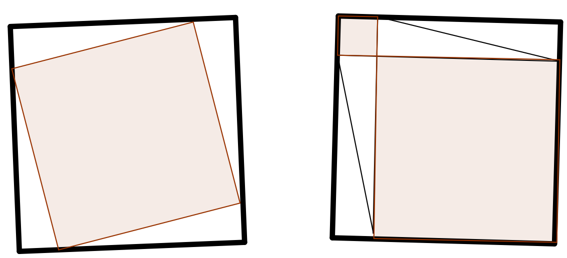
DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2012

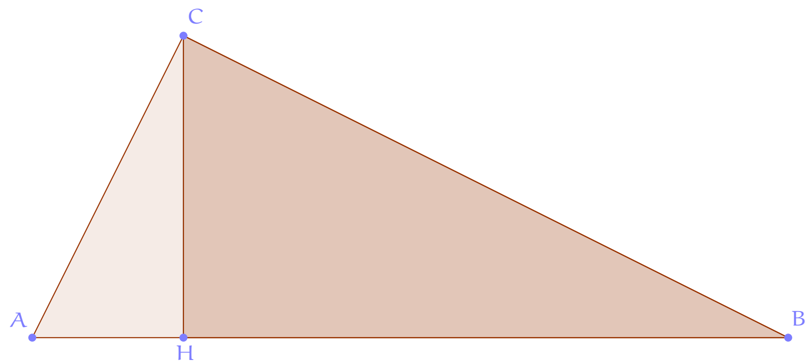
Géométrie

- Angle droit -

L'une des premières propriétés de l'angle droit est le théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. On en connaît de nombreuses démonstrations, par exemple la figure ci-dessous : en disposant différemment les quatre triangles rectangles dans le même carré, on libère soit un carré de côté l'hypoténuse, soit deux carrés de côtés les côtés de l'angle droit.



On peut aussi tracer la hauteur CH du triangle ABC rectangle en C. Posons $a = BC, b = CA, c = AB$. Le triangle rectangle ACH a les mêmes angles que le (est semblable au) triangle rectangle ABC, mais son hypoténuse vaut b et non c, chacune des longueurs sera donc la longueur homologue multipliée par $\frac{b}{c}$, par exemple $CH = \frac{ab}{c}$, $AH = \frac{b^2}{c}$. De même pour le triangle BCH, $\frac{a}{c}$ fois plus grand que BAC, donc $HB = \frac{a^2}{c}$. Dès lors, on peut soit écrire $AH + HB = AB$, donc : $\frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = c$, soit dire que la somme des aires des triangles ACH et BCH, respectivement $\frac{b^2}{c^2}$ et $\frac{a^2}{c^2}$ fois plus grandes que l'aire de ABC, est égale à l'aire de ABC : d'une manière ou d'une autre, on trouve $a^2 + b^2 = c^2$.



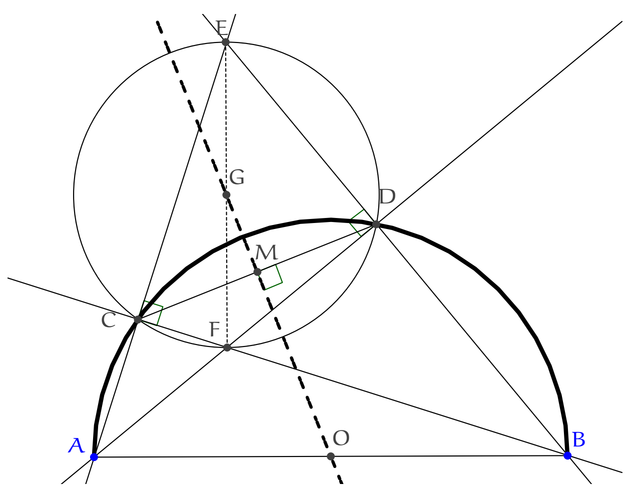
Le triangle rectangle ABC, rectangle en C, permet de définir le sinus et le cosinus : appelons α l'angle en A du triangle. $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$ et $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$. Comme les angles en A et en B sont complémentaires, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. Par ailleurs, d'après le théorème de Pythagore, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Enfin, l'angle droit est l'angle sous lequel un point d'un cercle voit un diamètre de ce cercle. Ce résultat important s'utilise dans les deux sens : si AB est un diamètre d'un cercle contenant C, l'angle $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Si $\widehat{ACB}$ est un angle droit, nécessairement C appartient au demi-cercle de diamètre AB.

