Domaine : Combinatoire
Niveau : Débutants
Contenu : Cours et exercices

Auteur : Cécile Gachet
Stage : Montpellier 2014

Invariants, Principe des tiroirs

Introduction. La récurrence est un principe de raisonnement mathématique, utile dans de nombreux domaines, notamment en combinatoire et en arithmétique.

Elle s'appuie sur l'idée que l'on peut parcourir l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ de la manière suivante : on part de 0, puis on va en $0+1=1$, puis en $1+1=2$, puis en $2+1=3$... et ainsi de suite, à chaque fois qu'on se trouve en un entier donné n (autrement dit, à chaque fois qu'on se place au rang n), on peut aller à l'entier suivant, qui sera $n+1$.

Définitions et notations. Ce qui est alors intéressant, c'est qu'on peut définir des objets qui dépendent de notre entier n. Par exemple, on peut procéder ainsi : à chaque fois qu'on se place en un entier n, on choisit un nombre et on dit qu'on l'associe à notre entier n. Pour bien souligner cette association entre le nombre choisi et l'entier n sur lequel on était placé lorsqu'on a choisi le nombre, on note u_n le nombre associé à l'entier n.

Quand on regarde u_0, puis u_1, puis u_2,..., et ainsi de suite tous les u_n que l'on a définis, on définit en fait une suite de nombres, notée en l'occurrence (u_n). Il ne faut pas confondre la suite, notée (u_n), qui est la succession de tous les nombres, et le terme de la suite au rang n, noté u_n, qui n'est qu'un seul nombre.

Enfin, on peut aussi procéder ainsi : à chaque fois que l'on se place en un entier n, on choisit non pas un nombre, mais une propriété ; autrement dit, on associe à chaque entier n une propriété. On note alors $\mathcal{P}_n$ la propriété associée à l'entier n.

Principe de récurrence. Considérons une propriété *dépendant* d'un entier n, notée $\mathcal{P}_n$.

Pour montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie *pour tout* n , on peut s'appuyer sur la description précédente de $\mathbb{N}$. Ainsi, on peut représenter la situation par un escalier, dont la n-ième marche correspond à la propriété $\mathcal{P}_n$.

- ▷ On commence par vérifier que la propriété P_0 est vraie (l'escalier repose sur un sol ferme !).
- ▷ Ensuite, on démontre que : si la propriété est vraie pour un entier donné n, alors elle est encore vraie pour l'entier suivant $n+1$ (d'une marche à l'autre, il n'y a qu'un pas… à franchir !).

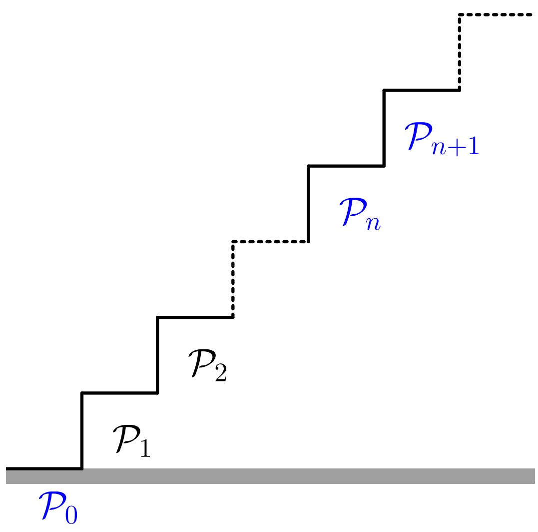

FIGURE.– Escalier de récurrence

Plus formellement, un raisonnement par récurrence se rédige ainsi :

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « ... ».
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ▷ <u>Initialisation</u> : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- ▷ <u>Hérédité</u> : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

Exercice 1

Soit n un entier naturel. Donner une formule explicite de la somme $0 + 1 + 2 + ... + n$.

Indication. *Essayer une formule du type :* $0+1+2+...+n = an^2 + bn + c$*, où* a, b, c *sont trois constantes.*

Exercice 2 Une suite arithmético-géométrique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation : $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où a et b sont deux réels fixés.

On prend ici $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, avec $a \neq 1$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Exercice 3

Montrons que toute boîte de crayons de couleur ne contient que des crayons de la même couleur.

On fait l'initialisation pour $n = 1$: une boîte contenant un seul crayon de couleur ne contint forcément que des crayons de la même couleur.

Pour l'hérédité, supposons qu'il existe un entier n tel que toute boîte contenant n crayons ne contienne que des crayons de la même couleur.

