DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Thomas BUDZINSKI
STAGE : Montpellier 2013

Transformations du plan

- Mémo -

Vecteurs

Définition 1. Un vecteur est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

Proposition 2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. $\overrightarrow{CD}$ peut s'écrire sous la forme $k\overrightarrow{AB}$ si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles. On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Proposition 3. (Relation de Chasles)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Remarque 4. Cette relation s'utilise quand on cherche à avoir des informations sur un vecteur sans connaître les liens entre ses deux extrémités, mais que ces deux points "connaissent" un même point. Les exercices **??** et **??** en fournissent de bons exemples...

Proposition 5. M est le milieu de AB si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou, ce qui est équivalent, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ pour un point C quelconque.

Homothéties

Définition 6. Soient O un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$.

Proposition 7. Les homothéties conservent les angles, les rapports de longueurs, les droites, les cercles etc... De plus, l'image d'une droite (Δ) par une homothétie est parallèle à Δ.

Proposition 8. La composée de deux homothéties h_1 et h_2 de rapports k_1 et k_2 est une translation si $k_1k_2 = 1$, et une homothétie de rapport k_1k_2 sinon. Dans ce cas, le centre de $h_1 \circ h_2$ est aligné avec ceux de h_1 et de h_2.

Proposition 9.
- Soient $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments supportés par des droites parallèles. Il existe une unique homothétie envoyant A sur A' et B sur B'.
- Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons différents. Il existe exactement deux homothéties, une de rapport positif et une de rapport négatif, envoyant Γ_1 sur Γ_2.
  S'ils ont le même rayon, il existe exactement une homothétie et une translation envoyant l'un sur l'autre.
  De plus, si les cercles admettent des tangentes communes extérieures (resp. intérieures), alors leur intersection est le centre de l'homothétie positive (resp. négative) envoyant l'un sur l'autre.

Rotations

Définition 10. Soient O un point du plan et θ un angle. La rotation de centre O et d'angle θ est la transformation qui à un point M associe le point M' tel que $OM' = OM$ et $\angle MOM' = \theta$, les angles étant orientés.

Proposition 11. Les rotations conservent les longueurs, les angles, les droites, les cercles etc... De plus, si (Δ') est l'image d'une droite Δ par un rotation d'angle θ, alors l'angle entre les droites (Δ) et (Δ') vaut θ.

Proposition 12.
- La composée de deux rotations d'angles θ et θ' est une translation si $\theta + \theta'$ est un multiple de 2π, et une rotation sinon.
- Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites se coupant en un point O et faisant entre elles un angle θ. On note s_1 et s_2 les symétries par rapport à (Δ_1) et (Δ_2). Alors $s_1 \circ s_2$ est la rotation de centre O et d'angle 2θ.

Proposition 13. Si $[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments non parallèles de même longueur, il existe une unique rotation envoyant A sur A' et B sur B'.

- Exercices -

Exercice 1 Redémontrer le théorème de la droite des milieux avec des vecteurs.

Solution de l'exercice 1 Soient ABC un triangle et M, N les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. On a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

d'où le résultat.

Exercice 2 (Centre de gravité)
Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G vérifiant :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Solution de l'exercice 2 Pour commencer, un point G vérifiant la condition vectorielle existe bien. Elle équivaut en effet, d'après la relation de Chasles, à :

$$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

soit $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, et un unique point G vérifie cette propriété. Soit de plus M le milieu de BC. On a :

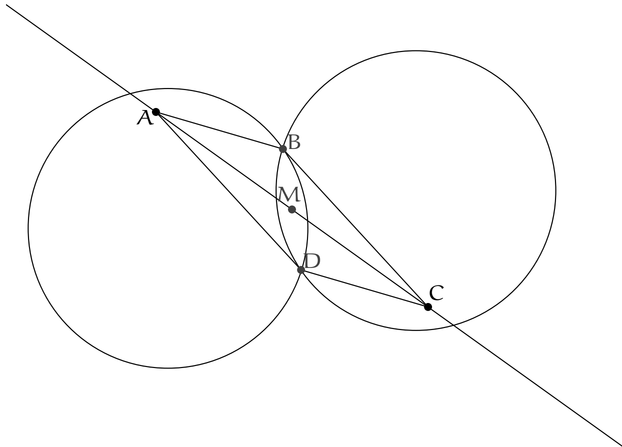
$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