Exercice 1

Soient C et D deux points sur un demi-cercle de diamètre AB. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.

Solution de l'exercice 1

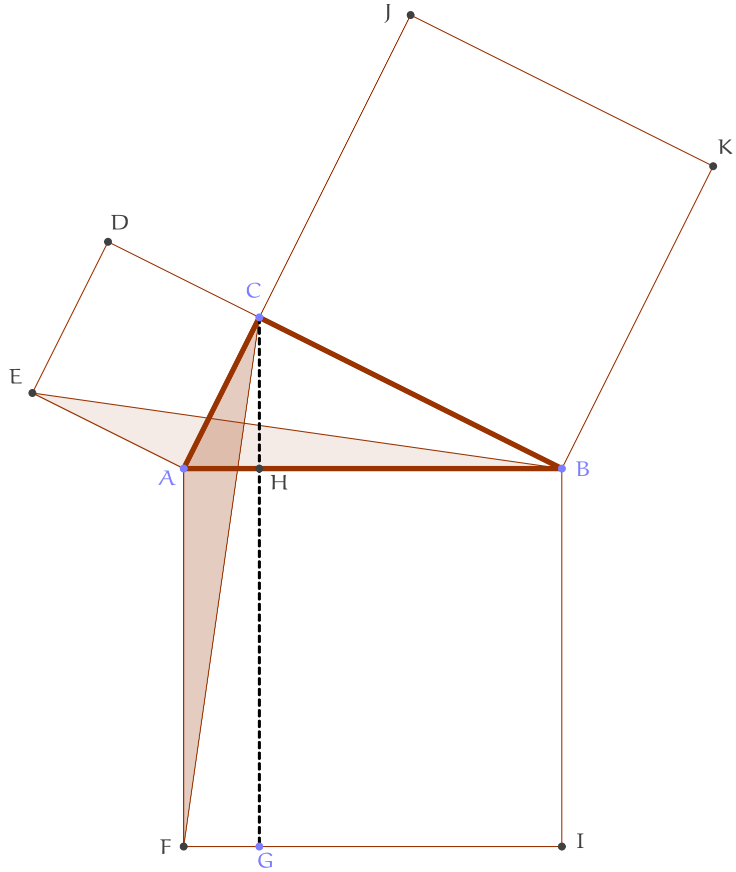


Le milieu du diamètre AB est le centre O du cercle contenant C et D, donc $OC = OD$: O est sur la médiatrice de $[CD]$. Si l'on appelle M le milieu de $[CD]$, (OM) est donc précisément la médiatrice de $[CD]$, et il reste à prouver que le milieu G de $[EF]$ est lui aussi sur cette médiatrice de $[CD]$, donc que $GC = GD$.

Or C et D étant sur le cercle de diamètre $[AB]$, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^{\circ}$. Il en résulte que $\widehat{FCE}$ et $\widehat{FDE}$ sont eux aussi droits, donc que C et D appartiennent aussi au cercle de diamètre $[EF]$ et de centre G, d'où $GC = GD$, ce qui achève la démonstration.

- Aire du triangle -

L'aire d'un triangle peut se calculer de plusieurs manières. La principale, c'est : aire = $\frac{1}{2}$Base$\times$Hauteur, compte tenu qu'un triangle a trois bases et trois hauteurs. C'est d'ailleurs là-dessus que repose la démonstration du théorème de Pythagore figurant dans les Eléments d'Euclide. Les deux triangles grisés sont isométriques : il suffit de pivoter de 90 °autour de A le triangle AEB pour obtenir le triangle ACF. Ils ont donc même aire. Mais pour AEB, on choisit comme base AE, la hauteur correspondante est égale à CA vu que CB est parallèle à la base EA, donc l'aire vaut la moitié de l'aire du carré $ACDE$. Pour ACF, on choisit AF comme base, la hauteur correspondante est égale à HA si CH est perpendiculaire à AB, donc parallèle à la base AF, et l'aire est égale à la moitié du rectangle $AFGH$. De même (mais Euclide refait une deuxième fois la démonstration) la moitié de l'aire du carré $BCJK$ est égale à la moitié de l'aire du rectangle $BIGH$. Donc la somme des aires des deux carrés est égale à la somme des aires des deux rectangles, c'est-à-dire à l'aire du carré de l'hypoténuse.



