DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Cécile GACHET
STAGE : Montpellier 2014

Chasse aux angles, triangles semblables

Chasse aux angles et angles orientés.

Comme on peut le remarquer à force d'exercices, l'inconvénient majeur de la chasse aux angles classique est qu'elle nécessite de faire bien attention aux positions relatives des points (à l'ordre dans lequel ils sont alignés, par exemple), pour ne pas confondre des angles de mesure φ avec des angles de mesure $180° - \varphi$...

On préférera donc souvent alléger la rédaction d'une chasse aux angles au moyen d'angles orientés entre des droites. Bien entendu, tout raisonnement sur des angles orientés peut « se traduire »en une chasse aux angles classique, et réciproquement. Tous deux sont alors valides.

L'angle orienté entre deux droites est une notion qui généralise l'angle géométrique (avec un chapeau). L'angle orienté entre d_1 et d_2 se note (d_1, d_2) et correspond à la mesure de l'angle dont il faut tourner la droite d_1 pour la rendre parallèle (éventuellement confondue) à la droite d_2, à $180°$ près et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

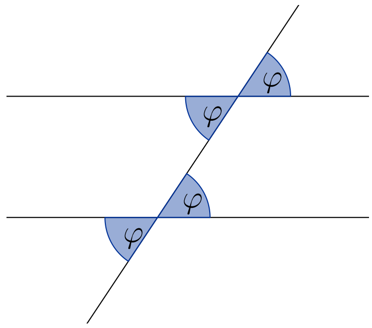
Il faut connaître quelques règles de calculs sur ces angles : tout d'abord, la convention suivante : si le sens inverse des aiguilles d'une montre est « positif »(c'est ce qu'on a dit au paragraphe précédent), le sens des aiguilles d'une montre est, quant à lui, négatif. Autrement dit, pour toutes droites d_1, d_2, on a : $(d_1, d_2) = -(d_2, d_1)$.

Il faut aussi mentionner une propriété très importante, bien qu'assez intuitive : la relation de Chasles : pour toutes droites d, d_1, d_2, on a $(d_1, d_2) = (d_1, d) + (d, d_2)$. Cela nous permet de composer/décomposer des angles comme bon nous semble, ce qui est très utile !

Enfin, il faut rappeler les propriétés usuelles de chasse aux angles (angles correspondants, angles alternes-internes, angles inscrits, angles au centre), traduites en termes d'angles orientés.

Proposition 1 *Soient trois droites d_1, d_2 et Δ. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles (éventuellement confondues) si et seulement si* $(d_1, \Delta) =$

(d_2, Δ).



Démonstration. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement si $(d_1, d_2) = 0°$. D'après la relation de Chasles, on a donc, pour toute droite Δ, $(d_1, \Delta) + (\Delta, d_2) = 0°$, d'où $(d_1, \Delta) = -(\Delta, d_2) = (d_2, \Delta)$. □

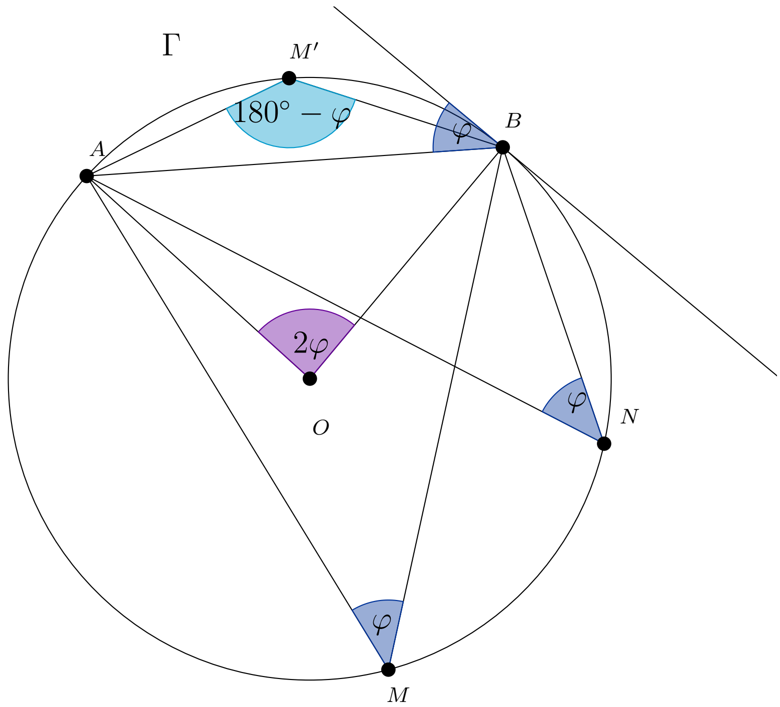
Proposition.

