DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Grésillon 2011

Stratégies de base

- Principe des tiroirs-

Si l'on range au moins $n+1$ objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins deux objets. En plus généralement, si l'on range au moins $kn+1$ objets dans ces mêmes n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins $k+1$ objets. Par exemple : sachant qu'un humain a moins de 300 000 cheveux et qu'il y a 3 000 000 de parisiens, au moins deux parisiens ont le même nombre de cheveux. On peut même préciser qu'il existe 10 parisiens au moins ayant le même nombre de cheveux. S'il existait 3 000 001 parisiens ayant chacun au plus 300 000 cheveux, on pourrait affirmer qu'au moins 11 d'entre eux ont le même nombre de cheveux.

Un des premiers résultats mathématiques qu'on peut en déduire, c'est que le développement décimal de la fraction $\frac{p}{q}$ est périodique de période strictement inférieure à q. En effet, lorsqu'on pose la division, à chaque nouvelle décimale correspond un nouveau reste. Parmi q restes consécutifs, soit l'un est nul (et la division s'arrête, ce qui correspond à une période 1 puisque à partir d'un certain rang, toutes les décimales sont égales à 0), soit ces q restes sont tous entre 1 et $q-1$, ce qui prouve que deux d'entre eux au moins, r_i et r_j sont égaux. Comme chaque reste détermine toute la suite de la division, $r_{i+1} = r_{j+1}$, $r_{i+2} = r_{j+2}$... donc le développement décimal sera périodique de période au plus $|i-j| < q$.

Exercice 1

(i) Montrer que quel que soit n, parmi $(n+1)$ entiers quelconques a_0, a_1 ... a_n, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible par n.

(ii) Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Solution de l'exercice 1

(i) On classe les nombres dans les n classes modulo n : $\{kn\}, \{kn+1\}...\{kn+(n-1)\}$. Au moins une classe contient au moins deux entiers, donc leur différence est divisible par n.

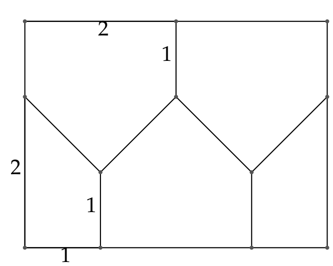
(ii) On utilise ce premier résultat avec la suite : $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111$ etc... : a_i est l'entier formé de i chiffres tous égaux à 1. Deux d'entre eux ont une différence multiple de n, et cette différence a au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 2 On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

Solution de l'exercice 2 Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut moins de $\frac{51}{2}$ tiroirs, soit au plus 25. Couvrir un carré avec 25 cercles est moins facile que le couvrir avec 25 carrés, de côté $\frac{1}{5}$. Mais la diagonale d'un tel carré mesure $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

Exercice 3 On place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension 4×3. Montrer qu'on peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Solution de l'exercice 3 Si l'on plaçait 7 points, le problème serait facile, il suffirait de diviser le rectangle en six rectangles 2×1. Mais on n'a que 6 points, il faut donc trouver un autre découpage astucieux. La figure nous montre quel découpage choisir. A l'intérieur d'un de ces six polygones, il y a deux points au moins, et leur distance est nécessairement inférieure à la plus grande diagonale du polygone, donc à $\sqrt{5}$.



- Récurrence-

Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel, on peut montrer que si elle et vraie pour un entier, elle est encore vraie pour le suivant : c'est ce qu'on appelle un raisonnement par récurrence. Il est important de rédiger proprement une telle démonstration :

(1) on écrit explicitement l'hypothèse de récurrence,

(2) initialisation : on montre que cette propriété est vraie en la première valeur pour laquelle il faut la démontrer. Cette valeur est en principe définie dans l'énoncé, ce n'est pas toujours 0.

(3) on suppose l'hypothèse de récurrence vraie en n, et on démontre, généralement par un calcul qui constitue la plus grosse partie de la démonstration, que cette même propriété est encore vraie au rang suivant $n+1$.

Exercice 4 a et b étant des réels strictement positifs, $a \neq 1$, on considère la suite définie par récurrence par : $u_0 = u$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = au_n + b$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}$.

Solution de l'exercice 4 Hypothèse de récurrence : au rang n, $u_n = a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}$.

Initialisation : comme $a^0 = 1$ pour tout a strictement positif, $u_0 = u = a^0 u + b\frac{a^0-1}{a-1}$, donc la relation est vérifiée pour $n = 0$.

Calcul : on suppose qu'au rang n, $u_n = a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}$ (hypothèse de récurrence). Or par définition, $u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}\right) + b = a^{n+1}u + b\left(a\frac{a^n-1}{a-1} + 1\right) = a^{n+1}u + b\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, c'est précisément la propriété à démontrer au rang $n+1$, et cela achève la démonstration.

Exercice 5 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que cette somme est toujours strictement inférieure à 2.

Solution de l'exercice 5 Hypothèse de récurrence : au rang n, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Initialisation : pour $n = 1$, $1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$, donc la relation est manifestement vérifiée au rang 1.

Calcul : la relation $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ étant supposée vraie au rang n (hypothèse de récurrence), pour transformer cette relation en la même relation au rang $n+1$, il faut ajouter à gauche $\frac{1}{(n+1)^2}$ et à droite : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ qui est manifestement plus grand. Donc l'inégalité reste vraie, et par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$ On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$.

