DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Jean-François MARTIN
STAGE : Grésillon 2011

Nombres complexes en géométrie : exercices

Exercice 1 Soit ABC un triangle avec $\widehat{CAB} = 60^\circ$, P et Q les pieds des bissectrices issues de A et de B.

Calculer les angles de ABC sachant que $AB + BP = AQ + QB$.

Exercice 2 Soit ABC un triangle orienté dans le sens trigonométrique.

Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

Exercice 3 Soit Γ un cercle de rayon R et A, B, C, D, E et F dans cet ordre sur Γ tels que $AB = CD = EF = R$. Pour tous points X et Y du plan, M_{XY} désigne le milieu du segment $[XY]$.

Montrer que le triangle $M_{BC}M_{DE}M_{FA}$ est équilatéral.

Exercice 4 Soit A et B sur le cercle unité.

Calculer une équation complexe simple de la droite (AB).

Exercice 5 Soit Γ un cercle et A, B, C, D, E et F des points sur Γ. Soit P, Q et R les points d'intersections respectifs de (AB) et (DE), (BC) et (EF) et (CD) et (FA).

Montrer le théorème de Pascal, i.e. que P, Q et R sont alignés.

Exercice 6 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soit ω_1 (resp. ω_2) le cercle inscrit au triangle ABC (resp. ADC). Supposons qu'il existe un cercle ω tangent aux droites (AD), (CD), à la demi-droite $[BA)$ au-delà de A et à la demi-droite $[BC)$ au-delà de C.

Montrer que les tangentes extérieurs communes à ω_1 et ω_2 se coupent en un point de ω.

- Correction -

Solution de l'exercice 1 Soit $\beta = \widehat{ABC}$. Soit $\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et soit $x = e^{i\frac{\beta}{2}}$. L'égalité $AB + BP = AQ + QB$ se réécrit $1 + \frac{BP}{AB} = \frac{AQ}{AB} + \frac{QB}{AB}$. En utilisant la loi des sinus dans les triangles APB et AQB, cela se réécrit également sous la forme suivante :

$$1 + \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(180^\circ - 30^\circ - \beta)} = \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(180^\circ - 60^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\sin(60^\circ)}{\sin\left(180^\circ - 60^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Après simplification, on sait donc que :

$$1 + \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(30^\circ + \beta)} = \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin(60^\circ)}{\sin\left(60^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

En utilisant plusieurs fois la relation $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{\frac{\omega - \frac{1}{\omega}}{2i}}{\frac{\omega x^2 - \frac{1}{\omega x^2}}{2i}} = \frac{\frac{x - \frac{1}{x}}{2i} + \frac{\omega^2 - \frac{1}{\omega^2}}{2i}}{\frac{\omega^2 x - \frac{1}{\omega^2 x}}{2i}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega x^2 - \frac{1}{\omega x^2} + \omega - \frac{1}{\omega}}{\omega x^2 - \frac{1}{\omega x^2}} = \frac{x - \frac{1}{x} + \omega^2 - \frac{1}{\omega^2}}{\omega^2 x - \frac{1}{\omega^2 x}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2}{\omega^2 x^4 - 1} = \frac{\omega^2 x^2 - \omega^2 + \omega^4 x - x}{\omega^4 x^2 - 1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2}{\omega^2 x^4 - 1} = \frac{(\omega^2 x - 1)(x + \omega^2)}{(\omega^2 x - 1)(\omega^2 x + 1)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2}{\omega^2 x^4 - 1} = \frac{x + \omega^2}{\omega^2 x + 1} \\
\Leftrightarrow\ & (\omega^2 x^4 - 1 + \omega^2 x^2 - x^2)(\omega^2 x + 1) = (x + \omega^2)(\omega^2 x^4 - 1) \\
\Leftrightarrow\ & \omega^2 x^5 + \omega^2 x^4 - \omega^2 x - 1 + \omega^4 x^3 + \omega^2 x^2 - \omega^2 x^3 - x^2 = \omega^2 x^5 + \omega^4 x^4 - x - \omega^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\omega^2 - 1)(\omega^2 x^3 + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left\{ -\frac{1}{\omega^{\frac{2}{3}}}; -\frac{j}{\omega^{\frac{2}{3}}}; -\frac{j^2}{\omega^{\frac{2}{3}}}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left\{ e^{\frac{8i\pi}{9}}; e^{\frac{5i\pi}{9}}; e^{\frac{2i\pi}{9}}; e^{\frac{i\pi}{6}}; e^{\frac{5i\pi}{6}} \right\} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\beta}{2} \in \left\{ \frac{8\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}.
\end{aligned}$$

De plus, (un des angles du triangle valant déjà 60°) pour correspondre à la réalité géométrique, il faut que $\frac{\beta}{2}$ soit strictement inférieur à 60°. On trouve ainsi que $\frac{\beta}{2}$ vaut $\frac{2\pi}{9}$. On obtient donc $\beta = \frac{4\pi}{9}$, d'où un dernier angle de $\frac{2\pi}{9}$.

Ainsi, l'angle $\widehat{ABC}$ vaut 80° et l'angle $\widehat{BCA}$ vaut 40°.

Solution de l'exercice 2 Puisqu'une multiplication par j correspond à une rotation de 120°, on sait que ABC est équilatéral si et seulement si $(c-a) = j(b-c)$ i.e. si et seulement si $a+jb+(-1-j)c = 0$ i.e. si et seulement si $a+jb+j^2c = 0$.

