DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Antoine TAVENEAUX
STAGE : Grésillon 2011

Exercices de dénombrement

Exercice 1 Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n ?

Exercice 2 Montrer que le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n) est impair si et seulement si n est le carré d'un nombre entier.

Exercice 3 Soient n et k deux nombres entiers naturels. De combien de façons est-il possible de choisir k nombres entiers naturels $i_1, i_2, ..., i_k$ tels que $i_1 + i_2 + ... + i_k = n$?

Exercice 4 Combien de tirages différents peut-on faire si l'on tire des boules différentes et qu'on les remet après chaque tirage sans se soucier de l'ordre ?

Exercice 5 (Concours général 90) On dispose de $n \geqslant 4$ couleurs. Combien de tétraèdres différents peut-on peindre en peignant chaque face avec une et une seule couleur ?

Exercice 6 Trouver une expression comparable à celle du binôme de Newton pour $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$.

Exercice 7 Calculer

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$$

Avec min la fonction qui donne le plus petit des deux nombres.

Exercice 8 Calculer

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} p + q$$

Exercice 9 (L'identité de Vandermonde) Montrer que si $k \leqslant \min(m, n)$ alors :

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + ... + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{k}$$

Exercice 10 Combien y a-t-il de permutations n'ayant qu'un seul cycle ?

Exercice 11 Soit p une fonction associée à une permutation. On appelle ordre de cette permutation le plus petit entier k tel que $p^{(k)} = \mathrm{Id}$. Quelle est le plus grand ordre pour une permutation de taille 11 ?

Exercice 12 Quelle est le plus petit k tel que l'on ait $p^{(k)} = \mathrm{Id}$ pour toutes les permutations de longueur n fixée (on note p pour la fonction correspondant à la permutation).

Exercice 13 On appelle dérangement une permutation de taille n telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on ait $p(i) \neq i$. Combien y a-t-il de dérangements de taille n ?

Exercice 14 On dit qu'une permutation $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ possède la propriété $\mathfrak{P}$ s'il existe un i tel que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Démontrer qu'il y a plus de permutations qui ont la propriété $\mathfrak{P}$ que de permutations qui ne l'ont pas.

Exercice 15 M est un sous-ensemble de $\{1, 2, ..., 15\}$ tel que le produit de 3 éléments distincts de M ne soit jamais un carré. Trouver le nombre maximal d'éléments que peut avoir M.

Exercice 16 Quarante quatre stagiaires ont été enlevés par le diabolique François qui, dans sa grande bonté, leur laisse une chance de se sortir de son piège. Il les fait entrer un par un dans une grande pièce qui contient 44 tiroirs, chacun de ces tiroirs contenant le nom d'un stagiaire (les noms sont supposés deux à deux distincts). Si en ouvrant moins de 22 tiroirs le mathématicien trouve son nom il passe dans une autre pièce où il doit attendre ses amis. Sinon, François tue tout le monde. Trouver une stratégie qui confèrent aux mathématiciens au moins 30% de chance de survivre.

- Correction -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Le problème peut être résolu de plusieurs manières. On peut simplement se contenter de faire le lien avec les suites de 0 et de 1 de longueur n (il y en a 2^n) qui sont une forme de représentation d'un sous ensemble puisqu'on peut, par exemple, dire que le sous ensemble associé à une suite est construit tel que le $i^{\text{ème}}$ élément soit dans le sous ensemble si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ terme de la suite est 1. Pour chaque suite il existe donc un ensemble et pour chaque ensemble il existe une unique suite. Il y a donc

exactement 2^n sous ensembles d'un ensemble de cardinal n. Une autre méthode de démonstration consiste à raisonner par récurrence sur n. Nous laissons au lecteur le soin de rédiger la démonstration qui ne devrait pas présenter de difficulté.

Solution de l'exercice 2 Pour chaque diviseur d de n, on fait correspondre n/d. Pour d, il existe bien un seul nombre n/d et inversement si on a $a = n/d$ on a $d = n/a$. Si n n'est pas le carré d'un entier, pour tout diviseur d de n alors d et n/d sont différents et n/d est aussi un diviseur de n. On a donc formé des paires de diviseurs, et il existe donc un nombre pair de diviseurs de n. Si n est un carré d'un entier, pour tous les diviseurs d tels que $\sqrt{n} \neq d$ on peut faire des paires, entre d et n/d. Enfin, il ne reste qu'un diviseur qui est $\sqrt{n}$ et n a un nombre impair de diviseurs.

Solution de l'exercice 3 Le plus simple est sans doute de considérer les objets tous différents dans un premier temps. Il y a donc $n!$ manières de les ranger. Mais les mêmes solutions sont comptées plusieurs fois car certains objets sont indentique. Si on considère que seuls les n_i objets du $i^{\text{ème}}$ type sont indiscernables (et tous les autres sont distincts) alors on compte $n_i!$ fois chaque solution car chaque permutation d'objets du $i^{\text{ème}}$ type est possible. Ainsi on compte $n_1!.n_2!.....n_k!$ fois la même solution quand les objets tous différents. Il y a donc

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!}$$

rangements différents de ces objets.

