Domaine : Combinatoire
Niveau : Débutants
Contenu : Exercices

Auteur : Joon Kwon
Stage : Montpellier 2014

# Combinatoire

**Exercices**

**Exercice 1** On souhaite ranger sur une étagère $k$ livres de mathématiques (distincts), $m$ livres de physique, et $n$ de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières ;
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

**Exercice 2** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n$ le nombre de manières de recouvrir un rectangle de taille $2 \times n$ avec des pièces de taille $1 \times 2$. Trouver une relation de récurrence entre les $a_n$.

**Exercice 3** On dispose d'un domino de largeur 1 et de longueur $n$. On note $A_n$ le nombre de coloriages possibles de ce domino, c'est-à-dire le nombre de façons différentes de noicir ou non les cases. On note $F_n$ le nombre de façons de colorier ce domino de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux cases voisines noircies.

1. Calculer $A_n$.
2. Calculer $F_1$, $F_2$, $F_3$ et $F_4$.
3. Trouver une relation de récurrence entre les $F_n$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+p+1} = F_n F_p + F_{n-1} F_{p-1}$.

**Exercice 4** Soit $n$ et $k$ entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Donner deux démonstrations de la formule suivante : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$.

**Exercice 5** Quel est le nombre de $m$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ vérifiant $x_1 + \ldots + x_m = n$ ?

**Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $2n$ points sur le bord d'un cercle. On note $F_n$ le nombre de façons de relier ces points, deux à deux, à l'aide de $n$ cordes qui ne se recoupent pas à l'intérieur du cercle. Trouver une relation de récurrence entre les $F_n$.

**Exercice 7** Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}$.

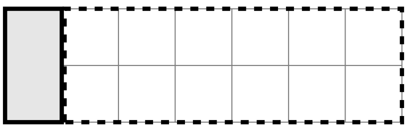
**Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

**Solutions des exercices**

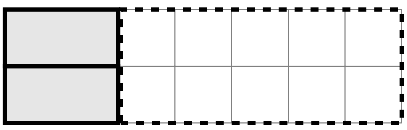
<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. D'abord choisir l'ordre des matières ($3!$ choix), puis pour chaque matière l'ordre des livres ($k!m!n!$ choix). Cela fait au total : $3!k!m!n!$ façons de ranger les livres.
2. On peut d'abord ne considérer que les livres de physique et de chimie. Ils sont au nombre de $n+m$. Il y a donc $(n+m)!$ façons de les ordonner. Il y a ensuite $(n+m+1)$ emplacements pour insérer le groupe des livres de mathématiques (tout à gauche, tout à droite, et entre deux livres consécutifs). Il faut enfin choisir un ordre pour les livres de mathématiques ($k!$ choix). Conclusion, il y a $(n+m+1)!k!$ façons de ranger les livres.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Posons $a_0 = 0$. On a clairement $a_1 = 1$. Pour $n \geqslant 2$, regardons ce qui peut se passer tout à gauche du rectangle. Soit on place une pièce verticale,



et il reste ensuite un rectangle de taille $2 \times (n-1)$ qui se recouvre de $a_{n-1}$ façons différentes ; ou bien, on place deux pièces horizontales,

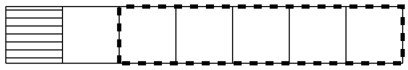


auquel cas il reste un rectangle de taille $2 \times (n-2)$ qui se recouvre de $a_{n-2}$ manières différentes. Conclusion, on a la relation :

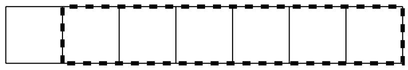
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. Pour chaque case, on peut choisir de la colorier ou non (2 choix). On a donc $A_n = 2^n$.
2. On trouve facilement $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $F_4 = 8$.
3. Prenons $n \geqslant 3$ et distinguons deux cas. Si la première case est noircie, la deuxième ne doit pas l'être.

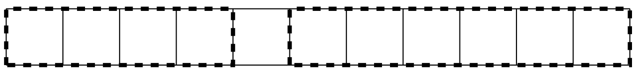
   Il reste ensuite un domino de longueur $n-2$ qu'on peut colorier sans contrainte particulière ($F_{n-2}$ choix). Si la première case n'est pas noircie, il n'y pas pas de contrainte sur la deuxième, et il reste donc un domino de longueur $n-1$ à colorier ($F_{n-1}$ choix).

