DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Jean-François MARTIN
STAGE : Montpellier 2013

Similitudes

Question philosophique : qu'est-ce que la géométrie ? L'étude de certaines figures en termes d'angles, de distances ... ? La distance d'une figure donnée au bord du tableau ne nous intéresse pourtant pas. L'étude de certaines propriétés de certaines figures ? Certes, mais comment définir exactement ces propriétés ? Qu'est-ce qui distingue la propriété pertinente "A, B et C sont alignés" et la propriété inintéressante "(AB) est perpendiculaire au bord du tableau" ? Ou, moins caricaturalement, la propriété "$AB = 1cm$", moyennement intéressante de la plupart des points de vue mathématiques.

Un moyen pertinent de définir ces propriétés est : "l'ensemble des propriétés invariantes par une certaine classe de transformations". Par exemple, si on veut s'intéresser aux distances, on peut considérer les propriétés invariantes par isométries (translations, rotations, réflexions...) ; si on veut s'intéresser aux rapports de longueurs, aux angles, on peut considérer les propriétés invariantes par similitudes ; si on veut s'intéresser au parallélisme, aux milieux, on peut considérer les propriétés invariantes par transformation affines ; si on veut s'intéresser aux alignements, aux points harmoniques, on peut considérer les propriétés invariantes par transformation projective (voir cours du groupe D).

Il est donc naturel de tenter de comprendre en profondeur ces transformations. Nous considérerons ici les similitudes directes.

- Cours -

Définition 1. On appelle similarité toute transformation (i.e. fonction bijective) du plan qui conserve les angles orientés, ou, de manière équivalente, envoie les triangles sur des triangles directement semblables.

Remarques 2. – L'équivalence entre conservation des angles orientés et des triangles directement semblables n'est pas immédiatement évidente pour les triangles plats. Toutefois, étant donné trois points A, B et C alignés, pour montrer que le rapport AB/AC est conservé, il suffit de considérer un point P en dehors de la droite et de considérer les triangles ABP et ACP, prouvant que les rapports AB/AP et AP/AC seront conservés. Une astuce du même genre permettra de toujours mettre de côté ce genre de cas résiduels. C'est un bon exercice pour le lecteur pointilleux de remplir les trous...

– On connaît déjà bon nombre de similarités. Translations, rotations, homothéties et similitude directes (voir définition 9) sont des similarités. De plus, il est évident que la composition de deux similarités est une similarité.

– Le terme "similarité" est un anglicisme. Le terme approprié est similitude directe, mais cela induit une confusion avec la notion propre au plan de la définition 9. Le théorème 10 en devient d'ailleurs particulièrement limpide...

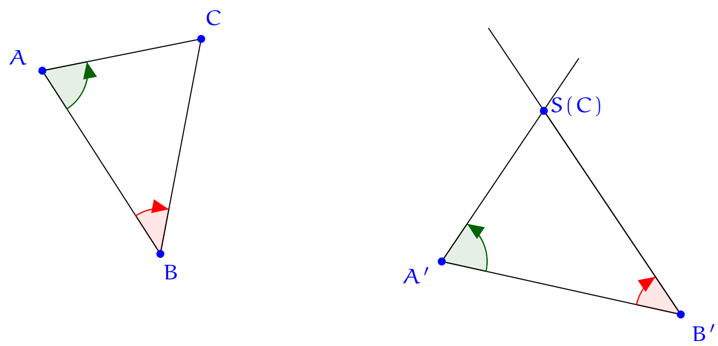
Théorème 3. Étant donnés quatre points $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similarité S telle que :

$$S \quad : \quad \begin{array}{rcl} A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B'. \end{array}$$

Démonstration. On pourrait raisonner directement dans l'esprit du théorème 10, mais la preuve naturelle a son intérêt.

Unicité.

Montrons que pour tout point C du plan, cette condition fixe l'image de C par S. On suppose $C \notin (AB)$. Par conservation des angles orientés, l'image de C doit être sur la droite formant en B' un angle $\widehat{ABC}$ avec la droite (AB). De même, elle doit être sur la droite formant en A' un angle $\widehat{BAC}$ avec (AB). L'intersection de ces deux droites, uniquement déterminée, est donc le point recherché.



Existence.

On va exhiber une similarité avec cette propriété en composant différentes similarités classiques (translations, rotations, homothéties...) de manière à s'approcher de plus en plus du but souhaité.

Dans un premier temps, afin d'envoyer déjà A sur A', on utilise la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$:

$$t \quad : \quad \begin{array}{ccc} A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B''. \end{array}$$

On utilise ensuite la rotation ρ de centre A' et d'angle $\widehat{B''A'B'}$:

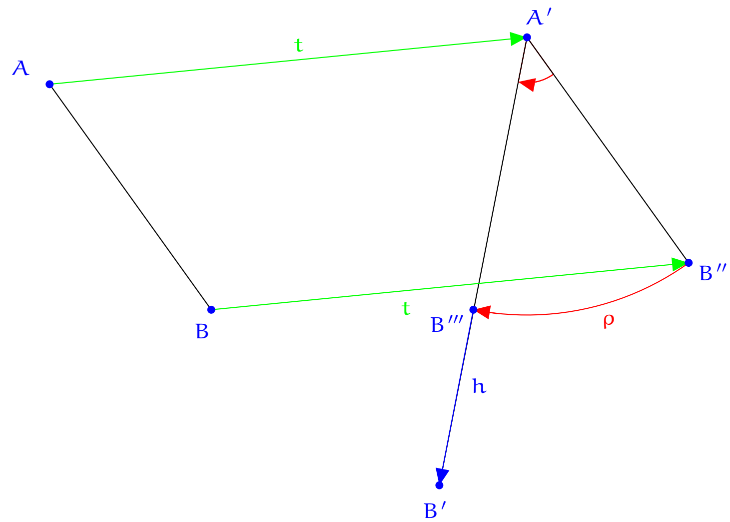
$$\rho \quad : \quad \begin{array}{ccc} A' & \longmapsto & A' \\ B'' & \longmapsto & B'''. \end{array}$$

