DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Ambroise MARIGOT
STAGE : Grésillon 2011

Exercices de géométrie

Exercice 1 Soient Γ et Γ' deux cercles de même rayon, sécants en A et B. Une tangente commune aux deux cercles les touche en C et D. Montrer que (AC) est orthogonale à (BD).

Exercice 2 (Théorème du pôle Sud) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On note I le centre de son cercle inscrit, et I_A le centre du cercle exinscrit à A. La bissectrice issue de A coupe Γ en D.
Montrer que $DB = DC = DI = DI_A$.

Exercice 3 (Application) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. Montrer que les centres des cercles inscrits à ABC, ABD, ACD et BCD forment un rectangle.

Exercice 4 (Droite de Simson) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit D un point du plan, et soient A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de D sur (BC), (AC) et (AB).
Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si $D \in \Gamma$.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, Γ son cercle inscrit et Γ_A son cercle exinscrit à A. Γ touche (BC) en I, Γ_A touche (BC) en J. Soit K le point d'intersection de Γ et (AJ) le plus proche de A. Montrer que $\widehat{JIK}$ est droit.

Exercice 6 Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. Soient I et K les points du plan tels que ABI et CDK soient des triangles équilatéraux sortants par rapport à $ABCD$. Similairement, soient J et L les points du plan tels que BCJ et DAL soient des triangles équilatéraux rentrants par rapport à $ABCD$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 7 (Théorème de Napoléon) Soit ABC un triangle. On construit pour chaque côté du triangle un triangle équilatéral extérieur à ABC ayant ce côté comme base. Soient A', B' et C' les centres respectifs des triangles équilatéraux de bases $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que $A'B'C'$ est équilatéral.

Exercice 8 (Triangle orthique) Soit ABC un triangle acutangle et H son orthocentre. Soient A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectiement de A, B et C. Montrer que H est le centre du cercle inscrit à $A'B'C'$.