Solution de l'exercice 4 L'idée consiste à transformer légèrement le problème. On considère une série de $n + (k - 1) = n + k - 1$ cases dans lesquelles on va placer $k-1$ cubes délimiteurs. A chacune de ces configurations correspond une somme : i_1 est le nombre de cases avant le premier cube délimiteur et le nombre i_k est le nombre de case entre le $k - 1^{\text{ème}}$ délimiteur et la fin du casier. Réciproquement, pour chaque somme, il existe un seul arrangement des cases et des blocs délimiteurs. Ainsi il y a autant de sommes de k nombres dont la somme est n que de choix de $k - 1$ cases parmi $n + k - 1$. Il y a donc $\binom{n+k-1}{k-1}$ sommes possibles.

Solution de l'exercice 5 On note $1, 2, ..., n$ les couleurs (on a donc un ordre sur les couleurs). Nous allons distinguer les differents cas, en fonction du nombre de couleurs utilisées.

- Si on utilise 4 couleurs différentes, toutes les faces sont de couleurs différentes. On place la plus petite couleur (celle qui a le plus petit numéro) vers le bas et l'on place la seconde couleur face à nous. Il reste alors 2 possibilités pour choisir la place des 2 dernières couleurs. Il existe donc 2 (et seulement 2) tétraèdres qui ont les 4 mêmes couleurs. Il y a donc $2.\binom{n}{4}$ tétraèdres avec 4 couleurs.

- Si on utilise 3 couleurs, il y a nécessairement une couleur qui se répète, notons la i. On place alors les deux faces de couleur i vers le bas et l'autre vers nous, ensuite les deux façon de peindre les deux autres faces sont équivalentes à rotation prés. Donc il y a $\binom{n}{3}$ tétraèdres de 3 couleurs différentes.
- Si on utilise 2 couleurs, soit une couleur apparaît 3 fois, soit les deux couleurs apparaissent 2 fois. Si une des 2 couleurs est représentée 3 fois, alors en plaçant la couleur représentée une seule fois vers le bas on remarque qu'il n'y a qu'une seule manière de peindre le tétraèdre. Si chaque couleur est représentée 2 fois et si l'on place la plus petite couleur vers le bas et face à nous on remarque que la position de l'autre couleur est ainsi fixée. Il n'existe donc qu'une manière de peindre un tétraèdre avec deux couleurs qui se répètent deux fois chacunes. Il y a donc $2.\binom{n}{2}$ tétraèdres peints avec 2 couleurs.
- Si on utilise une seule couleur, il n'y a bien sûr qu'un tétraèdre par couleur. Il y a donc $\binom{n}{1} = n$ tétraèdres d'une seule couleur.

Le nombre de tétraèdres possibles est donc :

$$2(\binom{n}{4}+\binom{n}{3}+\binom{n}{2})+n = 2(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n(n-1)}{2})+n$$
$$= n(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12}+\frac{(n-1)(n-2)}{3}+(n-1)+1)$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Nous allons montrer par récurrence sur m que

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n} \binom{n}{k_1,k_2,...,k_m} x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_m^{k_m}$$

avec

$$\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$$

. Pour $m = 2$ on retrouve la formule du binôme de Newton. Supposons alors que la formule soit vraie pour m, on a donc :

$$(x_1+...+(x_m+x_{m+1}))^n = \sum_{k_1+k_2+...+K=n} \binom{n}{k_1,k_2,...,K} x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_{m-1}^{k_{m-1}}(x_m+x_{m+1})^K$$

avec la formule du binôme sur $(x_m + x_{m+1})^K$ on a :

$$= \sum_{k_1+k_2+...+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Et par définition des coefficients, on a

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \frac{n!}{k_1!k_2!...K!} \frac{n!}{k_m!k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_{m+1}!} = \binom{n}{k_1, ..., k_m, k_{m+1}}$$

Enfin :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m + x_{m+1})^n = \sum_{k_1+...+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On sépare en deux la deuxième somme car

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + i.(n-(i+1)+1)$$

On a donc

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} (n + \frac{1}{2})i - \frac{i^2}{2}$$

$$= (n + \frac{1}{2}) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Nous changeons l'ordre de la somme. Rassemblons les termes pour lesquels $p + q$ est constant. Posons donc $i = p + q$, on a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} p + q = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i+1} i = \sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Regardons le polynôme $(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n.(1 + x)^m$. Dans ce polynôme le coefficient de x^k peut être calculé de deux manières

différentes. Avec la partie gauche de l'égalité on aboutit à $\binom{m+n}{k}$ et avec l'autre membre on aboutit à :

$$\sum_{p,r|\ p+r=k} \binom{n}{p} \cdot \binom{m}{r} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$$