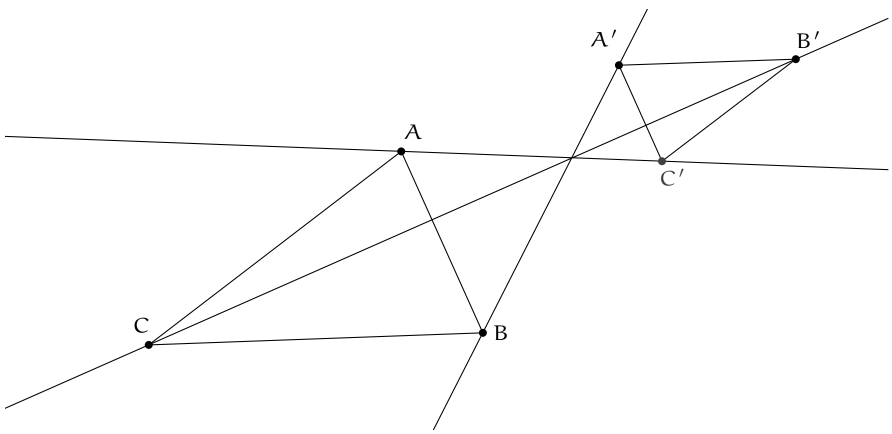
donc G, M et A sont alignés et G est sur la médiane issue de A, et de même pour les autres médianes.

Exercice 3 Etant donnés deux points A et C et un cercle Γ, construire deux points B et D sur Γ tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution de l'exercice 3 Soit M le milieu de $[AC]$: $ABCD$ est un parallélogramme ssi M est le milieu de $[BD]$ ssi B est le symétrique de D par rapport à M. B doit donc être sur le symétrique Γ' de Γ par rapport à M, ce qui permet de le tracer. D est alors l'autre intersection des deux cercles.

Exercice 4 Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que (AB) soit parallèle à $(A'B')$, (BC) à $(B'C')$ et (CA) à $(C'A')$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.





