DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Jean-Louis TU
STAGE : Montpellier 2014

Polynômes

1 Notations et définitions de base

Un polynôme est une expression de la forme $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ et certains nombres $a_0, \ldots, a_n$, appelés les coefficients.
Le plus grand entier m tel que $a_m \neq 0$ s'appelle le degré du polynôme. Le coefficient a_m est appelé le coefficient dominant. Un polynôme est dit unitaire si son coefficient est égal à 1.
A tout polynôme est associé une fonction polynomiale $f\colon x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Un réel x tel que $f(x) = 0$ s'appelle une racine du polynôme.

Soient P, Q deux polynômes. On dit que Q divise P s'il existe un polynôme R tel que $P = QR$.

2 L'équation du second degré

Considérons une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x, avec a, b, c fixés et $a \neq 0$. Comme

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{a^2}\right), \end{aligned}$$

on est amené à poser

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

On appelle Δ le discriminant. L'équation $ax^2+bx+c=0$ équivaut à $(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{a^2}$.

1) Si $\Delta > 0$, alors $ax^2+bx+c=0$ équivaut à $x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$, ce qui se simplifie en

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2) Si $\Delta = 0$, l'équation a une et une seule solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Le graphe d'un polynôme du second degré est une parabole, orientée vers le haut ou vers le bas selon le signe de a.
Le signe de Δ est lié au nombre de points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Exercice 1. (Moscou 2001, problème D1) Existe-t-il trois polynômes f, g, h du second degré ayant chacun deux racines, mais tels que $f+g$, $g+h$ et $h+f$ n'en ont aucune ?

Solution de l'exercice 1 Oui. $f(x) = x^2-1$, $g(x) = (x-4)^2-1$ et $h(x) = (x+4)^2-1$.

Exercice 2. Soit f un polynôme du second degré tel que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution réelle. Montrer que l'équation $f(f(x)) = x$ n'a pas de solution réelle.

Solution de l'exercice 2 La fonction $x \mapsto f(x) - x$ a un signe constant. Supposons par exemple qu'elle garde un signe strictement positif. Alors pour tout x on a $f(f(x)) > f(x) > x$, donc $f(f(x)) \neq x$.

Exercice 3. (Moscou 2003, problème C1) Existe-t-il des entiers a, b, c strictement positifs tels que les quatre équations $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ ont chacune deux racines entières non nulles ?

Solution de l'exercice 3 On va essayer de construire une solution avec $a = 1$. Nécessairement, $b^2 \pm 4c$ doit être le carré d'un entier. Il doit donc exister des entiers u et v tels que $u^2 = b^2 - 4c$ et $v^2 = b^2 + 4c$. On a alors $u^2 + v^2 = 2b^2$.
Cette équation a une infinité de solutions, par exemple $u = 1$, $v = 7$ et $b = 5$. On obtient ainsi les équations $x^2 \pm 5x \pm 6 = 0$.

Proposition 2.1 (Somme et produit des racines)**.** Considérons une équation de la forme $x^2 - Sx + P = 0$ où S et P sont deux réels. Supposons qu'il y ait deux solutions distinctes. Alors S est la somme, et P est le produit des deux solutions.

Il suffit en effet de calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ où $x_1 = \frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}$ et $x_2 = \frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}$.
L'exercice suivant n'a pas été traité en cours.
Exercice 4. Calculer $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^3 + x_2^3$ en fonction de S et de P.

Solution de l'exercice 4 Comme $x_1^2 = Sx_1 - P$ et de même pour x_2, on a $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$.
Comme $x_1^3 = x_1(Sx_1 - P) = S(Sx_1 - P) - Px_1 = (S^2 - P)x_1 - SP$, on a

$$x_1^3 + x_2^3 = (S^2 - P)S - 2SP = S^3 - 3SP.$$

Exercice 5. (Moscou 2000, exercice A1) Soient x et y deux nombres réels différents tels que $x^2 - 2000x = y^2 - 2000y$. Quelle est la valeur de $x + y$?

Solution de l'exercice 5 Soit $c = -x^2 + 2000x$, alors x et y sont les deux racines de $X^2 - 2000X + c$, donc $x + y = 2000$.

La technique de résolution des équations du second degré permet de résoudre certains types d'équations de degré supérieur.
Exercice 6. Résoudre l'équation $x^4 - 3x^2 - 1 = 0$.