Si l'on note a, b, c les trois longueurs BC, CA, AB, et $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les trois angles $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$, l'aire S peut aussi s'écrire : $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B}$. Il suffit pour le prouver de remarquer, par exemple, que la hauteur opposée à $BC = a$ a pour longueur : $AC.\sin\widehat{C} = b\sin\widehat{C} = AB.\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Une autre formule permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des seules longueurs a, b, c des côtés BC, CA, AB. C'est la formule de Héron :

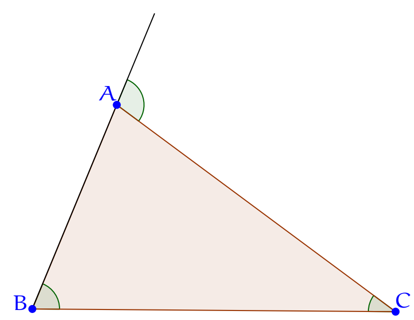
$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

On remarquera tout d'abord que l'aire du triangle est nulle si et seulement si les trois sommets sont alignés, donc l'un des côtés est somme des deux autres, donc si et seulement si $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ est nul. Mais la démonstration nécessite de regrouper les termes deux par deux : $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = (a^2+b^2-c^2) + 2ab$, $(a-b+c)(-a+b+c) = c^2 - (a-b)^2 = (c^2 - a^2 - b^2) + 2ab$. Il reste à utiliser la formule d'Al Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$: $(a+b+c)(a+b-c) = 2ab(1+\cos\widehat{C})$ et $(a-b+c)(-a+b+c) = 2ab(1-\cos\widehat{C})$ ont pour produit : $4a^2b^2\left(1-\cos^2\widehat{C}\right) =$

$4a^2b^2\sin^2\widehat{C}$ dont la racine carrée : $2ab\sin\widehat{C}$ est bien le quadruple de l'aire. Une autre manière de noter cette même formule de Héron est d'appeler p le demi-périmètre : $p = \frac{a+b+c}{2}$. On a alors : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

- Angles -

On rappelle que la somme des angles d'un triangle vaut 180 °. Une manière souvent utile d'écrire cela : si l'on prolonge un côté, AB par exemple, au delà de A, l'angle extérieur, supplémentaire de $\widehat{A}$, est la somme des deux angles à la base : $\widehat{B} + \widehat{C}$.

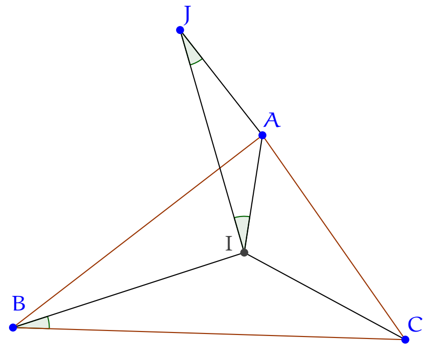


Rappelons également qu'un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés égaux et deux angles égaux : s'il a deux côtés égaux, il a deux angles égaux, et réciproquement. Enfin, la bissectrice coupe un angle en deux angles égaux. Les points de la bissectrice sont à égale distance des côtés de l'angle. On en déduit que les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un point I : si l'on appelle I l'intersection des deux bissectrices de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, I est à la même distance de AB et BC, de BC et AC, donc de AC et AB, ce qui implique qu'il est sur la bissectrice de $\widehat{A}$. Si l'on appelle r la distance de I aux trois côtés, le cercle de centre I et de rayon r est tangent aux trois côtés : on l'appelle cercle inscrit dans le triangle, et I est souvent désigné comme centre du cercle inscrit dans le triangle.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit. On suppose que : $CA + AI = BC$. Déterminer le rapport des angles : $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$