Prenons alors une boîte de $n+1$ crayons. Les n premiers crayons de cette boîte sont tous de la même couleur, et les n derniers crayons sont aussi tous de la même couleur. Donc tous les crayons de notre boîte sont de la même couleur.

Par principe de récurrence, on peut bien conclure que, pour tout entier $n \geq 1$, n'importe quelle boîte contenant n crayons ne contient en fait que des crayons de la même couleur ; autrement dit, n'importe quelle boîte de crayons de couleur ne contient que des crayons de la même couleur.

Maintenant, trouvez l'erreur !

Remarques.

(i) L'entier n dont on parle dans l'hérédité est fixé arbitrairement : ce n'est pas un entier naturel explicite comme $0, 1$ ou 42, mais un entier naturel pour lequel on sait uniquement que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie (c'est ainsi qu'on le définit).

(ii) Il existe de nombreuses variantes du raisonnement par récurrence. Notamment :

- **Récurrence à partir d'un certain rang.**
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à un entier k donné (qui ne vaut pas forcément 0) :
  - ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie.
  - ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq k$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.
- **Récurrence finie.**
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$ (où $N \in \mathbb{N}$ est un rang fixé) :
  - ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  - ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \leq N - 1$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.
- **Récurrence forte.**

Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n, quand $\mathcal{P}_n$ ne suffit pas à prouver $\mathcal{P}_{n+1}$, on peut aussi procéder ainsi :

▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que les propriétés $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ sont toutes vraies. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

- **Récurrence descendante.**
  On préfère ce type de récurrence quand la propriété est difficile à initialiser en 0 : voir pour exemple l'exercice 7.
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$ (où $N \in \mathbb{N}$ est un rang fixé) :

  ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_N$ est vraie.

  ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $1 \leq n \leq N$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est aussi vraie.

(iii) Parfois, on a intérêt à montrer une propriété un peu plus générale que ce que demande l'énoncé : voir pour exemple l'exercice 6. Il faut alors penser à initialiser la récurrence en conséquence !

Exercice 4

Soit x un nombre réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 5

Soit $n \geq 1$ un entier. On trace n cercles dans le plan. Montrer qu'on peut colorier chaque région du plan ainsi délimitée avec exactement deux couleurs (bleu et rouge en l'occurrence) de manière à ce que deux régions séparés par un arc de cercle soient toujours de couleur différente.

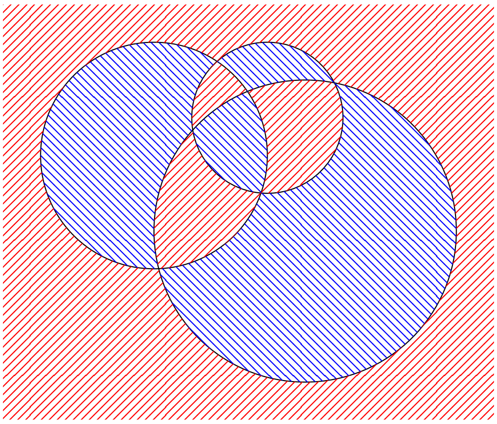

FIGURE.– Exemple de coloriage possible pour $n = 3$ cercles

Exercice 6

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place $2n$ points dans l'espace, et on trace n^2+1 segments entre ces points. Montrer que l'on a tracé au moins un triangle.

Exercice 7

Déterminer tous les entiers strictement positifs n pour lesquels le nombre $u_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ est entier.

Indication. *Pour n pair, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Pour n impair, utiliser le fait que $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$.*

Exercice 8

Montrer que pour tout entier $N \geq 2$,

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{...\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}} < 3.$$

Indication. *Montrer, par récurrence sur m, que pour tout $N \geq 2$ et pour tout m tel que $2 \geq m \geq N$,*

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots\sqrt{N}}}} < m+1.$$

Solution de l'exercice 1

Comme souvent lorsqu'une récurrence est en jeu, nous allons procéder en deux temps : tout d'abord, nous conjecturons une formule explicite grâce aux petites valeurs de n, puis nous montrons qu'elle est valable pour tout n.

Si l'on note $u_n := 0 + 1 + ... + (n-1) + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

A priori, on peut commencer par chercher u_n comme fonction affine de n, *i.e.* $u_n = an + b$ pour tout n, avec a, b fixés (dans la vraie vie, on n'a pas toujours d'indications...). On aurait alors $u_0 = a \times 0 + b = 0$, d'où $b = 0$, et $u_1 = a \times 1 + 0 = 1$, d'où $a = 1$. Or $u_2 \neq 1 \times 2 + 0$. Donc il faut essayer autre chose...