Solution de l'exercice 6 En posant $y = x^2$, on obtient $y = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. Une seule de ces solutions étant positive, on trouve $x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$.

Exercice 7. Résoudre l'équation $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$.

Solution de l'exercice 7 $x = 0$ n'étant pas solution, on peut diviser l'équation par x^2, ce qui donne

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 4(x + \frac{1}{x}) + 3 = 0.$$

Soit $y = x + \frac{1}{x}$. On a $y^2 - 2 - 4y + 3 = 0$, donc $y^2 - 4y + 1 = 0$, ce qui donne $y = 2 \pm \sqrt{3}$.
Comme $x^2 - yx + 1 = 0$, on peut retrouver x à partir de y. Le discriminant de cette dernière équation est $y^2 - 4$, ce qui nécessite $|y| \geqslant 2$. La seule solution vérifiant cette condition est $y = 2 + \sqrt{3}$.
On trouve enfin $x = \dfrac{2 + \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 4\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 8. Résoudre l'équation $\cos 2x + 3\cos x = 1$.

Solution de l'exercice 8 Posons $y = \cos x$, alors l'équation devient $2y^2 + 3y - 2 = 0$, donc $y = \frac{-3\pm5}{4}$. Comme $-1 \leqslant y \leqslant 1$, on a nécessairement $y = 1/2$, donc $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3 Utilisation de la division Euclidienne

Il existe des formules pour résoudre les équations de degré 3 et 4, mais pas en degré supérieur.
On peut cependant chercher des racines rationnelles, puis factoriser l'expression.

Proposition 3.1. Soient $a_0, \dots, a_n$ des entiers, tels que a_0 et a_n sont non nuls. Si p et q sont des entiers premiers entre eux, et si $x = \frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de $a_0 + \cdots + a_n x^n$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

En effet, $a_0 q^n + \cdots + a_n p^n = 0$, donc p divise $a_1 q^{n-1} p + \cdots + a_n p^n = -a_0 q^n$. Comme p est premier avec q, il divise a_0. On raisonne de même pour l'autre assertion.
Exercice 9. Résoudre $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$.

Solution de l'exercice 9 On cherche d'abord des solutions entières. Si x est une telle solution, elle divise 2, donc x est égal à ± 1 ou à ± 2. On vérifie que $x = 2$ est effectivement solution. On effectue la division Euclidienne de $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ par $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^3 - 5x^2 + 7x - 2 & 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \\
-3x^2 + 7x - 2 & \\
x - 2 & \\
0 &
\end{array}$$

Il n'y a pas d'autre solution entière. On cherche ensuite s'il y a des solutions rationnelles p/q. Comme p divise 1 et q divise 2, on essaye $\pm\frac{1}{2}$ et on vérifie en effet que $\frac{1}{2}$ est solution. On divise le polynôme par $2x - 1$, ce qui donne $x^2 + x - 1$ dont les deux racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Finalement, les racines du polynôme initial sont 2, $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

De manière formelle, si A et B sont deux polynômes avec $B \neq 0$, alors il existe un et un seul couple (Q, R) de polynômes tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.
Q et R s'appellent le quotient et le reste de la division Euclidienne de A par B. Grâce à la division Euclidienne, on peut définir un algorithme d'Euclide, la notion de PGCD de deux polynômes, établir un théorème de Bézout, etc. Nous n'entrerons pas dans les détails.

La division Euclidienne de polynômes permet aussi de voir que

Théorème 3.2. Soit P un polynôme de degré n. Alors P admet au plus n racines.

On raisonne par récurrence sur le degré. L'assertion est vraie en degré 0. Supposons qu'elle soit vraie en degré $n-1$. Soit a une racine de P. On effectue la division Euclidienne de P par $x-a$:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + b$$

où b est un réel. Comme $P(a) = 0$, on a $b = 0$ donc $P(x) = (x-a)Q(x)$. Par hypothèse de récurrence, Q admet au plus $n-1$ racines, donc P admet au plus n racines.

Exercice 10. (OIM 1974, exercice 6) Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $n \geqslant 1$. Montrer qu'il y a au plus $n+2$ entiers k vérifiant $P(k)^2 = 1$.

Solution de l'exercice 10 Soit r (resp. s) le nombre de solutions de l'équation $P(k) = -1$ (resp. $P(k) = 1$). On doit montrer que $r + s \leqslant n + 2$.
Comme s est le nombre de racines du polynôme $P(X) - 1$ qui est de degré n, on a $s \leqslant n$, donc si $r \leqslant 2$ alors on a bien $r + s \leqslant n + 2$. On peut donc supposer que $r \geqslant 3$, et de même que $s \geqslant 3$.