Soient quatre points A, B, M, N. Ces points sont cocycliques sur un cercle de centre O si et seulement si $(MA, MB) = (NA, NB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$. Autrement dit :

- si M et N sont du même côté de la droite AB, A, B, M, N sont cocycliques si et seulement si $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$,
- si M et N sont de part et d'autre de la droite AB, A, B, M, N sont cocycliques si et seulement si $\widehat{AMB} = 180° - \widehat{ANB}$.

Remarque.

Cette proposition est toujours valable dans le cas limite : pour $N = B$ par exemple, on a $(MA, MB) = (BA, BB)$, où BB correspond à la tangente au cercle circonscrit à ABM en B.



Exercice 1

Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles ayant deux points d'intersection A et B. Soient d_A une droite passant par A et d_B une droite passant par B. On note C et E les points d'intersection de d_A avec Γ_1 et Γ_2 respectivement, et on définit de même D et F comme les points d'intersection de d_B avec Γ_1 et Γ_2 respectivement.

Montrer que les droites CD et EF sont parallèles.

Exercice 2

Théorème de Miquel. Soit ABC un triangle, P un point de BC, Q un point de CA, R un point de AB. Les cercles circonscrits à AQR et à BRP ont pour second oint d'intersection X. Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CPQ.

Exercice 3

Soit Γ un cercle et BC une corde de ce cercle. Soit A le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. On considère deux cordes de Γ passant par A, notons-les AD et AE, et F et G les points d'intersection respectifs de ces cordes avec BC.

Montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice 4

Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Soit d une droite coupant Γ_1 en A et C et Γ_2 en B et D, les points étant disposés dans l'ordre A, B, C, D sur la droite.

Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 5

Soit A, B, C, D quatre points sur un cercle Γ. On note A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et de C sur BD, et B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et de D sur AC.

Montrer que les points A', B', C', D' sont cocycliques.

Triangles semblables.

Les quatre conditions suivantes sont deux à deux équivalentes :

- les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables (ce qui est noté $ABC \sim A'B'C'$),
- $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, et $\widehat{C} = \widehat{C'}$,
- $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ et $\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$,
- $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Remarque 2 *Attention, les longueurs dont on prend les rapports dans la troisième condition doivent être celles des segments adjacents aux angles égaux choisis.*

Exercice 6

Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe, tel que $AB \parallel DE$, $BC \parallel FA$ et $CD \parallel FA$. On suppose en outre que $AB = DE$.

Montrer que $BC = DE$ et $CD = FA$.

Pêle-mêle : chasse aux angles et géométrie du triangle.

Exercice 7

Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 8

Soient ABC un triangle, H son orthocentre, A' le pied de la hauteur issue de A, B' le pied de la hauteur issue de B, et C' le pied de la hauteur issue de C.

Montrer que $HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$.

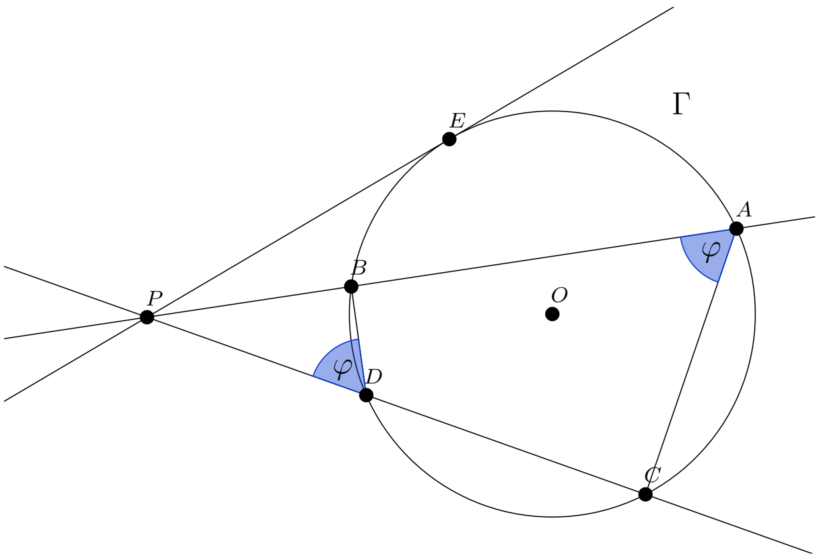
Exercice 9

Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre. Dans ce triangle, on note D le pied de la hauteur issue de A et E le pied de la hauteur issue de C.

Montrer que O est sur la bissectrice intérieure commune aux angles $\widehat{DHC}$ et $\widehat{AHE}$.

Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Soient un cercle Γ de centre O et de rayon r et un point P. On considère trois droites passant par P et coupant le cercle Γ : la première le coupe en A et B, la deuxième en C et D, et la troisième est une tangente au cercle, qu'elle ne coupe donc qu'en un point, E.



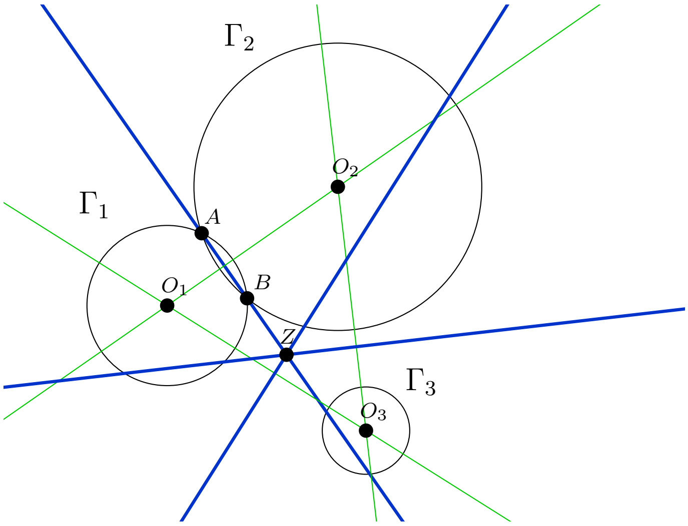
On a alors : $PA \times PB = PC \times PD = PE^2 = PO^2 - r^2$.

Démonstration. Par chasse aux angles, on marque les angles φ et on constate que les triangles PAC et PDB sont semblables. Ainsi, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, d'où le résultat. Cet argument marche aussi pour le cas de la tangente. Enfin, lorsqu'on considère la droite PO, on a toujours la même égalité pour $(PO - r)(PO + r)$, ce qui conclut. □

Cette quantité ne dépend donc pas de la droite passant par P avec laquelle on intersecte Γ. Il s'agit de la puissance du point P par rapport au cercle Γ, notée $\mathcal{P}_\Gamma(P)$.

Lorsqu'on a deux cercles Γ_1, de centre O_1, et Γ_2, de centre O_2, le lieu des points ayant la même puissance par rapport au deux cercles est une droite, perpendiculaire à O_1O_2. Si les cercles Γ_1 et Γ_2 ont deux points d'intersection A et B, alors leur axe radical est la droite AB.

Lorsqu'on se donne trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3, les trois axes radicaux obtenus (celui de Γ_1 avec Γ_2, celui de Γ_2 avec Γ_3 et celui de Γ_3 avec Γ_1) sont soit concourants, soit parallèles (éventuellement confondus). Les axes radicaux sont parallèles si et seulement si les centres des trois cercles sont alignés.



Les droites bleues, perpendiculaires au droites vertes, sont nos trois axes radicaux. Leur point de concours est Z.

Démonstration. Supposons que les axes radicaux de Γ_1 avec Γ_2 et de Γ_2 avec Γ_3 ne sont pas parallèles. Soit alors P leur point d'intersection. On a $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(P)$ et $\mathcal{P}_{\Gamma_2}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_3}(P)$, d'où $\mathcal{P}_{\Gamma_3}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(P)$. Donc P est, par définition sur le troisième axe radical.

Supposons maintenant que les axes radicaux de Γ_1 avec Γ_2 et de Γ_2 avec Γ_3 sont parallèles. On a alors $O_1O_2 \mathbin{/\!/} O_2O_3$ (si deux droites sont parallèles entre elles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, et deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles), donc les points O_1, O_2, O_3 sont alignés. Dès lors, l'axe radical de Γ_3 avec Γ_1 est aussi perpendiculaire à la droite des trois centres, donc parallèle aux deux autres. $\square$

Exercice 10

Soient deux cercles Γ_1 et Γ_2 s'intersectant en deux points C et D. On considère une tangente commune à ces deux cercles, son point A de tangence à Γ_1 et son point B de tangence à Γ_2.

Montrer que CD coupe AB en son milieu.

Exercice 11

Soient quatre points cocycliques A, B, C, D.

Quel est le lieu des points M tels que le cercle circonscrit à MAB et le cercle circonscrit à MCD soient tangents ?

Exercice 12

Soient ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point quelconque à l'intérieur du segment AB et N un point quelconque à l'intérieur du segment AC. On nomme P et Q les deux points d'intersection des cercles de diamètre BN et de diamètre CM.

Montrer que les points P, Q, H sont alignés.

Solutions des exercices.

