $\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$. j^2 est donc le plus grand carré parfait inférieur ou égal à $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)^2 = n + (n+2) + 2\sqrt{n(n+2)}$. Or $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n(n+2)$, donc $n < \sqrt{n(n+2)} < n + 1$, et $4n + 2 < \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)^2 < 4n + 4$. Le plus grand entier inférieur ou égal à $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)^2$ peut être soit $4n+2$, soit $4n+3$, mais le plus grand carré parfait ? On utilise un résultat d'arithmétique, à savoir que ni $4n+2$ ni $4n+3$ ne peuvent être des carrés parfaits, donc le plus grand carré parfait inférieur ou égal à $4n+3$ est inférieur ou égal à $4n+1$: c'est i^2 d'après sa définition ci-dessus. En d'autres termes, on a bien $i = j$, c'était la relation à démontrer.

b) Nous avons utilisé des propriétés arithmétiques des carrés parfaits. Dès lors qu'on choisit x parmi les réels, nous n'avons plus le même résultat. Par exemple pour $x = \frac{1}{4}$, $[\sqrt{x} + \sqrt{x+2}] = 2$ alors que $[\sqrt{4n+1}] = 1$.

Exercice 4

Montrer que pour tout réel x et tout entier $p \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{x+k}{p}\right] = [x]$

Solution de l'exercice 4

Posons $[x] = pn+r$, avec $0 \leqslant r < p$. Cela signifie que $pn+r \leqslant x < pn+r+1$. Donc si $k \leqslant p-(r+1)$, $n \leqslant \frac{x+k}{n} < n+1$, d'où $[\frac{x+k}{n}] = n$, alors que si $k \geqslant p-r$, $[\frac{x+k}{n}] = n+1$. Les termes de la somme prendront donc $(p-r)$ fois la valeur n et r fois la valeur $n+1$, donc la somme vaudra bien $pn+r = [x]$.

Exercice 5

On considère une fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout entier n,

$$f(n+1) = |f(n)| - f(n-1)$$

a) On suppose $f(1) = 3$ et $f(2) = 2$. Calculer $f(12)$ et $f(0)$.

b) Montrer que pour tout entier n, l'une au moins des trois valeurs $f(n), f(n+1), f(n+2)$ est positive ou nulle.

c) Montrer que pour tout entier n, l'une au moins des quatre valeurs $f(n), f(n+1), f(n+2), f(n+3)$ est négative ou nulle.

d) Montrer qu'il existe un entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 4$, $f(k) \leqslant 0$ et $f(k+1) \geqslant 0$.

e) On suppose que $f(0) = -a \leqslant 0$ et $f(1) = b \geqslant 0$. Calculer $f(9)$ et $f(10)$.

f) Montrer que pour tout entier n, $f(n+9) = f(n)$

Solution de l'exercice 5

a) Si $f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = -1, f(4) = -1, f(5) = 2, f(6) = 3, f(7) = 1, f(8) = -2, f(9) = 1, f(10) = 3, f(11) = 2, f(12) = -1 \cdots$. Par ailleurs, la relation de l'hypothèse peut s'écrire : $f(n-1) = |f(n)| - f(n+1)$ donc $f(0) = 1$: à partir de deux valeurs consécutives de f, on peut calculer toutes les autres valeurs, dans un sens et dans l'autre. On remarque que $f(0) = f(9), f(1) = f(10), f(2) = f(11)$ et $f(3) = f(12)$: le but du problème est précisément de généraliser ce résultat.

b) D'après l'hypothèse, pour tout n : $f(n+2) + f(n) = |f(n+1)| \geqslant 0$, donc l'une au moins des valeurs $f(n+2)$ ou $f(n)$ est positive ou nulle.

Notons que, la fonction identiquement nulle vérifiant les conditions de l'énoncé, il ne sera jamais possible, dans tout ce problème, de remplacer "positive ou nulle" par "strictement positive" ni "négative ou nulle" par "strictement négative".

c) Non seulement $f(n+2) + f(n) = |f(n+1)|$, mais $f(n+3) + f(n+1) = |f(n+2)|$, donc : $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3) = |f(n+1)| + |f(n+2)|$. Si $f(n+1)$ et $f(n+2)$ sont tous deux positifs, on en déduit : $f(n) + f(n+3) = 0$, donc l'une des deux valeurs $f(n)$ ou $f(n+3)$ est négative ou nulle.

d) Parmi les quatre valeurs $f(0), f(1), f(2), f(3)$, on vient de voir que l'une au moins, $f(i)$, est négative ou nulle. $f(i+2) = |f(i+1)| - f(i) \geqslant 0$. Dès lors, de deux choses l'une : soit $f(i+1) \geqslant 0$ et $k = i$ répond à la question. Soit $f(i+1) < 0$ et $k = i+1$ répond à la question.

e) Si $f(0) = -a \leqslant 0$ et $f(1) = b \geqslant 0$, $f(2) = b + a \geqslant 0$, $f(3) = a \geqslant 0$, $f(4) = -b \leqslant 0$, $f(5) = b - a$, dont on ne connaît pas le signe, $f(6) = |b - a| + b \geqslant 0$, $f(7) = |b - a| + a \geqslant 0$, $f(8) = a - b$, dont on ne connaît pas le signe (mais on remarque, conformément à la question c, que $f(8) = -f(5)$). $f(9) = -a = f(0) \leqslant 0$ et $f(10) = b = f(1) \geqslant 0$.

f) D'après la question d, quelle que soit la fonction f vérifiant la condition de l'énoncé, il existe k compris entre 0 et 4 tel que $f(k) = -a \leqslant 0$ et $f(k+1) = b \geqslant 0$. D'après la question e, on aura donc $f(k+9) = -a = f(k)$ et $f(k+10) = b = f(1)$. Mais on a vu à l'occasion de la question a que deux valeurs consécutives de la fonction suffisent à définir toutes les autres, tant dans un sens que dans l'autre. Donc la relation $f(n+9) = f(n)$ se prolonge à toutes les valeurs de n, $f(n)$ étant d'ailleurs explicitement calculé dans la question e. Notre fonction f est périodique de période 9.

Ce problème m'a été proposé par Gilbert Rebel en 1997, sous le nom "Rêve d'absolus". Cela ne fait-il pas rêver d'écrire, en calculant explicitement $f(10)$ à partir de $f(0) = b$ et $f(1) = a$:

"Quels que soient les réels a et b, $|||||||||a| - b| - a| - |a| + b| - ||a| - b| + a| - |||a| - b| - a| + |a| - b| - ||||a| - b| - a| - |a| + b| + ||a| - b| - a| - |||||a| - b| - a| - |a| + b| - ||a| - b| + a| + |||a| - b| - a| - |a| + b| - ||||||a| - b| - a| - |a| + b| - ||a| - b| + a| - |||a| - b| - a| + |a| - b| + ||||a| - b| - a| - |a| + b| - ||a| - b| + a| - |||||||a| - b| - a| - |a| + b| - ||a| - b| + a| - |||a| - b| - a| + |a| - b| - ||||a| - b| - a| - |a| + b| + ||a| - b| - a| + |||||a| - b| - a| - |a| + b| - ||a| - b| + a| - |||a| - b| - a| + |a| - b = a$" ?

Ce même problème a été posé peu après au Concours Général (destiné aux meilleurs élèves de terminale).