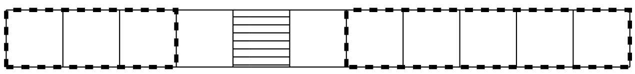
   Conclusion, pour $n \geqslant 3$, on a la relation :

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

4. Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. On se donne un domino de longueur $n+p+1$ et on considère la $(n+1)$-ième case. Si on choisit de ne pas colorier celle-ci, il y a alors à gauche un domino de longueur $n$ et à droite un domino de longueur $p$ qu'on peut colorier sans contrainte particulière. Cela fait en tout $F_n F_p$ choix.

   Si on choisit de la colorier, ses voisines doivent rester blanches, et on a alors des dominos de longueur $n-1$ et $p-1$ à respectivement à gauche et à droite à colorier sans contrainte particulière. Cela fait $F_{n-1}F_{p-1}$ choix.

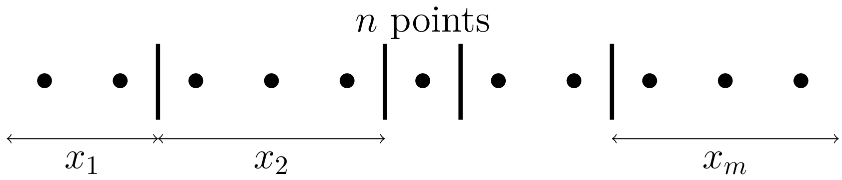
   Conclusion, on a bien :

   $$F_{n+p+1} = F_n F_p + F_{n-1}F_{p-1}.$$

*Solution de l'exercice 4* Le premier terme compte le nombre de sous-ensembles de $\{1, \ldots, n+1\}$ à $k+1$ éléments. Comptons ces derniers d'une autre façon, et les partionnant selon le plus petit élément qu'ils contiennent. Les sous-ensembles dont le plus petit élément est 1 et contenant $k+1$ éléments sont au nombre de $\binom{n}{k}$. En effet, se donner un tel sous-ensemble revient à choisir $k$ éléments dans $\{2, \dots, n+1\}$ (le 1 étant déjà donné). De même, les sous-ensembles à $k+1$ éléments et donc le plus petit élément est 2 sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$. Et ainsi de suite. Finalement, on obtient bien :

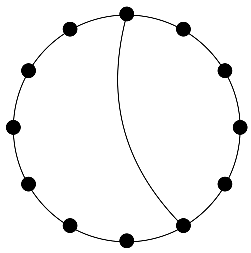
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k}.$$

*Solution de l'exercice 5* A chaque $m$-uplet $(x_1, \dots, x_m)$ d'entiers strictement positifs tels que $x_1 + \cdots + x_m = n$, on peut associer la représentation suivante.




Se donner un $m$-uplet qui convient revient à choisir les emplacements des $m-1$ séparations. Or il y a $n-1$ emplacements possibles. La réponse est donc $\binom{n-1}{m-1}$.

*Solution de l'exercice 6* Choisissons un point arbitrairement, par exemple celui se trouve en haut du cercle. Et on partitionne les configurations selon le point auquel le premier est relié. La corde concernée sépare la configuration en deux.



Notons $k$ la moitié du nombre de points se trouvant strictement à droite de cette corde. $k$ varie donc de 0 à $n-1$. Les $2k$ points à droite de la corde peuvent être reliés de $F_k$ façons et ceux à gauche de $F_{n-k-1}$ façons. Conclusion, on a

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k F_{n-k-1}.$$

*Solution de l'exercice 7* Dans la somme de gauche, chaque terme compte la façon de choisir une équipe de $k$ personnes parmi $n$, puis de désigner un capitaine et un gardien (qui peuvent être la même personne). La somme compte donc toutes les façons de constituer de telles équipes de tailles allant de 1 à $n$. Procédons maintenant à un comptage différent. Distinguons deux cas. Si le capitaine et le gardien sont la même personne, on peut commencer par désigner celle-ci ($n$ choix). On désigne ensuite le reste de l'équipe, autrement dit, on choisit un sous-ensemble des $n-1$ personnes restantes ($2^{n-1}$ choix). Cela fait donc $n2^{n-1}$ choix. Si le capitaine et le gardien sont distincts, on peut commencer par choisir le capitaine ($n$ choix), puis le gardien ($n-1$ choix), et enfin le reste de l'équipe ($2^{n-2}$ choix) ; cela fait donc $n(n-1)2^{n-2}$ choix. Finalement, on a bien

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

*Solution de l'exercice 8* Le terme de droite compte le nombre de façons de choisir $n$ personnes parmi $2n$. Imaginons qu'il y a $n$ hommes et $n$ femmes. On peut alors compter le nombre de façon de choisir $k$ hommes ($\binom{n}{k}$ choix) et $n-k$ femmes ($\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ choix), puis sommer sur toutes les possibilités de $k$, c'est-à-dire de 0 à $n$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$