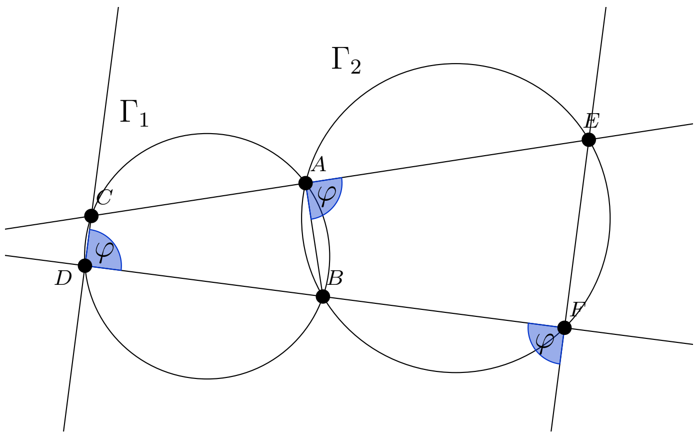
Solution de l'exercice 1

On peut rédiger une chasse aux angles de la manière usuelle.

Posons $\varphi := \widehat{CDB}$. Comme les points A, B, C, D sont cocycliques, on obtient que $\widehat{BAC} = 180° - \varphi$. De plus, les points C, A, E sont alignés dans cet ordre. Donc $\widehat{BAE} = \varphi$.

En outre, les points A, B, F, E sont cocycliques. Donc $\widehat{BFE} = 180° - \varphi$.

Donc les droites CD et EF sont parallèles.



Autre solution :

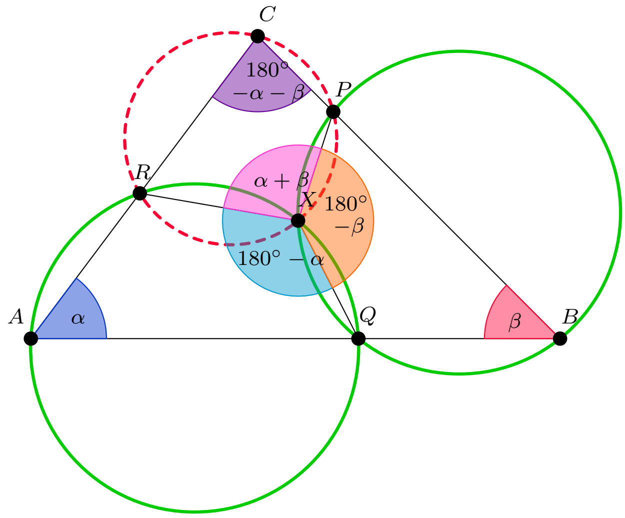
Pour monter que les droites CD et EF sont parallèles, il faut et il suffit en fait de montrer que $(CD, EF) = 0°$. Or :

$$\begin{aligned}
(CD, EF) &= (CD, DF) + (DF, EF), \text{ d'après la relation de Chasles,} \\
&= (CD, DB) + (BF, EF), \text{ car les points } D, B, F \text{ sont alignés,} \\
&= (CA, AB) + (BF, EF), \text{ car les points } A, B, C, D \text{ sont cocycliques,} \\
&= (CA, AB) + (BA, EA), \text{ car les points } A, B, E, F \text{ sont cocycliques,} \\
&= (CA, EA), \text{ d'après la relation de Chasles,} \\
&= 0°, \text{car les points } A, C, E \text{ sont alignés.}
\end{aligned}$$

Donc les droites CD et EF sont parallèles.

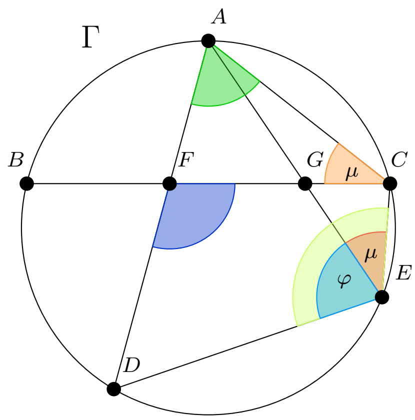
<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

On pose $\alpha := \widehat{BAC}$ et $\beta := \widehat{CBA}$. Comme les points A, Q, R, X sont cocycliques, on a $\widehat{QXR} = 180° - \alpha$. De même, on a aussi $\widehat{PXQ} = 180° - \beta$. On en déduit que $\widehat{RXP} = \alpha + \beta = 180° - \widehat{PXC}$, car $\widehat{PXC} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{CBA} = 180° - \alpha - \beta$. Donc les points C, P, R, X sont également cocycliques.