Comme par construction $B''' \in (A'B')$, on peut finalement utiliser l'homothétie h de centre A' et de rapport $A'B'/A'B'''$:

$$h \quad : \quad \begin{array}{ccc} A' & \longmapsto & A' \\ B''' & \longmapsto & B'. \end{array}$$

$\square$

Finalement, $S = h \circ \rho \circ t$ convient par construction.



Définition 4. On appelle centre d'une similarité un point fixe de cette similarité.

Exemple 5. Une translation de vecteur non nul n'a aucun centre, une rotation ou une homothétie en a un et la transformation identité admet tous les points du plan comme centre.

Remarque 6. L'unicité du théorème précédent appliquée à l'identité montre que, hormis l'identité, toute similarité a au plus un point fixe.

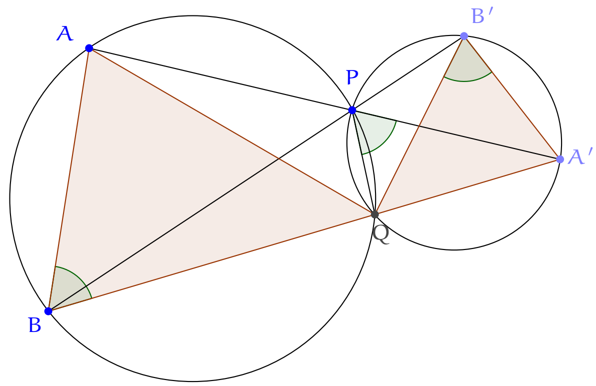
Le théorème suivant, essentiel, montre que l'on connaît bien le centre d'une similitude :

Théorème 7. Soit A, B, A' et B' supposés en position générale (un couple ne peut être obtenu à partir de l'autre par translation ou homothétie). Soit P le point d'intersection de (AA') et (BB'). Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles circonscrits à PAB et $PA'B'$ et Q leur deuxième point d'intersection.

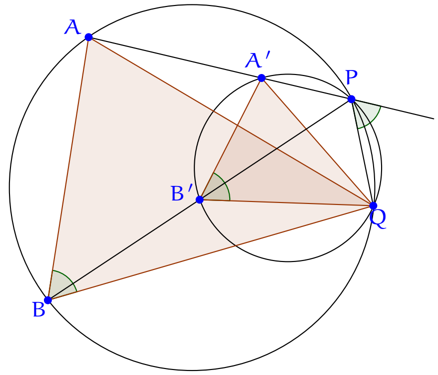
Alors, Q est le centre de la similitude envoyant A et B sur A' et B'.

Démonstration. Soit S l'unique similitude envoyant A et B sur A' et B'. On cherche à montrer que S envoie Q sur lui-même. D'après la démonstration de l'unicité de cette similitude, il suffit de vérifier que ABQ et $A'B'Q$ sont directement semblables. On procède par chasse aux angles. Il suffit de montrer que $\widehat{ABQ} = \widehat{A'B'Q}$, l'égalité $\widehat{BAQ} = \widehat{B'A'Q}$ se montrant de manière similaire.

$\widehat{ABQ} = 180° - \widehat{APQ} = \widehat{A'PQ} = \widehat{A'B'Q}$. □



Remarque 8. Bien sûr, il faudrait écrire cette démonstration en termes d'angles orientés. Ce que le lecteur pointilleux est invité à faire. Il est d'ailleurs important de se familiariser avec les deux configurations :



On remarque de plus en utilisant les triangles semblables de la démonstration précédente que cette similarité peut facilement être vue comme la composée d'une rotation (d'angle $\widehat{AQA'}$) et d'une homothétie (de rapport QA'/QA) de centre Q.

Définition 9. Une similitude directe de centre Q est la composée d'une rotation de centre Q et d'une homothétie de centre Q. Elle est caractérisée par son angle de rotation et son facteur de dilatation.

On a donc le théorème important suivant :

Théorème 10. Toute similarité est soit une translation soit une similitude directe.