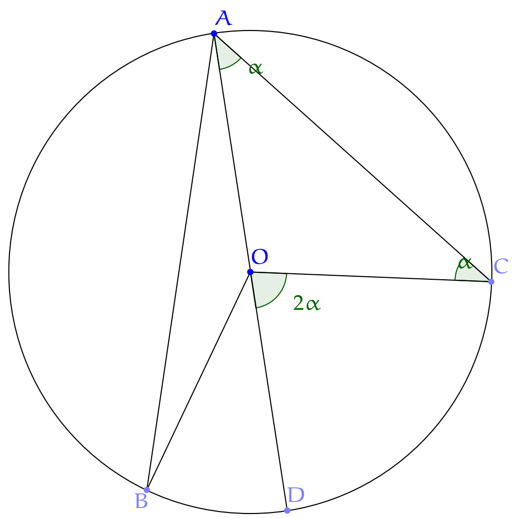
Solution de l'exercice 2

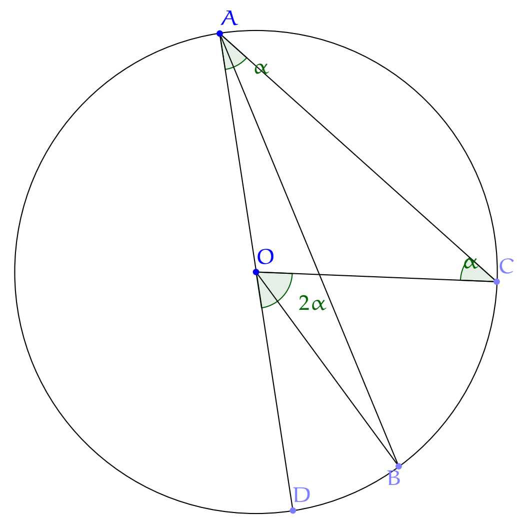


Pour tirer profit de la relation de l'hypothèse avec une somme de longueurs, il faudrait que les trois points soient alignés. On va donc considérer un point J sur (CA) tel que $AI = AJ$, A étant entre C et J, de sorte que $CJ = CB$. Appelons alors α l'angle $\widehat{AJI}$. Comme le triangle AJI est isocèle, $\widehat{AIJ} = \alpha$, donc $\widehat{IAC} = 2\alpha$, ce qui entraîne $\widehat{BAC} = 4\alpha$, puisque (AI) est bissectrice de $\widehat{BAC}$. Par ailleurs, $CJ = CA + AJ = CA + AI = BC$, donc les triangles JCI et BCI sont isométriques : deux côtés égaux et les angles entre ces deux côtés égaux, puisque (CI) est bissectrice de $\widehat{BCA}$. Donc $\widehat{IBC} = \widehat{IJC} = \alpha$, et comme (BI) est bissectrice de $\widehat{CBA}$, $\widehat{CBA} = 2\alpha$, ce qui entraîne : $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$.

- Angle inscrit -

La notion d'angle inscrit est un cas particulièrement important d'utilisation des angles. Soit A, B, C trois points d'un cercle de centre O. L'angle inscrit $\widehat{BAC}$, qui intercepte l'arc BC, vaut la moitié de l'angle au centre associé $\widehat{BOC}$. En effet, prolongeons (AO), qui recoupe le cercle en D. Dans le triangle AOC, l'angle extérieur $\widehat{DOC}$ vaut la somme des angles à la base, $\widehat{OAC} + \widehat{ACO}$, mais ces angles sont égaux car le triangle AOC est isocèle. Donc $\widehat{DOC} = 2 \times \widehat{OAC}$, et de même $\widehat{BOD} = 2 \times \widehat{BAD}$. Selon le cas de figure, l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est la somme ou la différence des angles au centre $\widehat{DOC}$ et $\widehat{BOD}$, mais dans les deux cas il vaut le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.