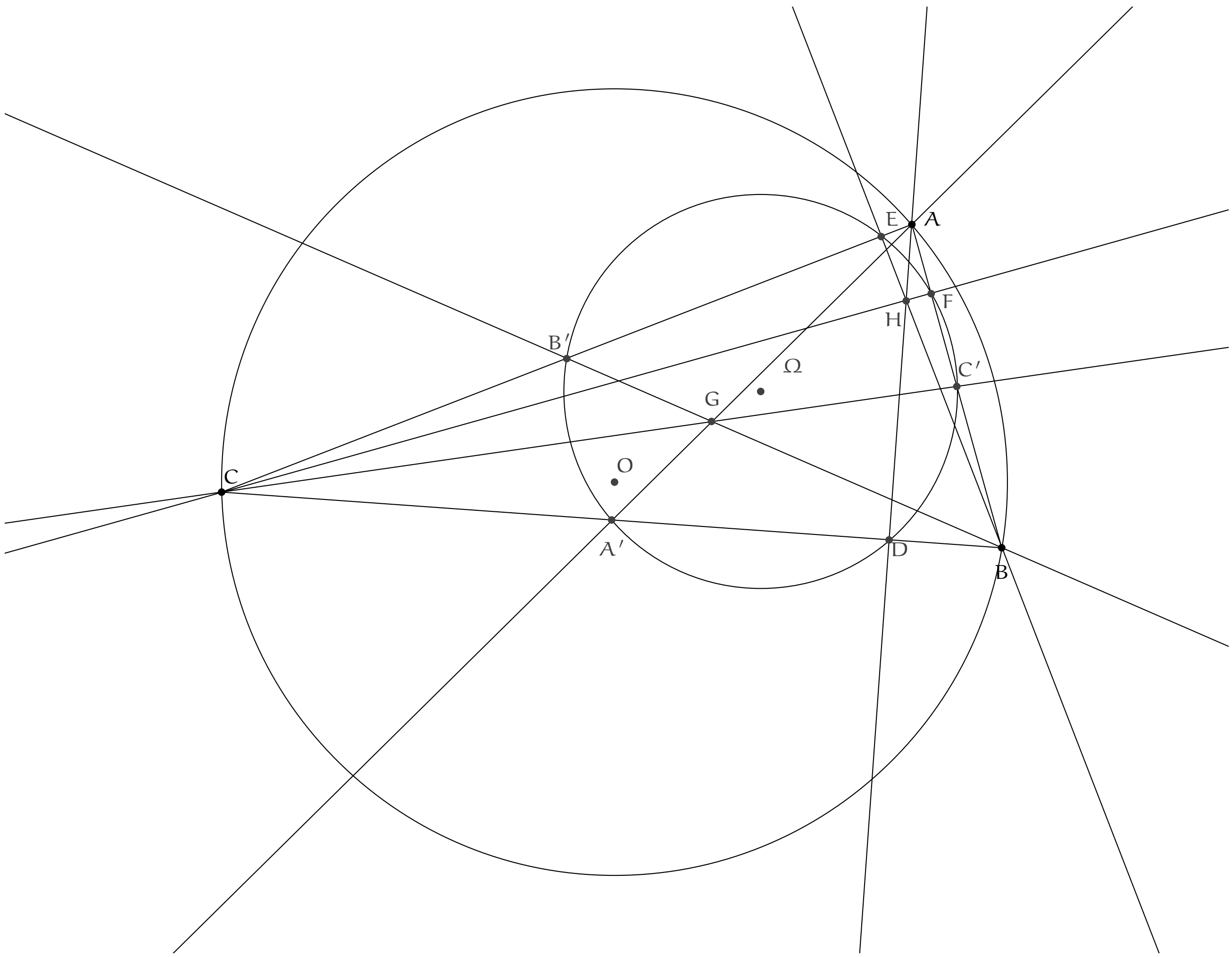
Solution de l'exercice 4 On note X le point d'intersection de (AA') et (BB') s'il existe. D'après le théorème de Thalès, on peut poser $k = \frac{XA'}{XA} = \frac{XB'}{XB}$. L'homothétie h de centre X et de rapport k envoie alors A sur A' et B sur B'. $h((AC))$ passe par A' et est parallèle à (AC) donc à $(A'C')$, d'où $h((AC)) = (A'C')$ et, de même $h((BC)) = (B'C')$. On a donc $h(C) = C'$, donc X, C et C' sont alignés, d'où le résultat. Si (AA') et (BB') sont parallèles, $ABB'A'$ est un parallélogramme donc il existe une translation t qui envoie A sur A' et B sur B' et, comme ci-dessus, on montre qu'elle envoie C sur C', donc (CC') est parallèle à (AA') et (BB').

Remarque 14. On a trouvé une condition nécessaire et suffisante sur deux triangles pour qu'il existe une homothétie envoyant l'un sur l'autre.

Exercice 5 (Droite et cercle d'Euler)
Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité (i.e le point d'intersection de ses médianes) et H son orthocentre (i.e le point d'intersection de ses hauteurs). On note A', B' et C' les milieux de $[BC]$,

$[CA]$ et $[AB]$ et D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B et C..

– Montrer que $A'B'C'$ est l'image de ABC par une homothétie bien choisie de centre G.
– En déduire que O, G et H son alignés.
– En utilisant la même homothétie, montrer que les points A', B', C', D, E et F sont cocycliques.