Ensuite on cherche u_n comme fonction polynômiale du second degré de n, *i.e.* $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout n, avec a, b, c fixés. On aurait alors $u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0$, d'où $c = 0$, et $u_1 = a \times 1 + b \times 1 + 0 = 1$, d'où $a + b = 1$, et $u_2 = a \times 4 + b \times 2 + 0 = 3$, d'où $4a + 2b = 3$. On en déduit $a = b = \frac{1}{2}$, ce qui donnerait (si cela se confirme...) : $u_n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

D'ailleurs, cette formule est vérifiée sur toutes les valeurs calculées dans le tableau. On est donc très motivés pour montrer que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.

L'initialisation pour $n = 0$ est déjà faite (voir le choix judicieux de a, b, c).

Supposons maintenant qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui conclut par principe de récurrence.

Solution de l'exercice 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}$ ».

Comme cette propriété passe bien du rang n au rang $n+1$, puisqu'on a une formule pour u_{n+1} qui ne dépend que de u_n, une récurrence classique devrait marcher...

Pour l'initialisation, $\mathcal{P}_0$: « $u_0 = a^0 u_0 + b\frac{a^0-1}{a-1}$ »est bien vraie.

Pour l'hérédité, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b \\ &= a\left(a^n u_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}\right) + b \\ &= a^{n+1}u_0 + b\frac{a^{n+1}-a+a-1}{a-1} \\ &= a^{n+1}u_0 + b\frac{a^{n+1}-1}{a-1}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui conclut par principe de récurrence.

Solution de l'exercice 3

Le principe de cet exercice est le suivant : on veut obtenir $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ à partir des $x^k + \frac{1}{x^k}$ précédents par des opérations, qui conservent le caractère entier des nombres (addition, soustraction, multiplication).

Or, on constate que :

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} \qquad (\star)$$

A partir de cela, il suffit de supposer que $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont des entiers pour passer la même propriété à $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$.

Donc on rédige notre récurrence ainsi : soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier ».

L'initialisation doit être faite pour $n = 0$ et $n = 1$. Or $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ est entier et $x + \frac{1}{x}$ aussi, par hypothèse de l'énoncé.

On passe donc à l'hérédité, en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont toutes les deux vraies. Alors, d'après $(*)$, $\mathcal{P}_{n+2}$ est aussi vraie. Ceci conclut par principe de récurrence.

Remarque. D'un point de vue technique, il s'agit ici d'un schéma de récurrence double, qui est un cas simplifié de récurrence forte. C'est pourquoi il faut initialiser au deux premiers rangs (avec un seul rang, on ne peut pas encore déclencher l'hérédité).

Solution de l'exercice 4

Si l'on n'a qu'un seul cercle, on colorie l'intérieur d'une couleur arbitraire, l'extérieur de l'autre couleur et c'est gagné.

Si on peut toujours colorier n cercles comme voulu, qu'en est-il de $n + 1$ cercles ? Pour colorier les régions comme voulu, on oublie tout d'abord un cercle : il en reste alors n, et on peut colorier les régions correspondantes comme voulu, par hypothèse de récurrence. Puis on rajoute le cercle oublié. Il coupe en deux certaines régions coloriées : on change alors la couleur de chaque région coloriée à l'intérieur de notre cercle, et on garde la couleur initiale pour les autres régions.

Alors, on a bien colorié toutes nos régions comme voulu ! En effet, c'est gagné quand on regarde deux régions séparées par un arc du cercle oublié (grâce au changement qu'on a fait), mais aussi quand on regarde deux régions séparées par un arc d'un autre cercle (par hypothèse de récurrence).

Solution de l'exercice 5

L'initialisation se fait pour $n = 2$: on a 4 points et 5 segments. Or, il existe exactement 6 segments distincts reliant 4 points. Donc on a oublié de tracer exactement un segment, notons-le $[AB]$. Si C et D sont nos deux autres points, les triangles ACD et BCD

sont complets.

Maintenant, on fixe $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et on se place dans une configuration à $2n+2$ points et $(n+1)^2+1$ segments. Soit $[AB]$ l'un de ces segments, et C_i l'un des $2n$ points restants (avec $1 \leq i \leq 2n$). Si, pour un certain i, les segments $[AC_i]$ et $[BC_i]$ sont tous les deux tracés, alors on a tracé le triangle ABC_i et c'est gagné.