- Correction -

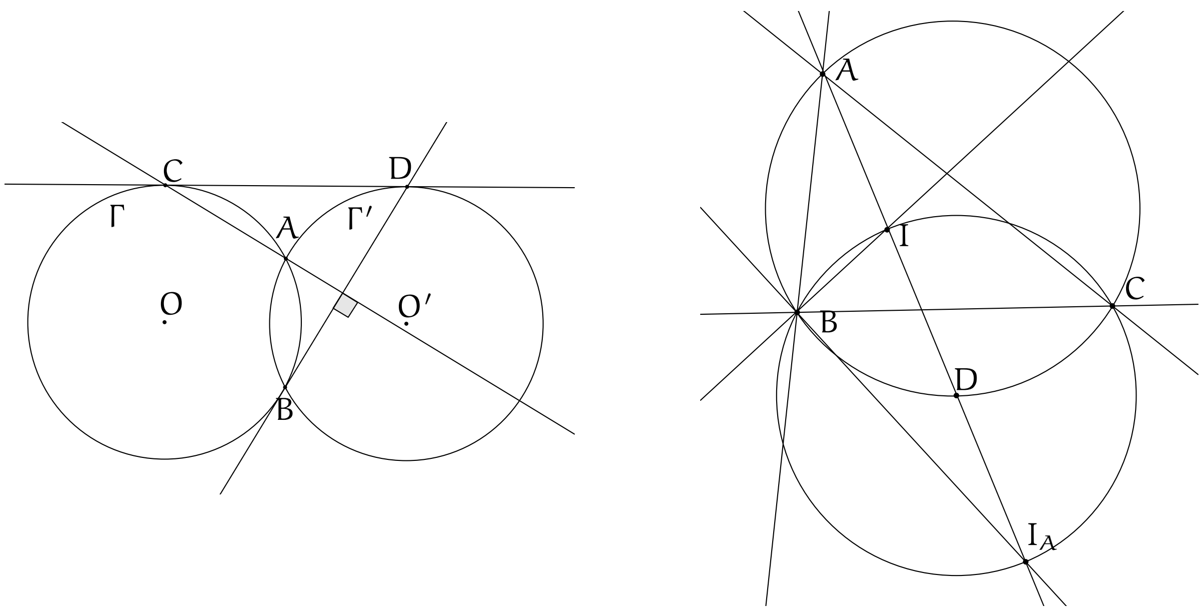

FIGURE 1 – Exercices 1 et 2

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Il suffit de montrer que $\widehat{ACD} + \widehat{BDC} = 90°$. D'après le théorème de l'angle inscrit, cela revient à prouver $\widehat{AOC} + \widehat{BO'D} = 180°$, avec O et O' les centres respectifs de Γ et Γ'. Or la symétrie centale de centre M le milieu de $[AB]$ envoie B sur A, O' sur O et D sur C' le point diamétralement opposé à C, donc $\widehat{BO'D} = \widehat{AOC'}$, ce qui donne le résultat demandé.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> D'après le théorème de l'angle inscrit, (OD) est la bissectrice de $\widehat{BOC}$, donc la médiatrice de $[BC]$, donc $BD = CD$. Montrons que BDI est isocèle en I. On a $\widehat{IBC} = \beta/2$ et $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \alpha/2$, donc $\widehat{IBD} = \alpha/2 + \beta/2$. De plus, $\widehat{BID} = 180° - \widehat{BIA} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \alpha/2 + \beta/2$. Donc $BD = ID$. Enfin, comme les bissectrices intérieures et extérieures sont orthogonales, on peut obtenir I_A comme l'intersetion de (AD) et de la perpendiculaire à (BI) passant par B. Le "théorème de l'équerre" montre alors que I_A est sur le cercle de centre D et contenant I. Donc $DB = DC = DI = DI_A$.