<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Comme on le voit bien sur la figure ci-dessous, on peut poser $\varphi := \widehat{DEA}$ et $\mu := \widehat{CEA}$ puis rédiger une chasse aux angles usuelle. L'ordre dans lequel il faut donner est le même que pour la preuve utilisant des angles orientés ; pour plus de clarté, nous présenterons donc cette dernière.



L'angle bleu foncé est de mesure $180° - \varphi$, et l'angle vert est de mesure $180° - \mu - \varphi$.

Pour montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques, il suffit de montrer que $(ED, EG) = (FD, FG)$. Or :

$$
\begin{aligned}
(ED, EG) &= (ED, EA), \text{ car les points } E, A, G \text{ sont alignés,}\\
&= (ED, EC) + (EC, EA), \text{ d'après la relation de Chasles,}\\
&= (AD, AC) + (EC, EA), \text{ car les points } A, C, D, E \text{ sont cocycliques,}\\
&= (AD, AC) + (AC, BC), \text{ car les arcs } \wideparen{AB} \text{ et } \wideparen{AC} \text{ sont de même longueur,}\\
&= (AD, BC), \text{ d'après la relation de Chasles,}\\
&= (FD, BC), \text{ car les points } A, D, F \text{ sont alignés,}\\
&= (FD, FG), \text{ car les points } B, C, F, G \text{ sont alignés.}
\end{aligned}
$$

Donc les points D, E, F, G sont cocycliques.

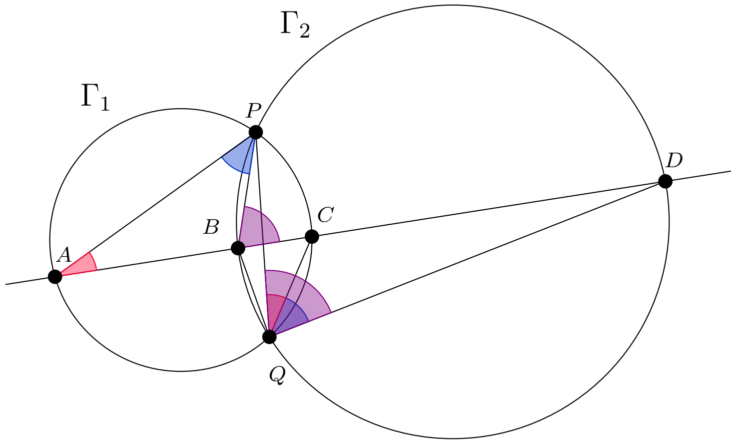
Solution de l'exercice 4

En chasse aux angles usuelle : on pose $\varphi := \widehat{APB}$ et $\mu := \widehat{BAP}$. Comme la somme des angles dans un triangle vaut $180°$, $\widehat{PBA} = 180° - \varphi - \mu$, d'où $\widehat{PBD} = \varphi + \mu$.

De plus, comme les points A, C, P, Q sont cocycliques, on a $\widehat{CQP} = \widehat{CAP} = \widehat{BAP} = \mu$.

Enfin, comme les points B, D, P, Q sont cocycliques, on a $\widehat{DQP} = \widehat{PBD} = \varphi + \mu$.

Ainsi, $\widehat{DQC} = \widehat{DQP} - \widehat{CQP} = \varphi + \mu - \mu = \varphi = \widehat{APB}$, et c'est ce qu'il fallait prouver.



Les angles bleus sont de mesure φ, les angles rouges de mesure μ, et les angles violets de mesure $\varphi + \mu$.

Autre solution :

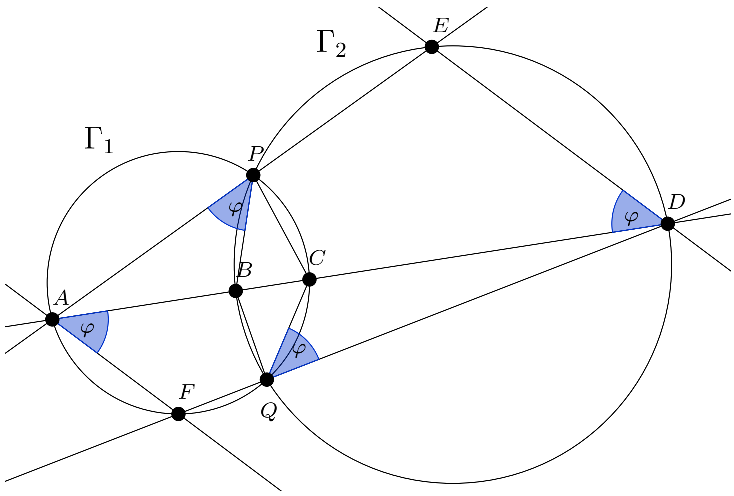
En angles orientés :

$$\begin{aligned}
(AP, BP) &= (AP, AB) + (AB, BP) \\
&= (AP, AC) + (BD, BP), \text{ car les points } A, B, C, D \text{ sont alignés,} \\
&= (QP, QC) + (BD, BP), \text{ car les points } A, C, P, Q \text{ sont cocycliques,} \\
&= (QP, QC) + (QD, QP), \text{ car les points } B, D, P, Q \text{ sont cocycliques,} \\
&= (QD, QC).
\end{aligned}$$

Autre solution :

Une autre approche de cet exercice consiste à rajouter les droites AP et DQ. Ces dernières sont en effet assez sympathiques comme on sait qu'elles sont parallèles : c'était l'exercice 1.