Solution de l'exercice 5

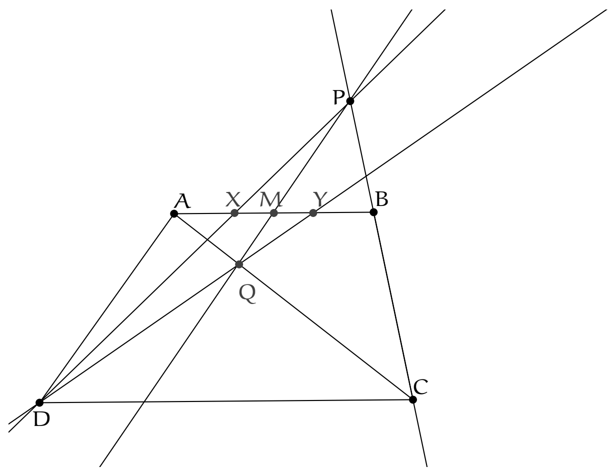
– C'est une conséquence directe de **??**. En effet, on a montré $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.
– Soit h l'homothétie de la première question : $h(ABC) = A'B'C'$, donc h envoie H sur l'orthocentre de $A'B'C'$. Or, O est l'orthocentre de $A'B'C'$. En effet, (OA') est perpendiculaire à (BC), donc à $(B'C')$ par le théorème de la droite des milieux, donc c'est la hauteur issue de A' dans $A'B'C'$. O, G et H sont donc alignés et, plus précisément, $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.
– Soit Ω le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$: on sait que $\Omega = h(O)$

donc :

$$\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{G\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$$

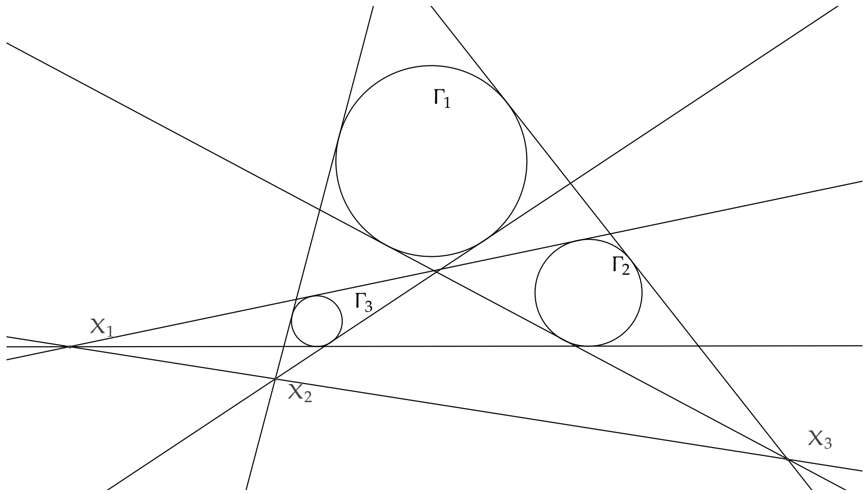
Ω est donc le milieu de [OH]. Il est donc équidistant des droites AD et OA', donc $\Omega A' = \Omega D$, donc D est sur le cercle circonscrit à $A'B'C'$, et de même pour E et F.

Exercice 6 Soient $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD), M le milieu de [AB] et P un point de (BC). On pose $X = (PD) \cap (AB)$, $Q = (PM) \cap (BD)$ et $Y = (PQ) \cap (AB)$. Montrer que M est le milieu de [XY].



Solution de l'exercice 6 Les droites parallèles donnent envie de chercher des homothéties qui les envoient l'une sur l'autre. Deux sont intéressantes : celle de centre Q qui envoie A sur C et B sur D, qu'on note h_Q et celle de centre P qui envoie C sur B et D sur Y, qu'on note h_P.
$h_P \circ h_Q$ est alors une homothétie qui envoie A sur B et Y sur X. Son centre est sur (AB) et sur (PQ) (car c'est le centre d'une composée d'homothéties de centres P et Q), donc c'est M et, comme M est le milieu de [AB], $h_P \circ h_Q$ est la symétrie centrale de centre M, d'où le résultat.

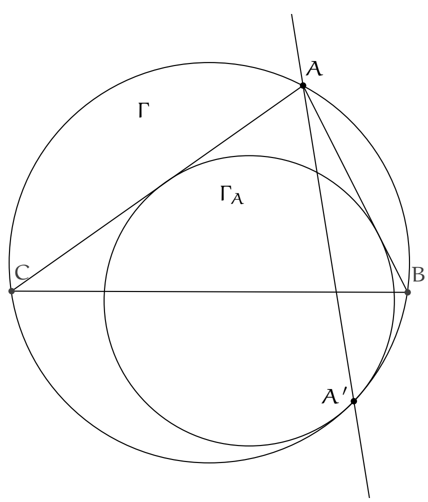
Exercice 7 (Théorème de Monge-d'Alembert)
Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles tels que les disques correspondants soient disjoints. Soient X_1 le point d'intersection des tangentes communes extérieures à Γ_2 et Γ_3. On définit de même X_2 et X_3.
Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont alignés.