Solution de l'exercice 3 Soit $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$. On sait que $\omega^3 = e^{i\pi} = -1$. On sait de plus que $j = \omega^2$. Quitte à symétriser la figure, je suppose que les points sont placés dans le sens trigonométrique. Je place l'origine du plan complexe en le sens du cercle. On obtient alors (en utilisant les trois triangles équilatéraux déjà dans la figure) $b = \omega a$, $d = \omega c$, $f = \omega e$. En particulier, on peut trouver les affixes des milieux considérés : $m_BC = \frac{1}{2}(\omega a + c)$, $m_DE = \frac{1}{2}(\omega c + e)$, $m_FA = \frac{1}{2}(\omega e + a)$. D'après l'exercice précédent, il suffit de prouver que $m_BC + jm_DE + j^2m_FA = 0$, i.e. (après multiplication par 2) que $(\omega a + c) + \omega^2(\omega c + e) + \omega^4(\omega e + a) = 0$, ce qui est clairement vrai puisque l'on peut factoriser par $1 + \omega^3$ qui vaut 0.

Solution de l'exercice 4

$$\begin{aligned}
Z \in (BC) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-b}{a-b} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \frac{z-b}{a-b} = \frac{\overline{z}-\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}} \;\Leftrightarrow\; (z-b)(\overline{a}-\overline{b}) = (a-b)(\overline{z}-\overline{b}) \\
&\Leftrightarrow \quad (z-b)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) = (a-b)(\overline{z}-\frac{1}{b}) \;\Leftrightarrow\; (z-b)(b-a) = ab(a-b)(\overline{z}-\frac{1}{b}) \\
&\Leftrightarrow \quad z = a+b-ab\overline{z}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 Posons Γ le cercle unité. Soit $x = af-ab+de-cd+bc-ef$ On peut utiliser la formule de l'exercice précédent pour calculer l'affixe de $\overline{p}$: on sait que $p = a+b-ab\overline{p}$ et $p = d+e-de\overline{p}$, donc $\overline{p} = \frac{a+b-d-e}{ab-de}$. On procède de même pour les autres points. Ainsi :

$$\overline{p}-\overline{q} = \frac{a+b-d-e}{ab-de} - \frac{b+c-e-f}{bc-ef} = \frac{(b-e)x}{(ab-de)(bc-ef)}.$$

En conjuguant cette équation, on obtient que :

$$p-q = \frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{e}\right)\overline{x}}{\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{de}\right)\left(\frac{1}{bc}-\frac{1}{ef}\right)} = -abcdef\frac{(b-e)\overline{x}}{(ab-de)(bc-ef)}.$$

Ainsi, on obtient que :

$$\frac{p-q}{\overline{p}-\overline{q}} = -\frac{abcdef\overline{x}}{x}.$$

Par permutation cyclique, on obtient que :

$$\frac{q-r}{\overline{q}-\overline{r}} = -\frac{abcdef(-\overline{x})}{-x} = -\frac{abcdef\overline{x}}{x}.$$

Ainsi :

$$\frac{p-q}{\overline{p}-\overline{q}} = \frac{q-r}{\overline{q}-\overline{r}}.$$

Ceci est équivalent à $\frac{p-q}{\overline{q}-\overline{r}} \in \mathbb{R}$, ce qui signifie bien que P, Q et R sont colinéaires.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Posons ω le cercle unité, $K,\ L,\ M,\ N$ les points de contact avec les droites $(BC), (AD)$,$(CD), (AB)$. Soit T le point d'intersection des tangentes communes extérieures à ω_1 et ω_2. Soit r_1 et r_2 leur rayon et J_1 et J_2 leur centre.

En considérant le cas limite de l'exercice 4, on montre facilement que $a = \frac{2}{\overline{l}+\overline{n}}$ et de même pour B, C et D.

En considérant l'homothétie de centre T envoyant ω_1 sur ω_2, on montre que :

$$\frac{t-j_1}{r_1} = \frac{t-j_2}{r_2}.$$

On peut donc exprimer t en fonction des autres paramètres :

$$t = \frac{j_1 r_2 - j_2 r_1}{r_2 - r_1}.$$

Soit $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur d'affixe $i\frac{c-a}{|c-a|}$.

$$\tau^2 = -\frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}} = -\frac{\overline{l}+\overline{n}-\overline{k}-\overline{n}}{l+n-k-m}klmn.$$

Soit $\lambda = \frac{1}{2}(\overline{a}\tau + a\overline{\tau}) = \overline{\tau}\frac{km-ln}{k+m-l-n}$.

On peut de plus calculer j_1 en utilisant dans un premier temps que O, J_1 et B sont colinéaires, ce qui s'écrit $j_1 = kn\overline{j_1}$. De plus, (en prenant des distances orientées), on sait que :

$$0 = d(J_1,(AB)) + d(J_1,(AC) = \frac{1}{2}(j_1\overline{n} + n\overline{j} - 2) + j_1\overline{\tau} + \tau\overline{j_1} - 2\lambda.$$

Ainsi, on peut calculer j_1, on calcule alors r_1 avec $d(J_1, (AB))$ et, par symétrie, on peut calculer j_2 et r_2. Ainsi, on peut calculer t, et il suffit alors de vérifier que $\tau\overline{\tau} = 1$. Les calculs explicites sont laissés au lecteur.