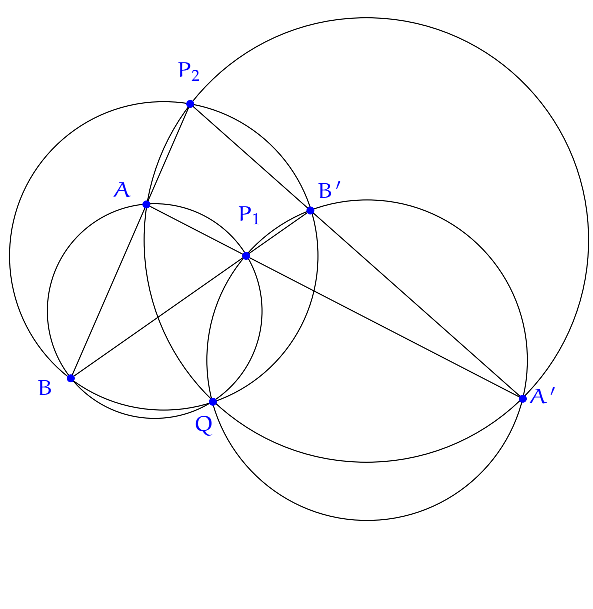
De plus, on voit toujours dans la même figure grâce aux mêmes triangles semblables que la similitude directe de centre Q, d'angle $\widehat{AQB} = \widehat{A'QB'}$ et de rapport de dilatation $QB/QA = QB'/QA'$ envoie A sur B et A' sur B'. En laissant au lecteur le cas particulier des homothéties, on obtient le théorème important suivant :

Théorème 11. Si une similitude directe envoie A sur A' et B sur B', alors la similitude envoyant A sur B et A' sur B' a même centre.

En appliquant le théorème 7 aux deux similitudes précédentes, on obtient le résultat bien connu suivant, qui (pour l'intersection des cercles) se démontre également par chasse aux angles (exercice !) :

Théorème 12. Soit A, B, A' et B' en position générale. Soit $P_1 = (AA') \cap (BB')$ et $P_2 = (AB) \cap (A'B')$. Alors les cercles circonscrits à P_1AB, $P_1A'B'$, P_2AA' et P_2BB' sont concourants en un point Q, appelé point de Miquel du quadrilatère complet $AA'BB'$.

Il est le centre de la similitude directe envoyant A sur A' et B sur B' ainsi que de celle envoyant A sur B et A' sur B'.



Remarque 13. On considérera essentiellement ce point comme centre des similitudes directes précédentes. Mais il est également d'une importance primordiale en géométrie projective unidimensionnelle complexe en tant que centre

de l'involution échangeant les 6 sommets du quadrilatère complet (pour comprendre la phrase précédente ... allez au club de mathématiques discrètes de Lyon !).

Remarque 14. Il peut souvent être intéressant de regarder les similitudes d'un point de vue complexe : c'est en fait juste les fonctions affines. Voir notamment la première question de l'exercice 2 du test.

- Exercices -

Dans tous les exercices, les points sont ou ne sont pas supposés en position générale (à la discrétion du lecteur pointilleux !). Face à un exercice où les points ne sont pas en position générale mais où les techniques de ce cours semblent prometteuses, une bonne stratégie est de dire que, par un argument de continuité (en considérant les points de l'exercice comme des fonctions continues quand écrits en analytique), on peut les supposer en position générale.

Exercice 1 Soit $ABCD$ un quadrilatère, E et F sur $[AD]$ et $[BC]$ respectivement tels que $AE/ED = BF/FC$. Soit $S = (EF) \cap (AB)$ et $T = (EF) \cap (CD)$.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SAE, SBF, TCF et TDE sont concourants.

Exercice 2 Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $AD = BC$ et P l'intersection de ses diagonales. Soit F et E des points variables sur les segments $[AD]$ et $[BC]$ respectivement de manière à avoir $BE = DF$. On pose R et Q les points d'intersections de (EF) avec (AC) et (BD) respectivement.

Montrer que le cercle circonscrit à PQR a un deuxième point fixe quand E et F varient.

Exercice 3 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ, P un point variable sur le petit arc AB. Soit I et J les centres des cercles inscrits des triangles ACP et BCP respectivement. On considère P le point d'intersection de Γ et du cercle circonscrit au triangle PIJ.

Montrer que Q reste fixe quand P varie.

Exercice 4 Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soit A_1 et B_1 deux points variables sur Γ_1 et A_2 et B_2 les deuxièmes points d'intersection de Γ_2 avec (A_1P) et (B_1P) respectivement. Soit $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$.

Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle CA_1A_2 reste sur un cercle fixe quand A_1 et A_2 varient.

L'exercice suivant est important per se et souvent utilisé (il faut par contre penser à le redémontrer ... ou citer ce poly !).

Exercice 5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, P le point d'intersection des diagonales et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles APD et BPC.

Montrer que $\widehat{OQP} = 90°$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle, E et D des points sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ de manière à avoir $BE = CD$. Soit P l'intersection des diagonales du quadrilatère $BEDC$ et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à EPB et DPC. Soit K et L les milieux respectifs de $[BE]$ et $[CD]$ et R le point d'intersection de la perpendiculaire à (QK) passant par K et de la perpendiculaire à (QL) passant par L.

Montrer que :

a) Q est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

b) R est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 7 Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On considère trois points A_1, B_1 et C_1 sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note A_3, B_3 et C_3 les symétriques de A_1, B_1 et C_1 par rapport aux milieux de leurs côtés respectifs. On note A_2, B_2 et C_2 les deuxièmes points d'intersection de Γ avec les cercles circonscrits à AB_1C_1, BC_1A_1 et CA_1B_1 respectivement.

Montrer que les triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

On peut également trouver un type d'exercice légèrement différent à propos du point de Miquel et des similitudes : une figure ou apparaît de manière évidente une similitude directe particulière et son centre. Le théorème 12 permet alors de trouver des points cocycliques.

Exercice 8 Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant les relations $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$.

Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Exercice 9 Soit $ABCDEF$ un hexagone inscriptible vérifiant $AB = CD = EF$. Soit $Z = (AC) \cap (BD)$, $X = (CE) \cap (DF)$ et $Y = (EA) \cap (FB)$.