Solution de l'exercice 7 X_3 est le centre de l'homothétie positive h_1 qui envoie Γ_1 sur Γ_2, et X_1 celui de l'homothétie positive h_2 qui envoie Γ_2 sur Γ_3. $h_2 \circ h_1$ est une homothétie positive qui envoie Γ_1 sur Γ_3, donc son centre est X_2 et $X_2 \in (X_1X_3)$.

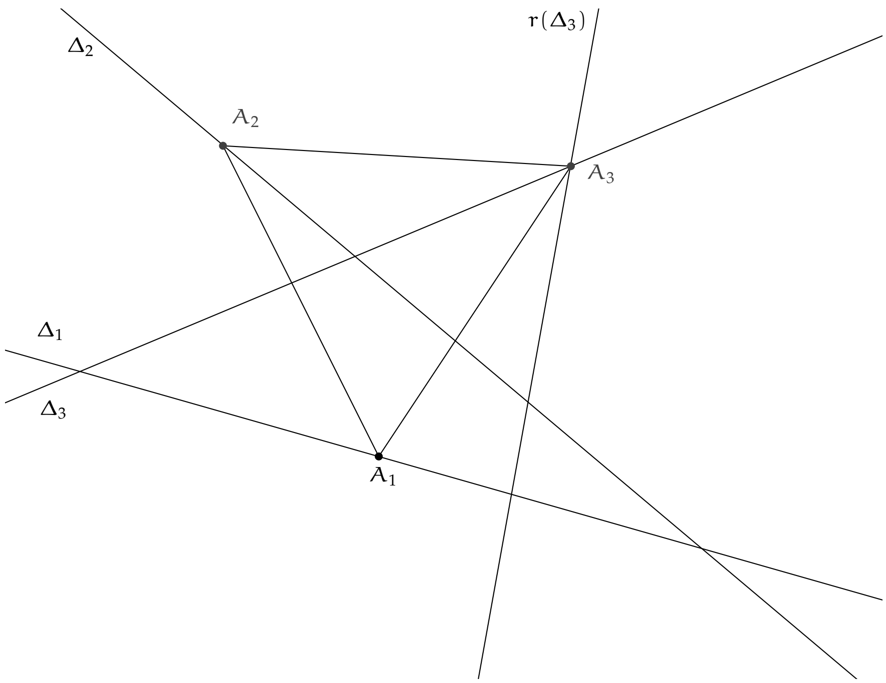
Exercice 8 Soient ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit Γ_A un cercle tangent à (AB) et (AC), et tangent intérieurement à Γ en un point A'. On définit de manière similaire Γ_B, B', Γ_C et C'.

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



Solution de l'exercice 8 Soient ω le cercle inscrit à (ABC) et X le centre de l'homothétie positive qui envoie Γ sur ω : A' est le centre de l'homothétie positive qui envoie Γ sur Γ_A et A celui de l'homothétie positive qui envoie Γ_A sur ω, donc $X \in (AA')$ et, de même, $X \in (BB')$ et $X \in (CC')$ d'où le résultat.

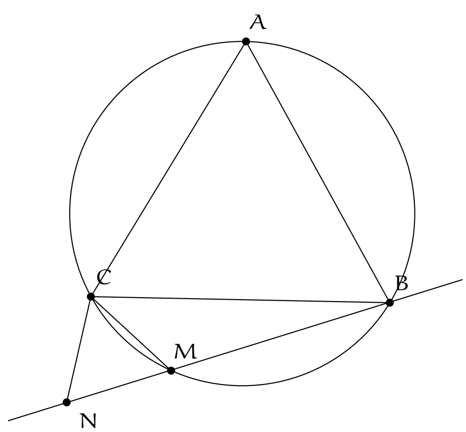
Exercice 9 Soient (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) trois droites. Construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune des trois droites.