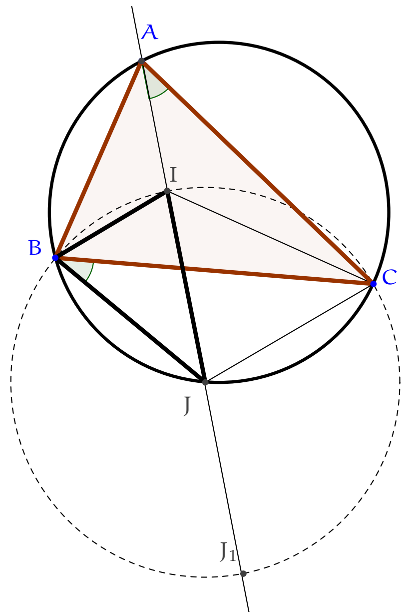


Il en résulte essentiellement que si l'on fixe les points B et C, quel que soit le point A, l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ aura toujours même mesure. Sous réserve que lorsque A traverse la corde BC, l'angle inscrit est transformé en son supplémentaire, l'angle au centre devenant l'angle rentrant égal au double du supplémentaire. Cette égalité des angles inscrits s'utilise dans les deux sens : d'une part, si A, B, C, D sont sur un même cercle, A et D du même côté de (BC), les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux, d'autre part, réciproquement, si A, B, C, D sont quatre points (A et D du même côté de (BC)) vérifiant : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, alors les quatre points A, B, C, D sont cocycliques, c'est-à-dire sur un même cercle. Il est fréquent qu'on utilise le théorème dans les deux sens, d'une part pour prouver que quatre points sont cocycliques, d'autre part pour en conclure que des angles autres que ceux connus initialement sont égaux.

Exercice 3

Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit. La droite (AI) recoupe en J le cercle circonscrit au triangle (ABC). Montrer que $JB = JC = JI$.

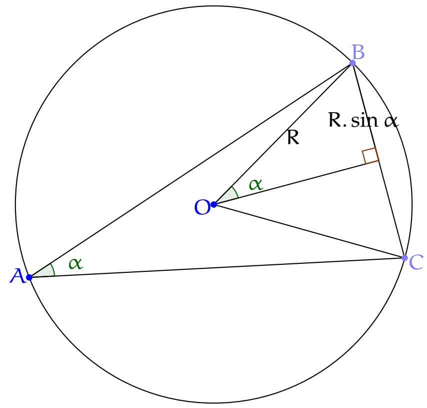
<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Les angles inscrits $\widehat{JAC}$ et $\widehat{JBC}$ sont égaux, tout comme les angles inscrits $\widehat{BAJ}$ et $\widehat{BCJ}$. Mais comme $(AI) = (AJ)$ est bissectrice de $\widehat{BAC}$, $\widehat{JAC} = \widehat{BAJ}$ donc $\widehat{JBC} = \widehat{BCJ}$, d'où l'on déduit que le triangle BCJ est isocèle : $JB = JC$. Par ailleurs, dans le triangle IBA, l'angle extérieur $\widehat{BIJ}$ est la somme des angles à la base $\widehat{IAB} + \widehat{IBA}$. Mais, nous l'avons vu, $\widehat{IAB} = \widehat{JAC} = \widehat{JBC}$, et, comme (BI) est bissectrice de $\widehat{CBA}$, $\widehat{IBA} = \widehat{CBI}$. Donc en définitive, $\widehat{BIJ} = \widehat{JBI}$, ce qui prouve que le triangle JBI est lui aussi isocèle, donc que $JB = JI$.

- **Loi des sinus** -

Une dernière propriété importante : la loi des sinus. Dans un triangle, la longueur des côtés est proportionnelle aux sinus des angles opposés. Cela peut se démontrer de deux manières au moins : d'une part, la bissectrice de l'angle au centre est médiatrice du côté opposé, or si l'on note $\widehat{A}$ la mesure de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$, la moitié de l'angle au centre vaut également $\widehat{A}$ donc la moitié de la corde BC vaut $R.\sin\widehat{A}$ si l'on appelle R le rayon du cercle. Le côté opposé à l'angle $\widehat{A}$ ayant pour longueur : $2R.\sin\widehat{A}$, si l'on note $a = BC, b = CA, c = AB$, $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$.



Une autre démonstration possible est de considérer par exemple la hauteur issue de A. Sa longueur peut se calculer de deux manières : c'est soit $AB.\sin\widehat{B}$ soit $AC.\sin\widehat{C}$, d'où $\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}}$. Le même raisonnement avec les deux autres hauteurs donne la loi des sinus.