Il existe trois entiers $x_1 < x_2 < x_3$ tels que $P(x_i) = -1$ pour tout i. Comme $P(X) + 1$ admet x_i pour racine, il est divisible par $X - x_i$. Ecrivons $P(X) = -1 + (X - x_i)Q_i(X)$. Comme P est à coefficients entiers, le polynôme $Q_i(X)$, qui est le quotient de $P(X) + 1$ par $X - x_i$, est également à coefficients entiers.
Pour tout entier k tel que $P(k) = 1$, on a $(k - x_i)Q_i(k) = 2$, donc $|k - x_i| \leqslant 2$. Ceci implique que $x_3 - 2 \leqslant k \leqslant x_1 + 2 \leqslant x_3$. Comme de plus $k \neq x_3$, on a $k \in \{x_3 - 2, x_3 - 1\}$, donc il y a au plus deux entiers k vérifiant $P(k) = 1$. Ceci contredit l'inégalité $s \geqslant 3$.

4 Croissance des polynômes

Si P et Q sont unitaires et de degrés respectifs $n > m$, alors $P(x)/Q(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$: cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$ (éventuellement très petit), il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$ on ait

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| < \epsilon.$$

Plutôt que d'en donner une démonstration formelle, traitons des exemples :

Exercice 11. Trouver une constante $A > 0$ telle que pour tout réel $x \geqslant A$, on ait

$$x^3 + x + 1 \leqslant \frac{x^4}{1000000}.$$

Solution de l'exercice 11 Si $x \geqslant 1$, alors $x^3 + x + 1 \leqslant \dfrac{3}{x}x^4$ donc on peut prendre $A = 3000000$.

L'exercice suivant n'a pas été traité en cours.

Exercice 12. Donner un intervalle, le plus petit possible, contenant les racines de

$$x^{2014} - 100x + 1.$$

Solution de l'exercice 12 Si $x \leqslant 0$ alors l'expression est $\geqslant 1$, donc x n'est pas racine.
Si $x \geqslant 100^{1/2013}$, alors $x^{2014} \geqslant 100x > 100x - 1$.
Si $0 < x \leqslant 1/100$ alors $x^{2014} - 100x + 1 > 1 - 100x \geqslant 0$.
Donc les racines sont comprises dans $[\frac{1}{100}, 100^{1/2013}]$.

Exercice 13. Soit P un polynôme P tel qu'il existe une suite $(a_i)_{i \geqslant 0}$ d'entiers distincts vérifiant $P(a_{i+1}) = a_i$ pour tout i. Montrer que P est de degré 1.

Solution de l'exercice 13 P n'est évidemment pas constant. Si P était de degré $\geqslant 2$, alors il existerait $A > 0$ tel que si $|x| \geqslant A$, on a $|P(x)| > |x|$.
Comme la suite (a_i) est formée d'entiers distincts, il existe i tel que $|a_i| > A$ et $|a_i| > |a_0|$. On a alors, $|P(a_i)| < |P(a_{i-1})| < \cdots < |P(a_0)| < |P(a_i)|$. Impossible.
Donc P est de degré 1.

Remarque : on peut déterminer tous les polynômes qui satisfont la condition.
Ecrivons $P(x) = ax + b$. Comme $P(a_1)$ est un entier, $aa_1 + b$ est un entier. De même $aa_2 + b$ est entier. Par différence, $a(a_1 - a_2)$ est entier, donc a est rationnel et b aussi.
Si $a = 1$ et b est entier non nul, alors $P(x) = x + b$ convient.
Sinon, P admet un point fixe que l'on notera c. On a $P(x) - c = \frac{x-c}{q}$ pour un certain rationnel $q \neq 1$. Ainsi, $a_i - c = q^i(a_0 - c)$.
Si p est un facteur premier du dénominateur de q, alors la p-valuation de q^i tend vers $-\infty$, ce qui est impossible. Donc q est un entier.
D'autre part, $a_1 - qa_0 = (q-1)c$ est un entier. Notons-le m. On alors $P(x) = \frac{x+m}{q}$.
Réciproquement, si m est un entier et $P(x) = \frac{x+m}{q}$, alors la relation de récurrence $a_{i+1} = qa_i - m$ implique que a_i est bien un entier pour tout i.
Conclusion : les solutions sont $P(x) = \frac{x+m}{q}$ avec ($q = 1$ et $m \in \mathbb{Z}^*$) ou ($q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 1$ et $m \in \mathbb{Z}$).