car on a choisi $\binom{n}{k} = 0$ quand $k > n$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Pour chaque permutation ayant un seul cycle on peut lui associer son cycle exprimé comme un n-uplet dont le premier nombre est 1. A l'inverse pour chaque n-uplet qui commence par un 1 on peut lui associer la seule permutation ayant ce seul cycle. Il y a donc $(n-1)!$ permutations n'ayant qu'un cycle.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Pour avoir $p^{(i)}(1)$ il faut (et il suffit) que i soit un multiple de la longueur du cycle qui contient 1. Comme la somme de la longueur des cycles d'une permutation de longueur 11 est 11, alors l'ordre maximum est le PPCM maximum que l'on peut atteindre avec des nombres dont la somme vaut 11. Ce PPCM maximum est atteint pour 6 et 5. Donc l'ordre maximum d'une permutation de longueur 11 est $6 \times 5 = 30$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Si pour toute permutation de longueur n on a $p^{(k)} = Id$ alors pour toute longueur $1 \leqslant i \leqslant n$ de cycle d'une permutation de longueur n le nombre k doit être un multiple de i. Or tous les nombres de $i \in \{1, 2, ..., n\}$ peuvent être la longueur d'un cycle d'une permutation de longueur n. En effet, il suffit de prendre la permutation $(2, 3, ..., i-1, i, 1, i+1, i+2, ..., n)$ qui a comme cycle $(1, 2, 3, ..., i)$ qui est de longueur i. Ce nombre est donc $PPCM(1, 2, ..., n)$. Si on note p_i le $i^{\text{ème}}$ nombre premier et α_i le plus grand entier tel que $p_i^{\alpha_i} \geqslant n$, on a donc que $PPCM(1, 2, ..., n) = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_i^{\alpha_i}.\cdots$.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> On va plutôt compter les permutations de taille n qui possèdent au moins un i tel que $p(i) = i$. Pour cela on va utiliser le principe d'inclusion et d'exclusion. Notons A_i l'ensemble des permutations tels que $p(i) = i$. On a alors : $Card(A_i) = (n-1)!$ et pour une intersection de k ensembles A_i disctincts on a $Card(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$. Donc avec la formule du principe d'inclusion et d'exclusion on a :

$$Card(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}$$

Comme il y a $n!$ permutations, le nombre de dérangements est :

$$n! - (n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n!}{n!} = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

Solution de l'exercice 14 Soient $\mathfrak{A}$ l'ensemble des permutations qui possèdent la propriété $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{B}$ l'ensemble de celles qui ne possèdent pas la propriété $\mathfrak{P}$. Il nous suffit de trouver une injection φ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. Soit p l'unique élément de $\{1, 2, ..., 2n\}$ tel que $x_p \equiv x_1 + n \pmod{2n}$. On a alors :

$$\varphi : (x_1, x_2, ..., x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, ..., x_{2n}) \mapsto (x_2, ..., x_{p-1}, x_1, x_p, x_{p+1}, ..., x_{2n})$$

On remarque donc que tout élément $(y_1, ..., y_{2n})$ de l'image de φ vérifie $\mathfrak{P}$ car si on choisi $i = p-1$, on a $|y_i - y_{i+1}| = |x_1 - x_p| = n$. Donc φ est injective. Donc $\mathrm{Card}(\mathfrak{A}) \geqslant \mathrm{Card}(\mathfrak{B})$.

Solution de l'exercice 15 Le produit de 3 éléments de $\{1, 4, 9\}$, $\{2, 6, 12\}$, $\{3, 5, 15\}$ et $\{7, 8, 14\}$ est un carré donc aucun d'eux ne peut être un sous-ensemble de M. Comme ils sont disjoint, on a Card(M)$\leqslant$ 11. Si $10 \notin M$ alors $|M| \leqslant 10$. Sinon $10 \in M$. Dans ce cas, aucun des ensembles $\{2, 5\}$, $\{6, 15\}$, $\{1, 4, 9\}$, $\{7, 8, 14\}$ n'est un sous-ensemble de M. Si $\{3, 12\} \not\subseteq M$, on a $|M| \leqslant 10$. Sinon $\{3, 12\} \subseteq M$ et donc $1 \notin M$. Enfin, $M \leqslant 10$. Ainsi, dans tous les cas $M \leqslant 10$. Et finalement on vérifie que $\{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$ a la propriété désirée. Donc la valeur maximal de $|M|$ est 10.

Solution de l'exercice 16 On numérote les stagiaires et les tiroirs. Le système des tiroirs correspond donc à une permutation. On note donc $p(i)$ le contenus du tiroir i. Le mathématicien i ouvre le tiroir i. S'il n'y est pas, il ouvre le tiroir $p(i)$ et il continue ainsi et donc le $k^{\text{ème}}$ tiroir qu'il ouvre est le tiroir $p^{(k)}(i-1)$. Si la permutation n'a que des cycles de longueur plus petite que 22, les stagiaires survivent. Cherchons quelle est la probabilité qu'une permutation ait un cycle de longueur supérieure à 18. Il y exactement

$$\binom{44}{k}(46-k)!(k-1)!$$

permutation qui ont un cycle de longueur k car il y a $(k-1)!$ permutation de k nombres. Et on a :

$$\frac{1}{46!}\sum_{k=22}^{44}\binom{44}{k}(44-k)!(k-1)! = \sum_{k=22}^{44}\frac{1}{k} < 0,68$$

Et donc la probabilité de s'en sortir pour les stagiaires est supérieure à $1 - 0,68 = 0,32$.