Solution de l'exercice 9 On choisit A_1 arbitrairement sur (Δ_1). Pour tout point A_2, le point A_3 tel que $A_1A_2A_3$ soit équilatéral est l'image de A_2 par la rotation r de centre A_1 et d'angle $60°$. A_3 doit donc appartenir à (Δ_3) et à $r(\Delta_2)$, ce qui permet de tracer le triangle.

Exercice 10 Soit ABC un triangle équilatéral et M sur son cercle circonscrit, sur l'arc entre B et C ne contenant pas A.

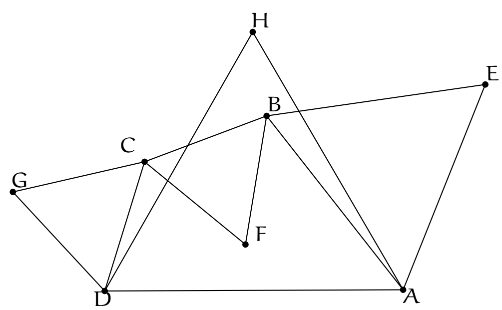
Montrer que $MB + MC = MA$.



Solution de l'exercice 10 En géométrie, il est plus facile de manipuler des sommes de longueurs quand les points considérés sont alignés. Soit donc N le point de (MB) sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B, tel que $MN = MC$: par chasse aux angles, $\angle CMN = 60°$, donc CMN est équilatéral. On veut maintenant montrer $AM = BN$. Or, soit r la rotation de centre C et d'angle 60° : elle envoie A sur B et M sur N, d'où le résultat.

Exercice 11 Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et E, F, G et H tels que ABE, BCF, CDG et DAH soient équilatéraux avec ABE et CDG dirigés vers l'extérieur de $ABCD$ et BCF et DAH dirigés vers l'intérieur.

Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.



<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On suppose $ABCD$ direct : soient r_1 la rotation de centre A et d'angle 60° et r_2 la rotation de centre C et d'angle -60°. On a :

$$r_2 \circ r_1(E) = r_2(B) = F$$

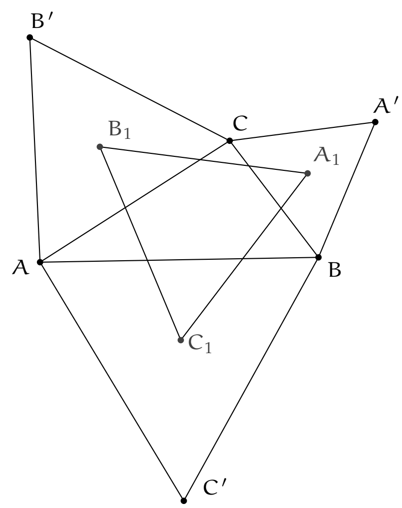
et

$$r_2 \circ r_1(H) = r_2(D) = G$$

donc EH=FG et, de même, EF=GH.

Exercice 12 (Théorème de Napoléon) Soient ABC un triangle et A', B' et C' tels que $A'BC$, $AB'C$ et ABC' soient équilatéraux, extérieurs à ABC. Soient A_1, B_1 et C_1 les centres de ces triangles équilatéraux.

Montrer que $A_1B_1C_1$ est équilatéral.



Solution de l'exercice 12 On suppose ABC direct : la figure présentant des triangles équilatéraux, il est naturel de considérer des rotations de 60° ou 120°. On veut les composer pour aboutir à quelque chose de simple, comme une translation. Soient donc r_A, r_B et r_C les rotations de centres A_1, B_1 et C_1 et d'angle 120° : leur composée est une translation car $3 * 120 = 360$. De plus, on a :

$$r_A \circ r_B \circ r_C(B) = r_A \circ r_B(A) = r_A(C) = B$$

d'où $r_A \circ r_B \circ r_C = Id$. En particulier, $r_A \circ r_B(C_1) = C_1$. Soit donc $D = r_B(C_1)$: on a $r(D) = C_1$. En faisant une figure avec les angles et les égalités de longueurs, on voit que $A_1DB_1C_1$ est un losange avec un angle en C_1 de 60°, donc $A_1B_1C_1$ est bien équilatéral.