Montrer que XYZ et BDF sont semblables.

Enfin, comme pour les autres transformations (translation, homothéties, rotations...), il est intéressant de considérer ce que donne la composition de similitudes directes. Afin d'inviter le lecteur curieux à explorer ce champ de possibilités, je conclus sur un exercice dans cette direction.

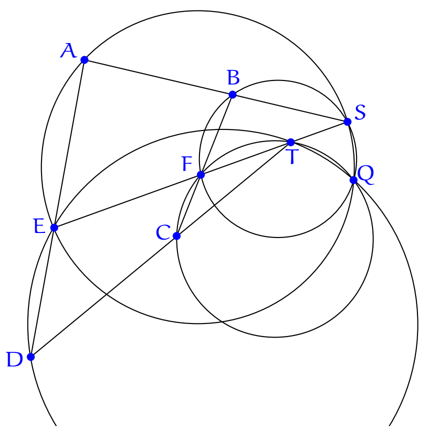
Exercice 10 Soit Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles avec $A; B = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $C; D = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ et $E; F =$

$\Gamma_3 \cap \Gamma_1$. On considère P_1 sur Γ_1 et on note P_2 le deuxième point d'intersection de (P_1A) et Γ_2, P_3 le deuxième d'intersection de (P_3C) et Γ_3, P_4 le deuxième point d'intersection de (P_3E) et Γ_1, P_5 le deuxième point d'intersection de (P_4B) et Γ_2, P_6 le deuxième point d'intersection de (P_5D) et Γ_3 et enfin P_7 le deuxième point d'intersection de (P_6F) et Γ_1.

Montrer que $P_7 = P_1$.

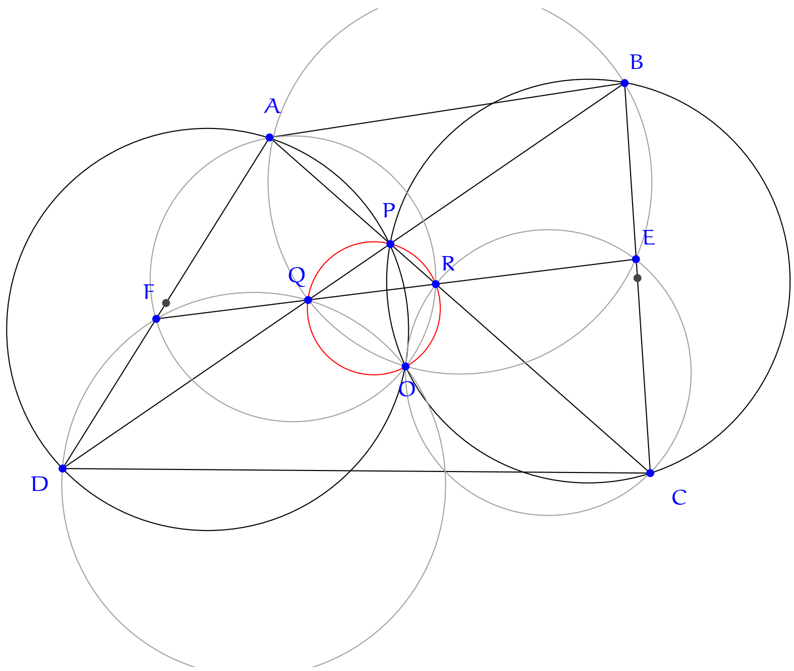
- Solutions -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>



D'après l'égalité sur les rapports de longueur, la similitude directe envoyant A sur B et D sur C envoie également E sur F. En utilisant le théorème 12 pour les couples de points $(E, D) \mapsto (F, C)$, on obtient que son centre est sur les cercles circonscrits à TCF et TDE. En l'utilisant sur les couples de points $(A, E) \mapsto (B, F)$, ce centre est également sur les cercles circonscrits à SAE et SBF. D'où la conclusion.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

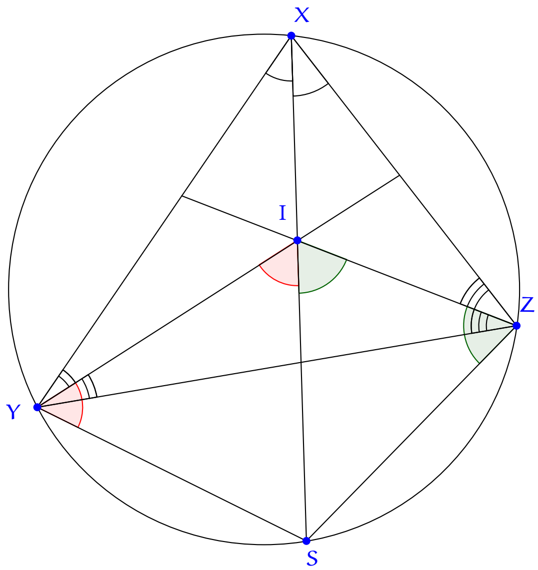


Il existe clairement en utilisant les égalités de longueur une similitude envoyant les points A, F et D sur les points C, E et B respectivement.