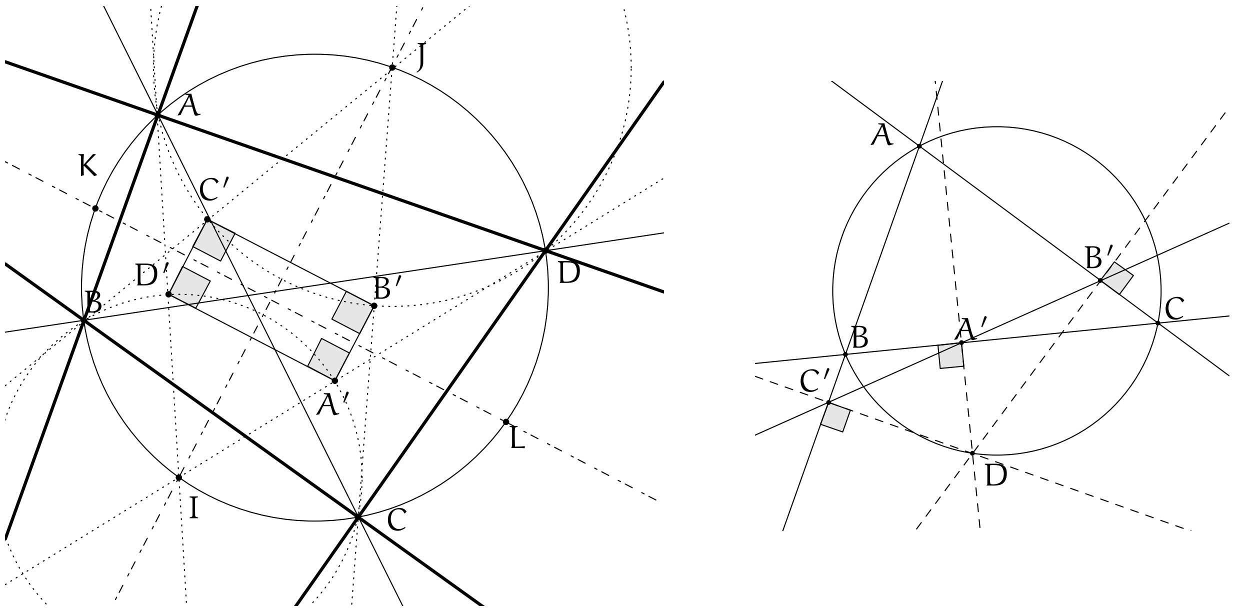

FIGURE 2 – Exercices 3 et 4

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soient D', A', B' et C' les centres des cercles inscrit respectivement à ABC, BCD, ACD et ABD. Appelons I et J les milieux respectifs des arcs BC et AD. L'exercice précédent montre que $IB = IC = ID' = IA'$, et comme (IJ) est la bissectrice de $\widehat{AID}$ (th. de l'angle inscrit), c'est la bissectrice de $\widehat{A'ID'}$ et donc la médiatrice de $[A'D']$. On montre similairement que c'est aussi la médiatrice de $[C'B']$, donc (IJ) est un axe de symétrie de $A'B'C'D'$ qui échange A' et D' ainsi que B' et C'. $A'B'C'D'$ est donc un trapèze isocèle. Si on appelle K et L les milieux respectifs des arcs AB et CD, on montre de la même manière que (KL) est un autre axe de symétrie de $A'B'C'D'$, qui échange C' et D' ainsi que A' et B'. Cela prouve que $A'B'C'D'$ est un rectangle.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

$$\begin{aligned}
A', B', C' \text{ alignés } &\Leftrightarrow B\widehat{A'C'} = C\widehat{A'B'} \\
&\Leftrightarrow \widehat{BDC'} = \widehat{CDB'} \\
&\Leftrightarrow \widehat{B'DC'} = \widehat{CDB} \\
&\Leftrightarrow ABCD \text{ inscriptible,}
\end{aligned}$$

car $\widehat{B'DC'} = 180° - \widehat{BAC}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> L'homotétie de centre A qui envoie Γ_A sur Γ envoie J (le point d'intersection de (AJ) et Γ_A le plus proche de A) sur K, donc la tangente à Γ en K est l'image de (BC) par cette homotétie et est donc parallèle à (BC). Donc $[KI]$ est un diamètre de Γ, donc $(KI) \perp (BC)$.

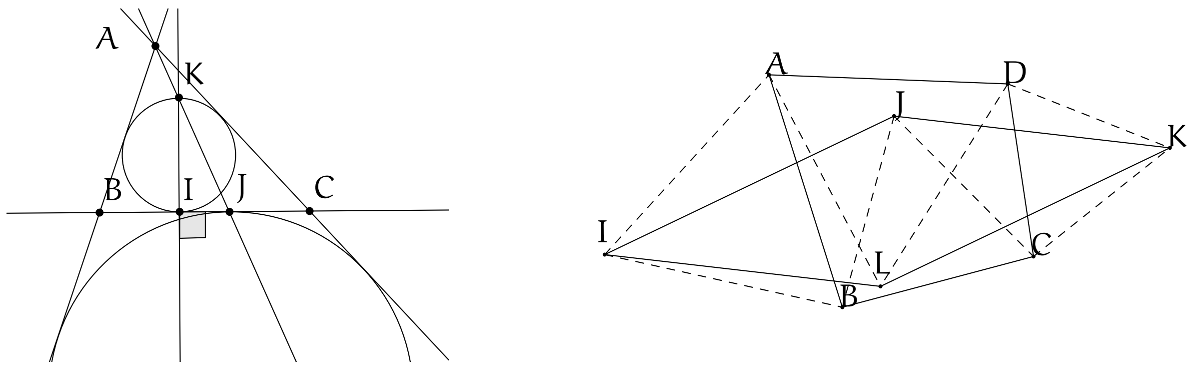

FIGURE 3 – Exercices 5 et 6

Solution de l'exercice 6 La rotation de centre B et d'angle $\pi/3$ envoie A sur I et C sur J. La rotation de centre D et d'angle $\pi/3$ envoie A sur L et C sur K. Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont tous deux l'image par rotation d'angle $\pi/3$ de $\overrightarrow{AC}$, donc sont égaux. Donc $IJKL$ est un parallélogramme.