Exercice 6 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on peut trouver un multiple de 2^n de n chiffres tous égaux à 1 ou 2.

Solution de l'exercice 6 Hypothèse de récurrence : on peut trouver un multiple de 2^n de n chiffres tous égaux à 1 ou 2.

Initialisation : pour $n = 1$, l'entier 2 convient.

Calcul : commençons par étudier les "petites valeurs" de n pour trouver la manière de construire, à partir de l'entier au rang n, le suivant au rang $n+1$. Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5...$ les entiers $2, 12, 112, 2112, 22112...$ conviennent, et chacun s'obtient en ajoutant un premier chiffre 1 ou 2 à gauche de l'entier précédent. Nous allons donc démontrer que si a_n est un entier de n chiffres divisible par 2^n, parmi les deux entiers de $n+1$ chiffres : 10^n+a_n et $(2 \times 10^n)+a_n$, l'un d'eux est multiple de 2^{n+1}. L'hypothèse de récurrence peut s'écrire $a_n = 2^n \times b_n$. Or comme $10 = 2\times5$, $10^n = 2^n\times5^n$, d'où $10^n+a_n = 2^n\,[5^n + b_n]$ et $(2 \times 10^n)+a_n = 2^n\,[(2 \times 5^n) + b_n]$. Quel que soit b_n, l'un des nombres entre crochets est pair (le premier si b_n est impair, le second si b_n est pair), donc l'un des deux entiers construits ainsi est divisible par 2^{n+1}, ce qui achève la démonstration.

- Invariants-

Un invariant est une caractéristique d'une situation qui ne peut pas changer pour un problème donné, quels que soient les choix arbitraires que l'on fait. On regroupera dans ce chapitre différents types de problèmes : des problèmes de coloriages ou une caractéristique est vraie pour toutes les situations autorisées par l'énoncé, et ceux où l'on étudie un processus qui se déroule de manière imprévisible si ce n'est qu'une caractéristique reste invariante tout au long du processus.

Exercice 7 On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Solution de l'exercice 7 Problème très clasique : chaque domino couvre une case blanche et une case noire, donc quelle que soit la manière de disposer les dominos, on couvrira autant de cases blanches que de cases noires. Or si l'on découpe les deux cases en haut à gauche et en bas à droite de l'échiquier, il s'agit de deux cases de même couleur, toutes deux noires ou toutes deux blanches. Il restera donc soit 30 cases noires et 32 cases blanches soit 32 noires et 30 blanches. Si l'on parvient à placer 30 dominos (ce qui reste à prouver), les deux dernières cases seront obligatoirement de même couleur, et on ne pourra pas y placer un domino de plus : il n'est donc pas possible de paver tout l'échiquier ainsi.

Exercice 8 On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2011. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille dixième étape peut-il être égal à 1 ?

Solution de l'exercice 8 C'est encore un argument de parité qui permet de conclure. Comme la différence de deux entiers a même parité que leur somme, la somme de tous les entiers sur le tableau conserve, à chaque étape du processus, la même parité. Or au départ elle vaut : $1 + 2 + ... + 2011 = \frac{2011 \times 2012}{2}$ qui est pair. Cette somme restera donc toujours paire, et le dernier nombre obtenu sera un nombre pair, ce ne peut pas être 1.

Pour prouver que ce peut être 0 (bien que ce ne soit pas demandé), il faudrait un tout autre raisonnement. On grouperait les nombres ainsi : $(1, 2, 3), (4, 5, 6, 7), ...(2008, 20$ Le premier triplet peut être ramené à 0 en remplaçant $(2, 3)$ par 1 puis $(1, 1)$ par 0. Et de même pour chacun des quadruplets suivants, en remplaçant $(4n, 4n + 2)$ par 2, $(4n + 1, 4n + 3)$ par 2, puis $(2, 2)$ par 0. Prouver que la réponse est "oui" ou que la réponse est "non" nécessite des raisonnements totalement différents, il est donc impératif de deviner le plus vite possible la bonne réponse car on perd beaucoup de temps lorsqu'on part dans la mauvaise direction. La technique des invariants est utilisable pour prouver une impossibilité. Pour prouver que quelque chose est possible, habituellement on montre qu'on peut le construire explicitement.

Exercice 9 6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Solution de l'exercice 9 Si la réponse était "oui", il faudrait décrire une suite de déplacements aboutissant à la solution. Pour prouver que la réponse est "non", on peut faire appel à un invariant. Considérons un triangle équilatéral formé de trois arbres non voisins. Ce triangle contient au départ 3 oiseaux. Si tous les oiseaux sont sur le même arbre, le triangle contiendra 0 ou 6 oiseaux. Or il est facile de voir que chaque déplacement laisse invariante la parité du nombre d'oiseaux perchés sur le triangle : comme chaque arbre du triangle a ses voisins hors du triangle et inversement, soit les deux oiseaux qui s'envolent étaient sur le triangle et le nombre d'oiseaux sur le triangle diminue de 2. Soit aucun n'était sur le triangle et le nombre augmente de 2. Soit l'un était sur le triangle et l'autre hors du triangle, auquel cas le nombre d'oiseaux reste inchangé. Dans tous les cas, le nombre d'oiseaux sur le triangle restera impair et ne vaudra jamais 0 ni 6.