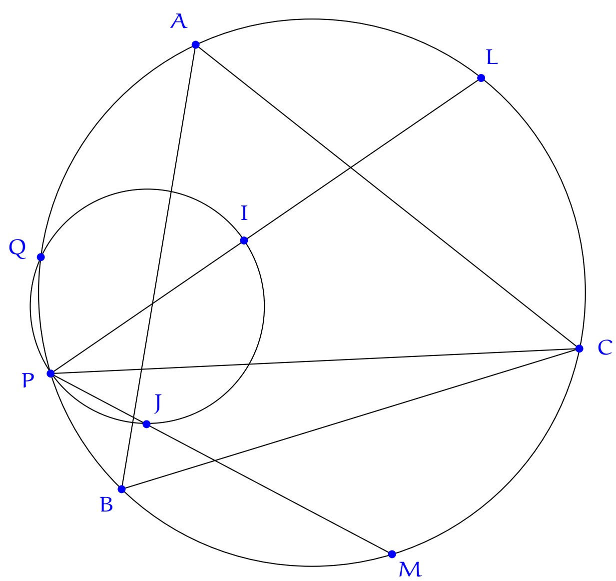
Il est naturel d'introduire son centre O et quelques dessins peuvent nous convaincre que c'est vraisemblablement le point recherché. En utilisant successivement le théorème principal pour les couples $(A, F) \mapsto (C, E)$, $(F, D) \mapsto (E, B)$ et $(D, A) \mapsto (B, C)$, on sait que O est sur le cercle circonscrit aux triangles ARF, ERC, FQD, BQE, APD et BPC. En particulier (en utilisant les deux derniers triangles), il est fixe. Il est donc suffisant (et probablement raisonnablement aisé au vu de tous les autres cercles...) de démontrer que O, P Q et R sont cocycliques.

Or, le théorème de Miquel appliqué au quadrilatère $AFPQ$ prouve qu'il suffit de démontrer que O est sur le cercle circonscrit à ARF, DPA et DFQ. D'où la conclusion.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On rappelle le théorème du pôle Sud, visiblement pertinent dans cet exercice et démontrable grâce à une chasse aux angles élementaire (exercice !).



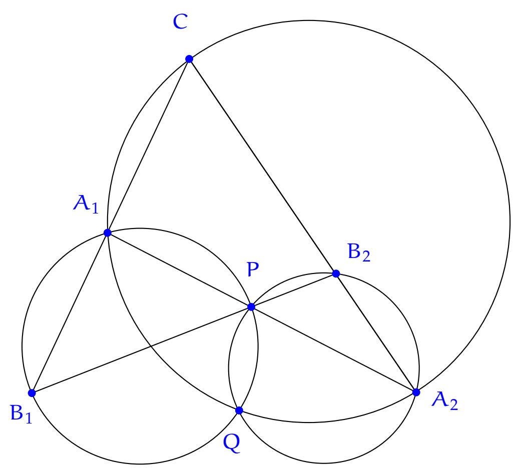
Si XYZ est un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, I son centre du cercle inscrit et S le deuxième point d'intersection de (XI) avec $\mathcal{C}$. Alors, S est le milieu de l'arc YZ et, plus précisément, $SY = SI = SZ$.



On est dans la situation classique avec deux cercles qui s'intersectent, on connaît bien un des points d'intersection et c'est l'autre qui nous intésse. On cherche donc à compléter le quadrilatère. De manière naturelle, on introduit donc les points fixes L et M, milieux respectifs des petits arcs AC et BC. D'après le théorème du pôle Sud, P, I et L ainsi que P, J et M sont alignés.

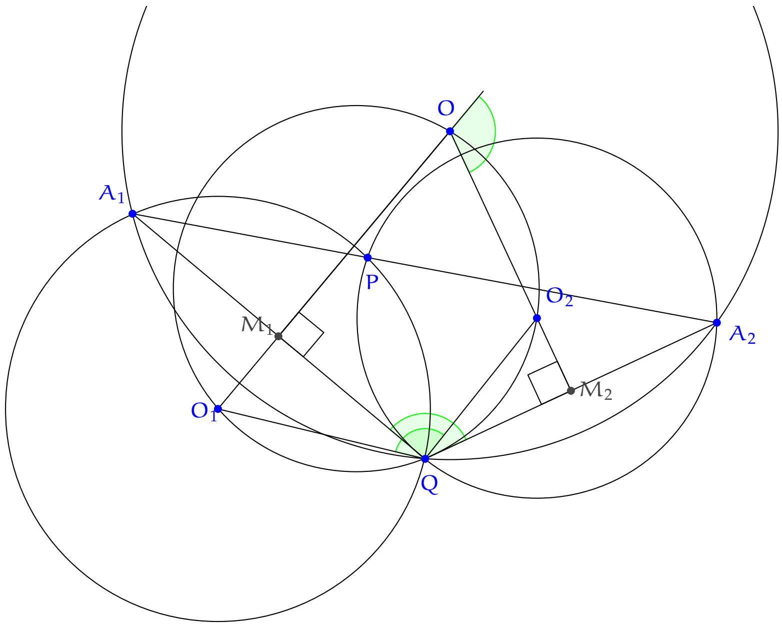
D'après le théorème 12, Q est le centre de la similitude S envoyant I sur J et L sur M. (Comme toujours se pose la question de quelle similitude choisir : pourquoi pas celle envoyant I sur L et J sur M ? Et comme souvent la réponse sera qu'on connaît mieux la première similitude parce que l'on maîtrise bien les longueurs impliquées.) Cette similitude envoyant le point fixe L sur le point fixe M, pour prouver qu'elle est fixe (et donc Q également), il suffit de montrer que son angle de rotation et son rapport de dilatation sont fixes (un petit dessin convaincra le lecteur sceptique...). Or, l'angle vaut $\widehat{LQM}$ qui est fixe d'après le théorème de l'angle inscrit et le rapport de dilatation vaut JM/IL qui vaut CM/CL d'après le théorème du pôle Sud, d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 4



On voit qu'on est naturellement dans une situation du type théorème de Miquel dans le quadrilatère $A_1B_1A_2B_2$. En particulier, le cercle circonscrit à CA_1A_2 passe par Q.

