DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Cachan 2010 (junior)

Algèbre de base

Exercice 1 Soient a et b deux nombres positifs tels que $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}=1$. Montrer que $\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=a-b$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Simplifions l'hypothèse en faisant tout passer dans le membre de gauche et en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a(1+b)}{(1+a)(1+b)}+\frac{b(1+a)}{(1+a)(1+b)}-\frac{(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)}=\frac{ab-1}{(1+a)(1+b)}=0$$

donc $ab=1$. Dans la seconde expression, en multipliant numérateur et dénominateur par le même a, $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a^2}{a+ab^2}=\frac{a^2}{a+b}$ car $ab=1$, donc $ab^2=b$. Pour la même raison, $\frac{b}{1+a^2}=\frac{b^2}{b+a}$. D'où : $\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

Rappel des identités remarquables

Pour tous a, b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\ a^2-b^2&=(a-b)(a+b)\\ (a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

ce qui se généralise...

Factorisation de Sophie Germain

Exercice 2 Pour n entier au moins égal à 2, n^4+4 n'est jamais un nombre premier.

Solution de l'exercice 2 En effet, $n^4+4 = \left(n^2+2\right)^2-(2n)^2 = \left(n^2-2n+1\right)(n2+2n+1)$. Or chacun des facteurs est un entier strictement supérieur à 1, si $n > 1$, car $n^2-2n+2 = (n-1)^2+1$.

Exercice 3 Soient u et v deux réels. On pose $s = u+v$, $p = uv$. Calculer u^3+v^3 en fonction de s et p.

Solution de l'exercice 3 On a

$$s^3 = (u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 = u^3+v^3+3uv(u+v) = u^3+v^3+3sp$$

donc $u^3+v^3 = s^3-3sp$.

Formule de Cardan

Cette méthode de résolution de l'équation du troisième degré, découverte au XVIième siècle, a joué un rôle important dans l'histoire des mathématiques. Nous nous limiterons à un exemple numérique.

On cherche pour quelle valeur de x on a $x^3+3x+6=0$. Pour cela, on utilise l'exercice précédent en recherchant deux nombres u et v tels que $uv=-1$ et tels que $x=u+v$ soit solution de cette équation. On a $x^3 = (u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v) = u^3+v^3-3x$ car par hypothèse $uv=-1$. Donc $x^3+3x+6 = u^3+v^3+6 = u^3+\left(\frac{-1}{u}\right)^3+6$, soit en multipliant par u^3 :

$$\left(u^3\right)^2+6u^3-1=0.$$

Donc u^3 est solution d'une équation du second degré, et on sait résoudre les équations du second degré :

$$\left(u^3+3\right)^2-10=0$$

donc $u^3=-3+\sqrt{10}$ ou $u^3=-3-\sqrt{10}$.

Mais pour tout réel y, il existe un réel z tel que $z^3=y$, et on le note : $z=\sqrt[3]{y}$. En outre, comme $\left(-3+\sqrt{10}\right)\left(-3-\sqrt{10}\right)=-1$ si $u^3=-3+\sqrt{10}$, alors $v^3=-3-\sqrt{10}$ et inversement (car par hypothèse $uv=-1$). En définitive, cette méthode donne une solution de l'équation

$$x=u+v=\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{10}}$$

et on peut vérifier numériquement que ce nombre est bien la seule solution réelle de l'équation. Le problème que cela posait, c'est que pour certaines équations du troisième degré, notamment celles qui admettent trois racines, l'équation intermédiaire du second degré n'admet pas de racines réelles, et l'idée vint à Cardan de dire qu'elle avait quand même des racines, mais « imaginaires », et qu'en passant par ces racines imaginaires on pouvait trouver les racines réelles de l'équation de départ. C'est donc à partir de là que l'on a créé les nombres complexes, mais il a fallu plus de deux siècles pour les définir de manière satisfaisante.

Exercice 4 Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a) = a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) = ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-b)$.

Solution de l'exercice 4 Il suffit de développer : $(a-b)(b-c)(c-a) = \left(ab-ac-b^2+bc\right)(c-a) = abc-a^2b-ac^2+a^2c+bc^2-bca$. Les termes en abc s'annulent et en regroupant les autres deux par deux de trois manières différentes, on obtient les trois égalités demandées.

Exercice 5 Pour quelle valeur de k a-t-on l'identité (vraie quels que soient a, b, c) :

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca)+kabc\ ?$$

Solution de l'exercice 5 Il suffit de développer chacun des deux membres. Tous les termes sont identiques sauf les termes en abc qui apparaissent deux fois à gauche et $3+k$ fois à droite. Donc $k=-1$. On remarquera que pour $a=b=c=1$, on obtient : $8 = 9+k$, donc la seule valeur possible de k est -1, mais cela ne dispense pas de faire le calcul pour prouver l'identité lorsque $k=-1$.

Exercice 6 a) Montrer que si $a^2+b^2 = a+b = 1$, alors $ab = 0$. b) Montrer que si $a^3+b^3+c^3 = a^2+b^2+c^2 = a+b+c = 1$, alors $abc = 0$.

Solution de l'exercice 6 Le a) résulte immédiatement de $(a+b)^2 = \left(a^2+b^2\right)+2ab$. Pour le b), l'identité ci-dessus se généralise : $(a+b+c)^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ca)$, d'où $ab+bc+ca = 0$. Or un calcul analogue donne $\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) = \left(a^3+b^3+c^3\right)+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc$. Si $a^3+b^3+c^3 = a^2+b^2+c^2 = a+b+c = 1$, comme $ab+bc+ca = 0$, on doit avoir également $abc = 0$.