Posons maintenant $\varphi := \widehat{APB}$. On a alors $\widehat{BPE} = 180° - \varphi$, et donc, comme les points B, D, E, P sont cocycliques, $\widehat{BDE} = \varphi$. Comme les droites DE et AF sont parallèles, on a donc $\widehat{FAC} = \varphi$. Comme les points A, C, F, Q sont cocycliques, $\widehat{FQC} = 180° - \varphi$, d'où l'on déduit que $\widehat{DQC} = \varphi$.



Autre solution :
En angles orientés, cela donne :

$$\begin{aligned}
(AP, BP) &= (PE, BP), \text{ car les points } A, E, P \text{ sont alignés,}\\
&= (DE, BD), \text{ car les points } B, D, E, P \text{ sont cocycliques,}\\
&= (AF, BD), \text{ car les droites } AF \text{ et } DE \text{ sont parallèles,}\\
&= (AF, AC), \text{ car les points } A, B, C, D \text{ sont alignés,}\\
&= (QF, QC), \text{ car les points } A, C, F, Q \text{ sont cocycliques,}\\
&= (QD, QC), \text{ car les points } D, F, Q \text{ sont alignés.}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

Dans cet exercice, les projetés orthogonaux nous donnent beaucoup d'angles droits. Ceci nous permet de trouver beaucoup de points cocycliques : par exemple, $\widehat{AA'B} = 90°$ et $\widehat{AB'B} = 90°$. Ainsi, les points A, A', B, B' sont cocycliques. On obtient de même que B, B', C, C' et C, C', D, D' et $D, D'A, A'$ sont cocycliques, ce qui nous permet de tracer les quatre cercles verts de la figure ci-dessous.

Dès lors, on peut montrer que $(A'B', B'C') = (A'D', C'D')$ en décomposant judicieusement nos angles. Le lecteur, s'il n'est pas encore convaincu, aura ici un bon aperçu de l'utilité des angles orientés. On a :

$(A'B', B'C') = (A'B', BB') + (BB', B'C'),$

en décomposant pour faire ressortir nos quadruplets de points cocycliques,

$= (A'A, BA) + (BC, CC'),$

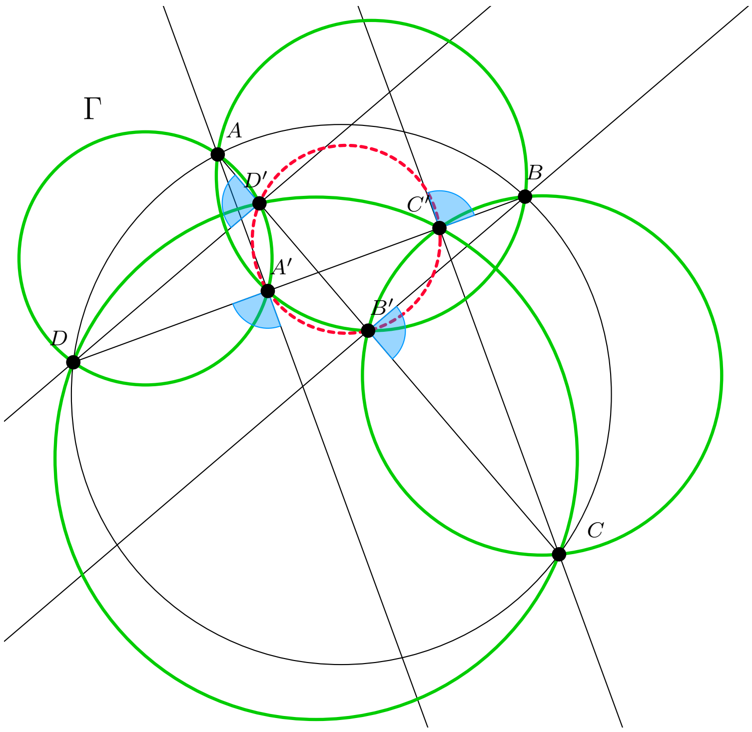
car les points A, A', B, B' et B, B', C, C' sont cocycliques,

$= (BC, BA) - (A'A, CC'),$ d'après la relation de Chasles,

$= (BC, BA)$ car $(A'A, CC') = 0°$.