Cette remarque est positive pour de nombreuses raisons : on se rend compte que les points B_1 et B_2 sont inutiles (O peut être défini comme le centre du cercle circonscrit à A_1QA_2), ce qui permet de simplifier la figure et de perdre un degré de liberté.



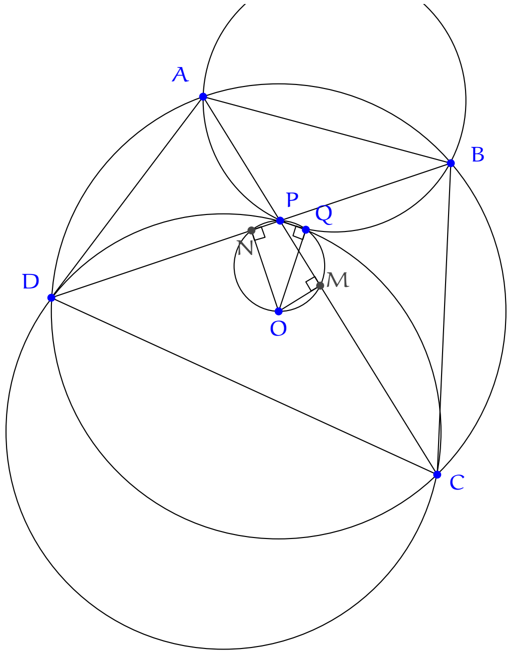
La question naturelle est maintenant : quel va être ce cercle que parcourra O ? Le plus simple est de considérer les cas limites : quand A_1 tend vers Q, A_2 et donc O également. Quand A_1 tend vers P, A_2 tend vers un point de Γ_2 et O devient donc le centre O_2 du cercle Γ_2. De même, quand A_2 tend vers P, O tend vers le centre O_1 de Γ_1.

On cherche donc à montrer que O, O_1, O_2 et Q sont cocycliques. Il faut naturellement travailler avec des angles orientés, mais on se passera (exercice...).

Notons M_1 et M_2 les milieux respectifs de $[A_1Q]$ et $[A_2Q]$. En utilisant les angles droits dus aux médiatrices, M_1, O, M_2 et Q sont cocycliques, d'où $\widehat{O_1OO_2} = 180° - \widehat{A_1QA_2}$.

Or, la similitude de centre Q qui envoie A_1 sur A_2 envoie O_1 sur O_2 (d'après par exemple le théorème 12 appliqué à $(A_1, B_1) \mapsto (A_2, B_2)$). D'où $\widehat{A_1QA_2} = \widehat{O_1QO_2}$, ce dont on déduit $\widehat{O_1OO_2} = 180° - \widehat{O_1QO_2}$, et la conclusion par le théorème de l'angle inscrit.

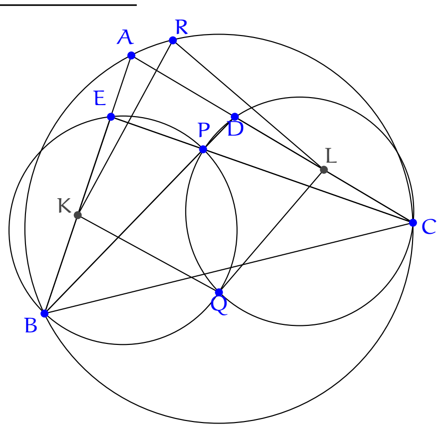
<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Il est naturel pour obtenir des angles droits de considérer les milieux M et N de [AC] et [BD].



On considère la similitude de centre Q qui envoie A sur B et C sur D. Elle envoie le segment $[AC]$ sur le segment $[BD]$ et en particulier M sur N. En utilisant le théorème 12 avec les couples $(A, M) \mapsto (B, N)$, M, N, P et Q sont cocycliques. Or, en utilisant l'angle droit des médiatrices, il et clair que M, N, P et O sont cocycliques.

D'où finalement M, N, P Q et O cocycliques et $\widehat{OQP} = 90^\circ$ par le théorème de l'angle inscrit.