Sinon, cela veut dire que, pour chaque valeur de i, au plus l'un des deux segments $[AC_i]$ ou $[BC_i]$ est tracé. Cela donne au plus $2n$ segments reliant A ou B à un des points restants. Si l'on efface alors les points A et B et tous les segments dans lesquels ces deux points interviennent, il nous reste alors au moins $(n+1)^2+1-(2n+1)=n^2+1$ segments et $2n$ points. Dans cette configuration, on a tracé, par hypothèse de récurrence, au moins un triangle, et donc c'est aussi gagné.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

On pose $u_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n. On regarde ce qui se passe pour de petites valeurs de n :

n	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$

On remarque que u_1 est entier. De plus, on remarque que, pour les petites valeurs de n, u_n peut s'écrire comme le quotient d'un entier impair par un entier pair. Si nous réussissons à montrer cette propriété plus générale pour tout $n \geq 2$, nous saurons aussi que u_n n'est jamais entier quand $n \geq 2$, ce qui nous permettra de résoudre l'exercice.

Pour cela, on constate que, pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}$. Si on suppose alors que $u_n=\frac{a_n}{b_n}$, avec a_n un entier impair et b_n un entier pair non nul, on aura :

$$u_{n+1}=\frac{a_n(n+1)+b_n}{(n+1)b_n} \qquad (\star)$$

Dans cette expression, le dénominateur est un entier toujours pair (comme b_n est pair). De plus, on remarque que le numérateur $a_n(n+1)+b_n$ est toujours de parité contraire à n (car b_n est pair a_n est impair). Donc, si n est pair, le résultat voulu passe naturellement du rang n au rang $n+1$; toutefois, si n est impair, cette écriture est insuffisante, car la fraction n'est pas sous forme irréductible... Il faut donc procéder de manière plus fine.

On procède donc par récurrence *forte* :

L'initialisation pour $n=2$ a déjà été faite (voir le tableau).

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que, pour tout $2 \leq k \leq n$, on peut écrire : $u_k = \frac{a_k}{b_k}$, avec a_k un entier impair et b_k un entier pair non nul.

- si n est pair, alors la relation ($\star$) permet d'obtenir le résultat au rang $n+1$, en suivant le raisonnement ci-dessus.
- si n est impair, alors on pose $n = 2k-1$, où $2 \leq k \leq n$ est un entier. On veut calculer u_{n+1} en regroupant les termes suivant la parité du dénominateur. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \\
&= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k-1}\right)}_{=\frac{p}{q} \text{ (avec } q \text{ impair)}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{p}{q} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) = \frac{p}{q} + \frac{1}{2}u_k \\
&= \frac{p}{q} + \frac{1}{2}\,\frac{a_k}{b_k} \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \\
&= \frac{2pb_k + qa_k}{2qb_k}.
\end{aligned}$$

Or, q et a_k sont impairs, donc qa_k est impair, et $2pb_k$ est pair : donc le numérateur est impair. De plus, le dénominateur $2qb_k$ est pair. On peut donc poser $a_{n+1} := 2pb_k + qa_k$ et $b_{n+1} :=$

$2qb_k$, et on a encore le résultat voulu au rang $n+1$.

Ceci conclut, par principe de récurrence.

Donc le seul n pour lequel u_n est un entier est 1.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Il est clair que l'indication propose de montrer un résultat plus général que l'exercice en lui-même. Toutefois, la version généralisée a un avantage : elle permet de jouer assez finement sur l'entier m.

Soit un entier N fixé. On note pour tout entier m tel que $2 \leq m \leq N$: $\mathcal{P}_m$ la propriété : « $\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{...\sqrt{N}}}} < m+1$ ».

Une initialisation en $m=2$ n'est pas envisageable (c'est la propriété qu'on veut avoir à la fin), nous allons donc procéder par récurrence descendante. Pour $m=N$, il s'agit de prouver que $\sqrt{N} < N+1$.

Or, $(N+1)^2 = N^2+2N+1 > N$, d'où l'initialisation.

Maintenant, supposons qu'il existe un entier m tel que $3 \leq m \leq N$ et que :

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{...\sqrt{N}}}} < m+1.$$

Il s'agit de montrer que $\mathcal{P}_{m-1}$ est vraie, soit :

$$\sqrt{(m-1)\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{...\sqrt{N}}}}} < m.$$

Comme $m-1>0$, l'hypothèse de récurrence donne :

$$(m-1)\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{...\sqrt{N}}}} < (m-1)(m+1) = m^2-1 < m^2,$$

d'où l'on déduit :

$$\sqrt{(m-1)\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{...\sqrt{N}}}}} < \sqrt{m^2-1} < \sqrt{m^2} = m$$

et donc c'est gagné pour l'hérédité !

Ainsi, par principe de récurrence, notre propriété est vraie pour tout N et pour tout $m \in [\![2, N]\!]$. A fortiori, elle est vraie pour tout N dans le cas où $m = 2$.