On montre de même que $(A'D', C'D') = (DC, DA)$.

Comme les points A, B, C, D sont cocycliques, on a $(BC, BA) = (DC, DA)$. Donc on conclut que A', B', C', D' sont cocycliques.



Les angles bleus clair sont de mesure 90°.

Solution de l'exercice 6

Comme $AB \parallel DE$ et $AB = DE$, le quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme. Donc $BD \parallel AE$ et $BD = AE$.

Donc les triangles BCD et EFA sont semblables, et même isométriques (autrement dit, ils ont non seulement les mêmes angles, mais aussi les mêmes longueurs de côtés). Ainsi, $BC = EF$ et $CD = FA$.

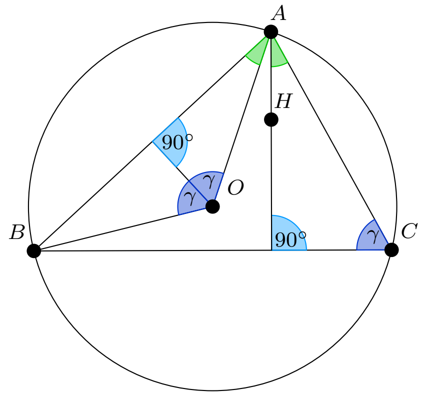
Solution de l'exercice 7

Cet exercice se résout très bien au moyen d'une chasse aux angles rapide, faisant intervenir les propriétés angulaires de O et de H – propriétés qu'il faut au demeurant maîtriser–.

Ainsi, si l'on pose $\widehat{BCA} = \gamma$, comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{BOA} = 2\gamma$. De plus, par définition de O, on a aussi $OA = OB$, et donc le triangle BOA est isocèle en O. Donc $\widehat{BAO} = 90° - \gamma$.

D'autre part, comme H est l'orthocentre du triangle ABC, on sait que le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, noté A', est le point d'intersection des droites AH et BC. Dans le triangle $AA'C$, on connaît deux angles : $\widehat{AA'C} = 90°$ et $\widehat{A'CA} = \gamma$. Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on en déduit que $\widehat{CAA'} = 90° - \gamma$. Donc $\widehat{CAH} = 90° - gamma$.

Donc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

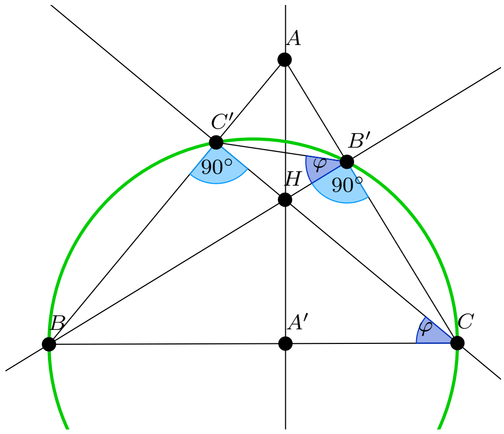


Les angles verts sont de mesure $90° - \gamma$.

Solution de l'exercice 8

Comme $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90°$, les points B, B', C, C' sont cocycliques, et donc on peut tracer le cercle vert sur la figure ci-dessous. On en déduit que $\widehat{BB'C'} = \widehat{BCC'}$. Donc les triangles HCB et $HB'C'$ sont semblables. Ainsi, $\frac{HC}{HB} = \frac{HB'}{HC'}$, d'où $HC \times HC' = HB \times HB'$.

On montre de même que $HA \times HA' = HB \times HB'$. Donc : $HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$.



Autre solution. Comme les triangles $HC'B$ et $HB'C$ ont deux fois le même angle (en effet, $\widehat{C'HB} = \widehat{B'HC}$, qui sont opposés par le sommet, et $\widehat{HC'B} = \widehat{HB'C} = 90°$), ils sont semblables. Ainsi, $\frac{HC'}{HB} = \frac{HB'}{HC}$, d'où $HC \times HC' = HB \times HB'$, et on conclut comme dans la solution précédente.