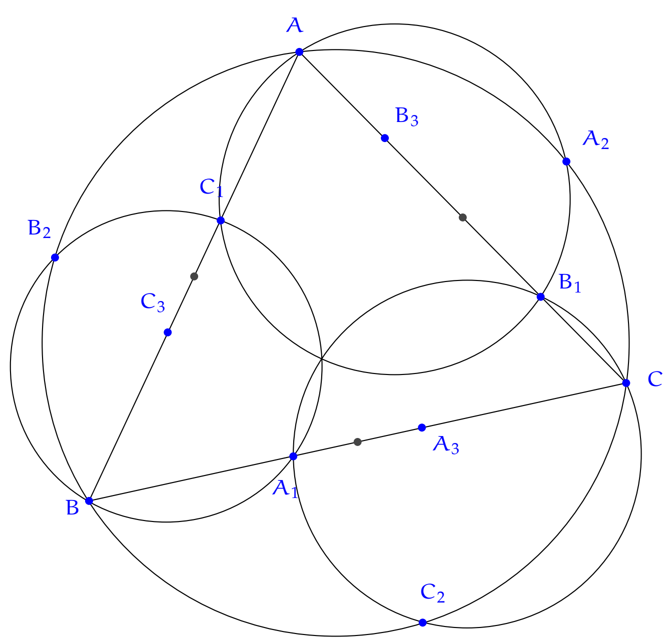
Solution de l'exercice 6



a) Q est le centre de la similitude ρ envoyant B sur D et E sur C. Comme $BE = CD$, son facteur de dilatation est 1 i.e. c'est une rotation. En particulier, en appelant Q_1 et Q_2 les projections de Q sur (AB) et (CD), comme ρ envoie Q_1 sur Q_2, $QQ_1 = QQ_2$, i.e. Q est sur la bissectrice (le lecteur attentif remarquera qu'il faut vérifier que c'est bien la bissectrice intérieure, ce qui se fait facilement par un argument de continuité en regardant le cas extrémal).

b) On remarque dans un premier temps que ρ envoie K sur L. En particulier, $QK = QL$, d'où également $RK = RL$. De plus, l'angle de la rotation est $\widehat{KQL}$ mais est également, la droite (EB) étant envoyé sur la droite (CD), l'angle entre les droites (BA) et (CA). En particulier, A, K, Q et L sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit. Comme il est également clair que K, Q, L et R sont cocycliques, K, Q, L, A et R sont cocycliques.
Le but de l'exercice est donc de montrer que R est le centre de la similitude envoyant K sur L et B sur C. Soit R' le centre de cette similitude. R' comme R est sur le cercle circonscrit à KQL. De plus, comme $KB = LC$, cette similitude est une rotation, d'où, comme pour R, $R'K = R'L$. Ainsi, R et R' font partie des deux points d'intersection de la médiatrice de $[KL]$ et du cercle circonscrit à KAL et un argument fumeux de positionnement (le lecteur pointilleux remarquera que c'est formalisable sans trop de difficulté) montre que c'est en fait les mêmes. D'où la conclusion.

Solution de l'exercice 7



On a visiblement de nombreuses similitudes naturelles dans cette figure et qui dit similitudes dit triangles semblables. Après étude de quelques figures, il semble que l'on puisse montrer que $C_2AB \sim CB_3A_3$.

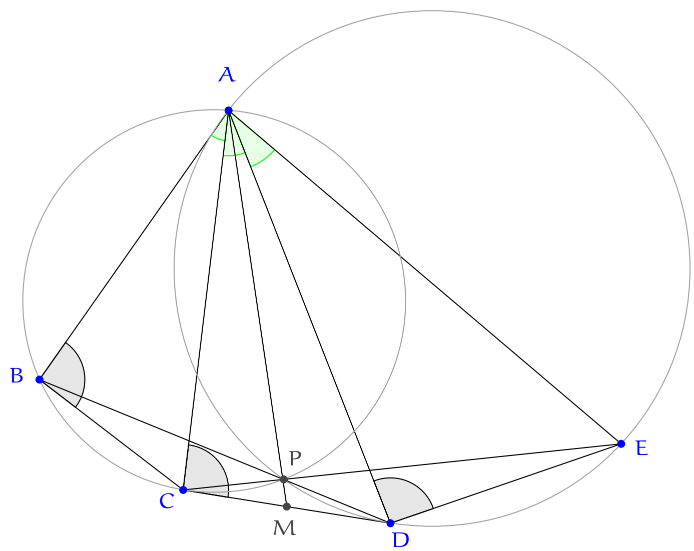
Effectivement, $\widehat{AC_2B} = \widehat{B_3CA_3}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. Comme A_3 et B_3 sont plutôt défini en termes de longueur, on cherche également à démontrer que $CB_3/CA_3 = C_2A/C_2B$. Or, le rapport de dilatation de la similitude de centre C_2 envoyant B sur A et A_1 sur B_1 vaut selon la manière de le calculer C_2A/C_2B ou AB_1/BA_1 qui vaut exactement CB_3/CA_3. On a donc bien $C_2AB \sim CB_3A_3$. Cycliquement, on sait que $A_2BC \sim AC_3B_3$ et $B_2CA \sim BA_3C_3$.

On connaît maintenant très bien tous les angles. Philosophiquement, on sait donc qu'il suffit de faire une chasse aux angles. Effectivement :

$$\begin{aligned} B_2\widehat{A_2}C_2 &= B_2\widehat{A}C_2 = B\widehat{A}C_2 + B_2\widehat{A}C - B\widehat{A}C \\ &= A_3\widehat{B_3}C + B\widehat{C_3}A_3 - B\widehat{A}C = B_3\widehat{A_3}C_3. \end{aligned}$$

D'où la conclusion en raisonnant cycliquement.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

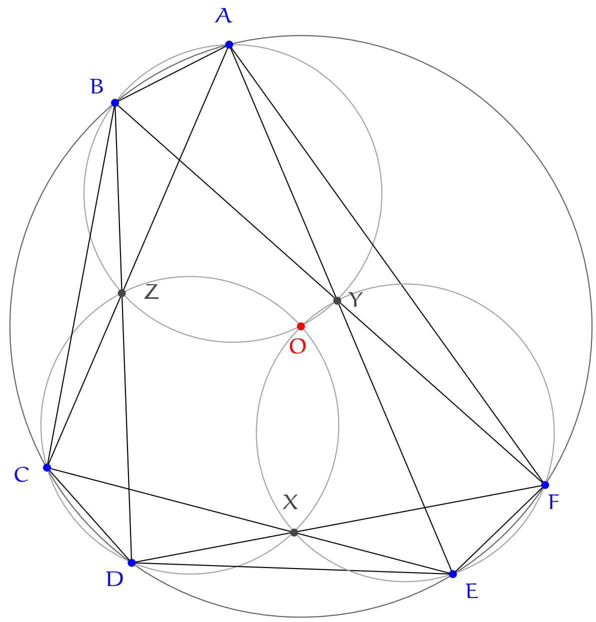


On se rend immédiatement compte qu'il existe une similitude de centre A qui envoie B sur C, C sur D puis D sur E.

