DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2012

Polynômes

Exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - x \in \mathbb{Z}$ et il existe un entier positif $n \geqslant 3$ tel que $x^n - x \in \mathbb{Z}$. Montrer que x est entier.

Solution de l'exercice 1 On note $a = x^2 - x$. Si $a = 0$, $x = 0$ ou $x = 1$. Si, $a \leqslant -1$, l'équation $x^2 - x$ n'a pas de racines réelles, donc $a \geqslant 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geqslant 3$, in existe deux entiers positifs A_ℓ et B_ℓ tels $A_\ell \geqslant 2$ et

$$x^\ell = A_\ell x + B_\ell.$$

Pour $\ell = 3$ on a $x^3 = (a+1)x + a$. Supposons le résultat vrai pour ℓ. Ainsi $x^\ell = A_\ell x + B_\ell$. D'où $x^{\ell+1} = (A_\ell + B_\ell)x + aA_\ell$. $A_{\ell+1} := A_\ell + B_\ell$ et $B_{\ell+1} = aA_\ell$ conviennent. Cela finit la récurrence.

Ainsi, pour $\ell = n$, on a $x^n = A_n x + B_n$. D'autre par, d'après l'énoncé, $x^n = x + b$ pour un b entier. Donc $x = \frac{b - B_n}{A_n - 1}$. On peut diviser car $A_n \geqslant 2$. Ainsi $x \in \mathbb{Q}$.

Comme x vérifie $x^2 - x - a$ qui est à coefficients entiers, le dénominateur de x divise le coefficient de tête. Ainsi x est entier.

Exercice 2 Trouver x tel que $x = (1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} + (1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$.

Solution de l'exercice 2 On préfère toujours avoir une équation du type $P(x) = 0$ avec P polynôme. Pour se ramener à une telle forme, on a des calculs plus simples en posant $a = x - \frac{1}{x}$. On a $x = (a - 1 + a)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$. Tout calcul fait, on a $x^2 - 2x\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 = 0$. Un polynôme de ce type "demande" toujours l'astuce $y = x - \frac{1}{x}$. On trouve $y^2 + 1 - 2y = 0$. La seule solution est $y = 1$. Ainsi $x^2 - 2xy + 1 = 0$ donne $x^2 - x - 1 = 0$, avec racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3 Soit n un entier, $n > 1$. On note $d_1, \ldots, d_k$ les diviseurs positifs de n avec $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. On pose $D = d_1 d_2 + \ldots + d_{k-1} d_k$. Montrer que $D < n^2$. Trouver tous les entiers n pour lequels D est un diviseur de n^2.

Solution de l'exercice 3 On a $d_i d_{i+1} = \frac{n^2}{d_{n-i}d_{n-i-1}}$ pour tout $i \in [1, n-1]$. Donc

$$\begin{aligned} D &= n^2(\frac{1}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k d_{k-1}}) \\ &\leqslant n^2(\frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{k}{k-1}) \\ &= n^2\left((1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})\right) \\ &< n^2. \end{aligned}$$

Les nombres $n = p$ avec p premier conviennent car $D = p \mid p^2$. Si n n'est pas premier, $k \geqslant 3$. On note p le plus petit facteur premier de n. Ainsi $D \geqslant n^2(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3}) > n^2(\frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{p})$. Comme $D \mid nr$, $\frac{n^2}{D}$ divise n^2. Or $\frac{n^2}{D} < p$. Ainsi, $D = n^2$, impossible. Donc $D \mid n^2$ si et seulement si n est premier.

Exercice 4 Montrer que les seules polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ bornés sont ceux de degré 0.

Solution de l'exercice 4 Soit n le degré de P. On note B un nombre naturel tel que $|P(x)| \leqslant B$. Alors, $P(1), P(2), \ldots, P(n\cdot(2B+1))$ sont tous dans l'ensemble {-B,...,B-1,B} qui a $2B+1$ éléments. Par le principe du tiroir on a $n+1$ valeurs égales, disons à c. Alors $P(X) - c$ a $n+1$ racines, donc il est nul.

Proposition 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Alors il existe un polynôme μ_α unitaire (c-à-d de coefficient dominant 1) qui divise tout autre polynôme annulé par α. De plus, μ_α est irréductible et il est unique avec sa propriété.

Démonstration. Soit μ un polynôme annulé par α, unitaire et de degré minimal. Supposons par l'absurde qu'il existe $Q \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme annulé par α, non divisible par μ. On divide avec retenu Q par μ : $Q(X) = q(X)\mu + r(X)$, avec $\deg(r) < \deg(\mu)$. Comme Q et μ sont annulés par α, r l'est également. Or, $\deg(r) < \deg(\mu)$ et μ a été choisi de degré minimal. Donc $r = 0$, ce qui est absurde.