Solution de l'exercice 9

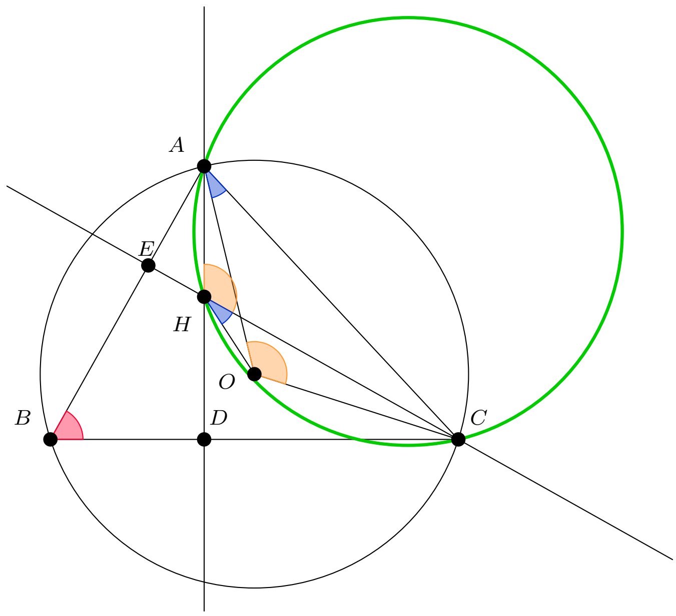
Comme $\widehat{BDH} = 180° - \widehat{BEH} = 90°$, les points B, D, E, H sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{DHE} = 180° - 60° = 120°$. Donc $\widehat{AHC} = 120°$.

De plus, comme $\widehat{ABC} = 60°$, d'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{AOC} = 2 \times 60° = 120°$.

Donc les points A, C, H, O sont cocycliques.

De plus, comme le triangle AOC est isocèle en O, on a $\widehat{OAC} = 30°$. Donc, par cocyclicité, $\widehat{OHC} = 30°$. Comme $\widehat{CHD} = 180° - \widehat{DHE} = 60°$, on a également $\widehat{OHD} = 60° - 30° = 30°$.

Comme la bissectrice intérieure commune des angles $\widehat{AHE}$ et $\widehat{CHD}$ dédouble chacun de ces angles de $60°$ en deux angles de $30°$, tout comme le fait la droite OH, on en déduit que le point O est sur cette bissectrice.



L'angle bleu est de mesure 60°, les angles orange sont de mesure 120°, les angles rouges de mesure 30°.

Solution de l'exercice 10

Soit M le point d'intersection de CD et de AB. Comme la droite CD est l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2, le point M, qui lui appartient, vérifie $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M)$. Or $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = MA^2$ et $\mathcal{P}_{\Gamma_2}(M) = MB^2$. Donc $MA^2 = MB^2$ ce qui signifie que M est le milieu du segment AB.

Solution de l'exercice 11

Il s'agit de caractériser les points M qui vérifient la condition de l'énoncé. Soit Z le point d'intersection des droites AB et CD. L'avantage d'introduire ce point est que cela nous permet de connaître tous nos axes radicaux. En effet, pour tout point M, l'axe radical du cercle circonscrit à $ABCD$ et du cercle circonscrit à MAB est la droite AB, l'axe radical du cercle circonscrit à $ABCD$ et du cercle circonscrit à MCD est la droite CD, et l'axe radical du cercle circonscrit à MAB et du cercle circonscrit à MCD passe par M et est concourant aux deux autres axes radicaux (qui se coupent en Z) : c'est donc la droite ZM.

Ainsi, Z appartient aux trois axes radicaux, et donc la puissance de Z est la même par rapport aux trois cercles. Or les cercles circonscrits à MAB et à MCD sont tangents si et seulement si leur axe radical est leur tangente commune en M, autrement dit si et seulement si la droite ZM est leur tangente commune. C'est le cas si et seulement si la puissance de Z par rapport aux cercles circonscrits à MAB et à MCD vaut ZM^2, autrement dit si et seulement si $ZA \times ZB = ZC \times ZD = ZM^2$.

En bref, sachant que les points Z, A, B, C, D sont fixés, le point M satisfait la condition de l'énoncé si et seulement si $ZM = \sqrt{ZA \times ZB}$. Donc le lieu de nos points M est un cercle de centre Z et de rayon $\sqrt{ZA \times ZB}$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

Soit B' le pied de la hauteur issue de B et C' le pied de la hauteur issue de C.

Comme $\widehat{BB'N} = 90°$, B' appartient au cercle de diamètre BN. Donc les points B, B', N, P, Q sont cocycliques. De même, les points C, C', M, P, Q sont cocycliques.

De plus, l'axe radical de ces deux cercles est la droite PQ. Donc, pour montrer que le point H appartient à PQ, il suffit de montrer que la puissance de H par rapport aux cercles circonscrits à $BB'NPQ$ et à $CC'MPQ$ est la même. Il suffit donc de montrer que $HB \times HB' = HC \times HC'$, or on l'a fait dans l'exercice 7.

Donc le point H appartient bien à la droite PQ.