Donc, d'après le théorème 12 appliqué au couple de point $(B, D) \mapsto (C, E)$, A est sur le cercle circonscrit Γ_1 à PBC et Γ_2 à PDE. Ici, l'exercice commence à avoir bien la tête d'un exercice d'Igor, on essaye donc de montrer que Γ_1 est tangent à (CD). Or c'est vrai d'après la récriproque du théorème de l'angle inscrit comme $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$. De même, comme $\widehat{DEA} = 180° - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 180° - \widehat{CAD} - \widehat{ACD} = \widehat{CDA}$, Γ_2 est également tangent à (CD).

Finalement, en notant $M = (AP) \cap (CD)$, M est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 et on peut donc écrire $MC^2 = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M) = MD^2$ et la conclusion.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



On a clairement une rotation (donc une similitude) de centre le centre du cercle O qui envoie A sur B, C sur D et E sur F.

En utilisant le théorème 12 sur le couple $(A, C) \mapsto (B, D)$, A, B, Z et O sont cocycliques. Or, de même, en l'utilisant sur le couple $(A, E) \mapsto (B, F)$, A, B, Y et O sont cocycliques.

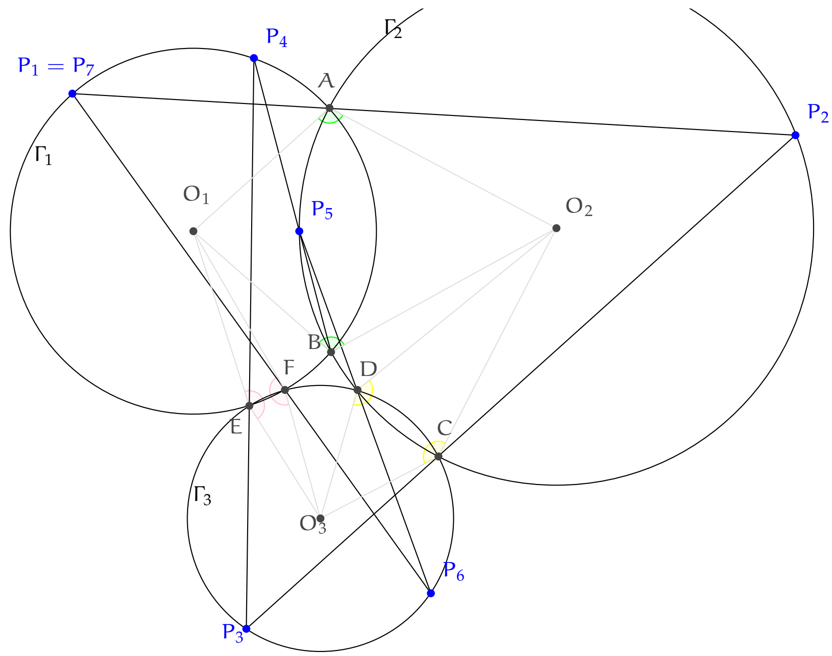
Ainsi, A, B, Z, O, Y sont cocycliques, et de la même manière également C, Z, O, X, D et E, X, O, Y, F.

Encore une fois, philosophiquement parlant, avec tant de cercles on connaît tous les angles, donc une simple chasse aux angles devrait suffire pour terminer. Effectivement :

$$\begin{aligned}
\widehat{ZXY} &= \widehat{ZXO} + \widehat{OXY} \\
&= \widehat{ODZ} + \widehat{OFY} \\
&= \widehat{ODB} + \widehat{OFB} \\
&= \widehat{OBD} + \widehat{OBF} \\
&= \widehat{DBF}.
\end{aligned}$$

On conclut cycliquement.

Solution de l'exercice 10



On considère ϕ_B la similitude de centre B qui envoie P_1 sur P_2 et Γ_1 sur Γ_2. De même, on considère ϕ_D la similitude de centre D qui envoie P_2 sur P_3 et Γ_2 sur Γ_3. on définit de manière similaire ϕ_F, ϕ_A, ϕ_C et ϕ_E.

On note $\Phi = \phi_E \circ \phi_C \circ \phi_1 \circ \phi_F \circ \phi_D \circ \phi_B$. On a alors $P_7 = \Phi(P_1)$. Or, l'angle de rotation de Φ vaut $(BO_1, BO_2) + (DO_2, DO_3) + (FO_3, FO_1) + (AO_1, AO_2) + (CO_2, CO_3) + (EO_3, EO_1) = 0$ en éliminant les termes correspondants (voir figure). De même, le facteur de dilatation de Φ vaut $r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 \cdot r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 = 1$.

Φ est donc l'identité, d'où la conclusion.