Si μ_α était réductible, disons $\mu_{alpha} = P_1P_2$ alors μ ne serait pas de degré minimal. Si on a deux valeurs μ et ν qui divise tous les autre polynômes annulateurs, alors $\mu \mid \nu$ et $\nu \mid \mu$, donc $\mu = k\nu$ pour une constante k. Comme μ_{alpha} est unitaire, il est unique. □

Exercice 5 Montrer que pour tout $n > 1$ naturel le polynôme $P_n = (x^{4n+3} + x^{4n+1} + x^{4n-2} + x^8$ est divisible par x^2+1.

Solution de l'exercice 5 On applique la proposition précédente au nombre i. Le polynôme x^2+1 est annulé par i. x^2+1 n'a pas de racine réelles, donc il n'a pas de racines rationnelles non plus. Ainsi x^2+1 est irréductible. Comme $\mu_i \mid x^2+1$, $\mu_i = x^2+1$. Comme $i^4 =$ on a $P_n(i) = i^3 + i^1 + i^2 + i^4 = -i + i - 1 + 1 = 0$. Comme P_n est annulé par i, il est divisible par $\mu_i = x^2+1$.

Exercice 6 On se donne $2n$ réels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. On ramplit une table $n \times n$ en mettant $a_i + b_j$ dans la case (i,j). On suppose qu'il existe une constante c telle que le produit de chaque ligne est c. Montrer qu'il existe une constante d telle que le produit de chaque colonne soit d.

Solution de l'exercice 6 On pose $P(x) - \prod_{j=1}^{n}(x+b_j) - c$. D'après l'hypothèse $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de P. Comme P est unitaire, $P = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$. Soit j un indice de colonne. Le produit de $\prod_{i=1}^{n}(b_j + a_i)$ vaut $(-1)^n P(-b_j) = -c$. Comme c ne dépend pas de j, les produits des colonnes sont tous égaux.

Exercice 7 Soit p un nombre premier et $k \leqslant n$ deux nombre naturels. On considère les décompositions de n et k en base p :

$$n = n_d p^d + \cdots + n_1 p + n_0$$
$$k - k_d p^d + \cdots + k_1 + k_0.$$

k_d peut ?tre 0. Montrer que $\binom{n}{k} \equiv \binom{n_d}{k_d} \cdots \binom{n_0}{k_0} \mod p$.

Solution de l'exercice 7 On calcule de deux facons différentes le coefficient de x^k dans $(1+x)^n$. D'une part il est trivialement $\binom{n}{k}$. Or, on a $(1+x)^n = (1+x)^{p^d n_d} \cdots (1+x)^{p n_1}(1+x)_0^n$. Comme , $\binom{p^r}{k} \equiv 0 \mod p$ pour tout $r \geqslant 1$ et tout $k \in \{2, p^r - 1\}$, $(1+x)^{p^r n_r} - (1+x^p)^{n_r} \in p\mathbb{Z}[x]$. Le coefficient de x^k dans ce dernier polynôme est $\binom{n_d}{k_d} \cdots \binom{n_0}{k_0}$.

Exercice 8 Trouver tous les polynômes autre que les polynômes constants, à coefficients dans $\mathbb{R}$ et tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z^2) = P(z)P(z-1).$$

Solution de l'exercice 8 Supposons par l'absurde que P n'est pas constant. Si z_0 est une racine, alors $z_0^2, z_0^4, \ldots$ sont aussi des racines. Si on a des racines $|z_0| < 1$ ou $|z_0| > 1$ alors P aurait une infinité de racines. Donc toute les racines sont de module 1.

L'équation s'écrit également $P((x+1)^2) = P(x+1)P(x)$. Donc si z_0 est une racine , alors $(z+1)^2$ est une racine aussi. Comme toute racine est de module

1, on a $|z_O + 1| = 1$. Pour chercher les nombres complexes qui vérifient $|z| = |z+1| = 1$ on pose $z = a + ib$. On trouve $a^2 + b^2 = 1 = a^2 + b^2 + 2a + 1$. Alors $a = \frac{-1}{2}$ et $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $P(x) = (x - \epsilon)^a (x - \frac{1}{\epsilon})^b$ pour $\epsilon = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $P \in \mathbb{R}[x]$, $a = b$, donc $P = (x^2 + x + 1)^a$. Réciproquement tout polynôme de ce type convient.

Exercice 9 Factoriser de tête 8051.

Solution de l'exercice 9 Si on trouve $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $8051 = P(a) - P(b)$ on aurait le facteur $a - b$. Pour $P = x^2$ on a $8051 = 90^2 - 7^2$. Donc $8051 = 97 \cdot 83$, tous les deux premiers.