DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Thomas BUDZINSKI
STAGE : Montpellier 2013

Combinatoire : bijections et double-comptage

Exercice 1 Démontrer par un double-comptage les identités suivantes :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$$

Solution de l'exercice 1 $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k, donc la somme est le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ de cardinal compris entre 0 et n, c'est-à-dire le nombre total de sous-ensembles.
Pour choisir un sous-ensemble, il suffit de choisir si on prend 1, puis si on prend 2 etc..., donc le nombre de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ vaut aussi 2.

Exercice 2 Par un double comptage, calculer la somme :

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}$$

Solution de l'exercice 2 $k\binom{n}{k}$ est le nombre de manières de choisir $A \subset [\![1,n]\!]$ de cardinal k et $x \in A$, donc la somme est égale au nombre de couples (x, A) avec $x \in A \subset [\![1,n]\!]$.
D'autre part, pour choisir un tel couple, on peut d'abord choisir x (il y a n choix possibles), puis A (pour chaque choix de x, il y a 2^{n-1} sous-ensembles de A possibles). La somme vaut donc $n2^{n-1}$.

Exercice 3 n personnes sont autour d'une table et, pour tout k, on note p_k le nombre de manières de changer ces personnes de place où exactement k personnes restent à leur place.
Montrer que $p_1+2p_2+3p_3+...+np_n=n!$.

Solution de l'exercice 3 On utilise la même technique que ci-dessus : kp_k est le

nombre de manière de choisir une personne x et une permutation σ telle que k personnes dont x restent à leur place, donc la somme est égale au nombre de manière de choisir x et σ telle que x reste à sa place.
Or, il y a n manières de choisir x puis, ensuite, il reste à choisir une permutation des $n-1$ personnes restantes. Il y a $(n-1)!$ manières de le faire, soit $n!$ au total.

Exercice 4 Montrer par des bijections les identités suivantes :

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

et :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Solution de l'exercice 4 On veut que les nombres soient les cardinaux d'ensembles, donc soient positifs. On passe donc les termes négatifs de l'autre côté, et on veut montrer qu'il y a autant de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal pair que de cardinal impair.
Pour cela, on considère la fonction qui à A associe A privé de 1 si $1 \in A$, et A avec 1 en plus si $1 \notin A$. On vérifie que cette fonction est une bijection entre les sous-ensembles de cardinal pair et ceux de cardinal impair.
Pour la deuxième, on montre que la fonction qui à un sous-ensemble associe son complémentaire est une bijection.

Exercice 5 On considère un grand rectangle de taille m sur n, découpé en petits carrés de côté 1.
Combien y a-t-il de manières d'aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit en se déplaçant uniquement sur le quadrillage, et seulement vers le haut ou la droite ?

Solution de l'exercice 5 Il faut faire m pas vers la droite et n pas vers la droite, soit un total de $m+n$ pas, qu'on peut numéroter de 1 à $m+n$ en suivant le chemin. On considère la fonction qui à un chemin associe l'ensemble des numéros des pas vers la droite : c'est un sous-ensemble de $[\![1, m+n]\!]$ de cardinal n, donc le nombre de chemins vaut $\binom{m+n}{n}$.

Exercice 6 On considère cette fois un grand carré de côté n découpé en petits carrés de côté 1.
Combien y a-t-il de manières d'aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit en restant au-dessus de la diagonale principale ?

Solution de l'exercice 6 Astuce : plutôt que de compter les chemins qui marchent, on va compter ceux qui ne marchent pas : un mauvais chemin passe forcément par la droite (d) juste en-dessous de la diagonale principale. On peut regarder ce qu'il se passe si on réfléchit par rapport à (d) la partie du chemin avant de rencontrer (d) pour la première fois : si on choisit le coin en bas à gauche comme origine, on obtient un chemin du point de coordonnées $(1, -1)$ vers le coin supérieur droit. C'est une bijection, donc il y a $\binom{2n}{n+1}$ mauvais chemins, et un peu de calcul montre qu'il y en a $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ bons.

Remarque 1. Les nombres obtenus (les $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$) sont appelés nombres de Catalan, et permettent de compter des objets combinatoires très variés, à l'aide de bijections avec les chemins de l'exercice. Voici quelques exemples :

- Les parenthésages corrects, i.e les manières de placer n parenthèses ouvrantes et n fermantes de manière à n'avoir jamais plus de parenthèses fermantes qu'ouvrantes. Par exemple, (()()) marche mais pas ())(().
- Les manières de relier deux à deux par des segments $2n$ points d'un cercle sans que deux segments se coupent.
- Les manières d'aller d'un point à lui-même en restant sur une demi-droite issue de ce point et en faisant $2n$ pas de 1 mètre vers la droite ou vers la gauche.
- Les arbres généalogiques à n sommets décrivant la descendance d'une personne.