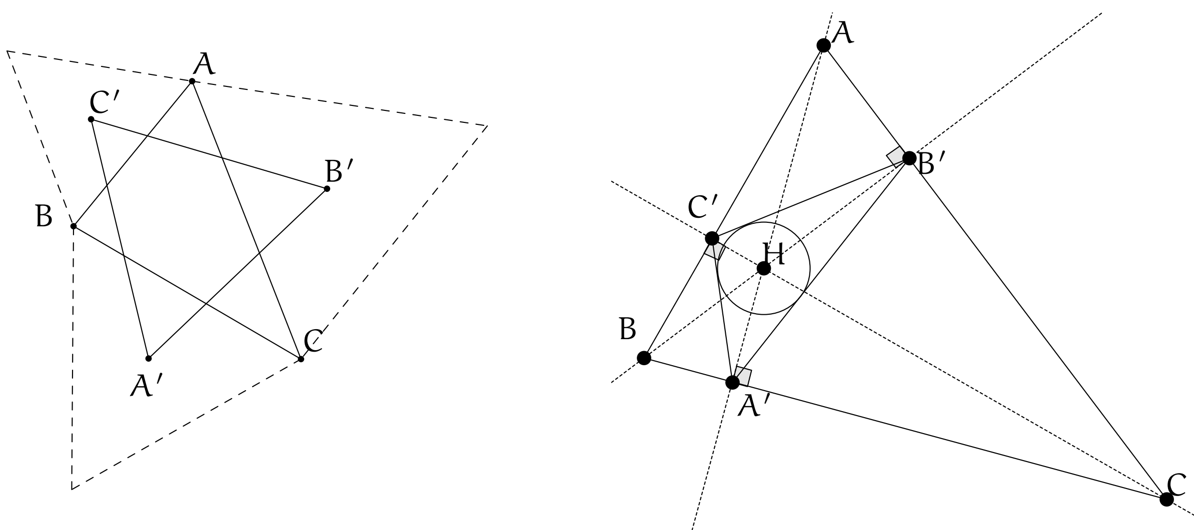

FIGURE 4 – Exercices 7 et 8

Solution de l'exercice 7 Supposons ABC direct. Soient r_1, r_2 et r_3 les rotations de centres respectifs A', B' et C', et d'angles $120°$. On a $r_1 \circ r_2 \circ r_3 = Id$. En effet, cette transformation est la composée de trois rotations d'angle $120°$, donc est une translation. Mais comme $r_1 \circ r_2 \circ r_3(B) = r_1 \circ r_2(A) = r_1(C) = B$, B est un point fixe de cette translation, donc la composée ci-dessus est l'identité. Soit maintenant A'' tel que $A''B'C'$ soit équilatéral direct, et notons a, b et c les symétries axiales d'axes respectifs $(B'C')$, $(C'A'')$ et $(A''B')$. On a $r_3 = a \circ b$ et $r_2 = c \circ a$, donc $r_2 \circ r_3 = c \circ a \circ a \circ b = c \circ b = r_1'$, où r_1' est défini par $r_1' = c \circ b$ et est donc la rotation de centre A'' et d'angle $-120°$. Or on a $r_1 \circ r_1' = Id$, donc r_1 et r_1' sont l'inverse l'une de l'autre. Entre autres, ce sont des rotations de même centre, donc $A' = A''$ et donc $A'B'C'$ est équilatéral.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Comme $BC'HA'$ est inscriptible, on a $\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH} = \widehat{ABB'} = 90^\circ - \alpha$. De même, comme $CB'HA'$ est inscriptible, on a $\widehat{B'A'H} = \widehat{B'CH} = 90^\circ - \alpha$. Donc $(A'H)$ est la bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$. Par symétrie (ou par la même technique), on montre que $(B'H)$ est la bissectrice de $\widehat{A'B'C'}$ et que $(C'H)$ est la bissectrice de $\widehat{B'C'A'}$. Donc H est le centre du cercle inscrit au triangle $A'B'C'$, dit $\mathit{triangle\ orthique}$ du triangle ABC.