5 Utilisation de changements de variables

Exercice 14. Soient a et b deux réels, et $g(x) = ax + b$. Déterminer les polynômes f tels que $f(g(x)) = g(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 14
Premier cas : $a = 1$ et $b = 0$. Alors tout polynôme f convient.

Deuxième cas : $a = 1$ et $b \neq 0$. Comme $f(x + b) = f(x) + b$, on montre facilement par récurrence que $f(nb) = f(0) + nb$ pour tout entier naturel n, donc le polynôme $x \mapsto f(bx) - f(0) - bx$ admet une infinité de racines. Par conséquent, il est nul, d'où $f(t) = t + f(0)$ pour tout t. On en conclut que $f(x)$ est de la forme $f(x) = x + c$ où c est une constante.

Troisième cas : $a \neq 1$. Alors g admet un unique point fixe c (à savoir $c = b/(1 - a)$). On vérifie que $g(x) - c = a(x - c)$.
Posons $y = x - c$ et $h(y) = f(y + c) - c$. Alors la condition $f(g(x)) = g(f(x))$ devient $h(ay) = ah(y)$.
Si $a \neq -1$, alors on a $h(a^k) = a^k h(1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$, donc $y \mapsto h(y) - h(1)y$ a une infinité de racines. Ceci entraîne $h(y) = \lambda y$ pour une certaine constante λ, et finalement $f(x) = c + \lambda(x - c)$.
Si $a = -1$, la condition s'écrit $h(-y) = -h(y)$, c'est-à-dire que h est un polynôme impair (ce qui signifie que les coefficients des termes de degré pair sont nuls).

Exercice 15. (Moscou 2000, problème C2) Soit $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Résoudre l'équation $f(f(f(f(f(x))))) = 0$.

Solution de l'exercice 15 On a $f(x) = (x + 6)^2 - 6$, donc $f(x) + 6 = (x + 6)^2$. Posons $y = x + 6$ et $g(y) = y^2$, alors l'équation devient $g(g(g(g(g(y))))) = 6$. Ceci se résout en $y = \pm 6^{1/32}$, donc $x = -6 \pm 6^{1/32}$.

L'exercice suivant n'a pas été traité en cours.
Exercice 16. (Moscou 2001, problème C3) Trouver un polynôme de degré 2001 tel que $P(x) + P(1 - x) = 1$ pour tout x.

Solution de l'exercice 16 Posons $x = \frac{1}{2} + y$. On cherche P tel que $P(\frac{1}{2} + y) + P(\frac{1}{2} - y) = 1$. Soit $Q(y) = P(\frac{1}{2} + y) - \frac{1}{2}$, alors $Q(y) + Q(-y) = 0$. On peut prendre par exemple $Q(y) = y^{2001}$, donc $P(x) = \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})^{2001}$.

6 Fonctions symétriques des racines

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. On pose

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

On les appelle les fonctions symétriques élémentaires des $x_1, \ldots, x_n$.
Par exemple,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \sigma_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Théorème 6.1. $(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$.

Il suffit en effet de développer le membre de gauche.
Exercice 17. Exprimer en fonction de $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$:
a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ c) $\displaystyle\sum_{i \neq j} x_i x_j^2$.

Solution de l'exercice 17 a) σ_{n-1}/σ_n
b) $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$
c) On a $\sigma_1 \sigma_2 = \sum_i \sum_{j<k} x_i x_j x_k$.
Si $a < b < c$, le terme $x_a x_b x_c$ apparaît 3 fois car (j, k) peut valoir (a, b), (b, c) ou (a, c).
Si $a \neq b$, le terme $x_a x_b^2$ apparaît une fois car $\{j, k\} = \{a, b\}$ et $i = b$.
On en déduit que $\sum_{i \neq j} x_i x_j^2 = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3$.

Exercice 18. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xyz = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 18 On note σ_k les fonctions symétriques élémentaires en x, y, z. On a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -1$ et $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4$, donc $\sigma_2 = -2$. On en déduit que x, y, z sont les racines de $X^3 - 2X + 1$. Ce polynôme admet comme racine évidente 1. En effectuant la division Euclidienne par $X - 1$, on obtient $X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$, donc x, y, z forment, à l'ordre près, la liste $1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.