Domaine : Combinatoire
Niveau : Avancé
Contenu : Exercices
Auteur : Guillaume Conchon-Kerjan
Stage : Montpellier 2014

Exercices de combinatoire

Introduction

Nous proposons ici un certain nombre d'exercices (notamment de la géométrie combinatoire, mais pas que) plutôt difficiles utilisant des outils relativement élémentaires.

Exercices

Mise en bouche

Exercice 1

Montrer que toute figure d'aire strictement inférieure à 1 du plan peut être translatée de manière à ne pas contenir de point à coordonnée entière.

Exercice 2

On considère n points du plan en position générale (sans alignement), $n \geq 5$. Montrer qu'ils forment au moins $\binom{n-3}{2}$ quadrilatères convexes.

Exercice 3

On considère n droites dans le plan, coloriées en rouge ou en bleu, deux d'entre elles jamais parallèles, de sorte que par tout point d'intersection de deux droites de la même couleur passe une droite de l'autre couleur. Montrer que toutes les droites sont concourantes.

Exercice 4

On considère des tas (non-vides) contenant au total $n(n+1)/2$ cailloux. A chaque tour, on prend un caillou par tas et on forme un nouveau tas. Arrive-t-on sur une configuration stable ? Si oui, laquelle ?

Plat du jour

Exercice 5

On considère 9 points du plan sans alignement. Quel est la valeur minimale de n telle que si l'on colorie n arêtes reliant deux des points en rouge ou en bleu, on est sûr d'avoir un triangle monochrome quel que soit le coloriage ?

Exercice 6

Peut-on partager un triangle équilatéral en un nombre fini de triangles équilatéraux inégaux deux à deux ?

Exercice 7

Peut-on recouvrir le plan par des cercles de sorte que par tout point du plan passent exactement 2014 cercles ?

Sucreries

Exercice 8

On considère un T un triangle équilatéral et X un ensemble fini de points dans le plan, tel que si on prend au plus 9 de ses points, ils sont contenus dans 2 translations de T. Montrer que tous les points de X sont contenus dans deux translations de T.

Exercice 9

A et B jouent au jeu suivant : A écrit A sur sa feuille, B écrit B sur la sienne. Toutes les heures, l'un des deux concatène le mot de l'autre à gauche ou à droite du sien. Montrer que dans 128 ans, on pourra couper le mot de B en deux, échanger les deux parties, et obtenir le mot à l'envers.

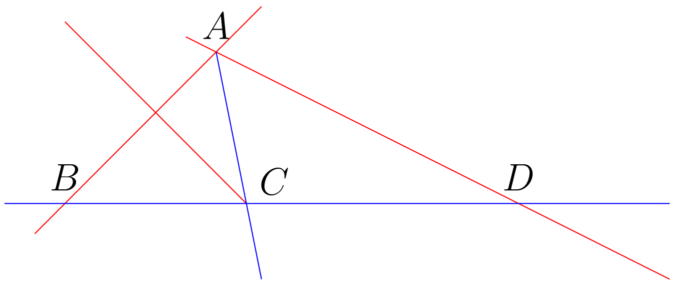
Solutions

Mise en bouche

Solution de l'exercice 1

On montre ceci par récurrence sur n. Pour $n = 5$, il suffit d'avoir un quadrilatère convexe. On regarde l'enveloppe convexe des 5 points (le polygone convexe ayant certains des 5 points comme sommets, et les autres à l'intérieur). Si c'est un quadrilatère ou un pentagone, on a gagné. Sinon c'est un triangle ABC, les points D, E étant à l'intérieur. On trace (DE), qui coupe deux des trois côtés du triangle, disons $[AB]$ et $[AC]$. Alors B, C, D, E forment un quadrilatère convexe. Pour $n \geq 6$, on a $\binom{n}{5}$ façons de choisir 5 points, avec à chaque fois au moins un quadrilatère convexe. Chaque quadrilatère est compté au plus $n-4$ fois (les 4 sommets sont fixés, et le cinquième point considéré varie). Il suffit de montrer que $\binom{n}{5} \geq (n-4)\binom{n-3}{2}$. On développe les coefficients binomiaux, simplifie et on se ramène à $n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4)$. On le vérifie à la main pour $n = 6, 7, 8$. Pour $n \geq 9$, $n(n-1) > 60$ et $n-2 > n-4$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice 2
On voit aisément que si toutes les droites d'une même couleur sont concourantes, alors toutes les droites sont concourantes. Supposons par l'absurde que toutes les droites ne concourent pas.
On considère deux droites rouges, et une droite bleue qui passe par leur intersection A, située "entre" les deux droites rouges. Par ce qui précède, il existe une autre droite bleue qui intersecte les trois droites précédentes en B,C,D, formant ce que l'on appelle un "triangle spécial" (voir figure). En C doit passer une droite rouge, qui intersecte une des deux autres rouges, donnant un "triangle spécial" inclus dans le précédent.



On peut ainsi générer un nombre infini de triangles spéciaux, inclus les uns dans les autres. Or, il n'y en a qu'un nombre fini puisqu'on a un nombre fini de droites, et que quatre droites données donnent au plus un triangle spécial. Contradiction.

Solution de l'exercice 3
On se place dans un pavage orthonormé du plan. On range les tas de gauche à droite à partir de zéro par taille décroissante : la plus grosse pile somme des coord x+y quand on range les colonnes par ordre décroissant.

Plat du jour

Solution de l'exercice 4
La réponse est 33. En effet, il y a $\binom{9}{2} = 36$ arêtes traçables. Si on en trace 33, on sélectionne 3 points différents qui sont sommets de ces arêtes. Les 6 autres

forment donc un graphe complet (chacun relié à chacun). C'est un petit exercice classique que de montrer l'existence d'un triangle monochrome.
Maintenant, trouvons une configuration à 32 arêtes sans triangle monochrome. Il est facile de tracer un graphe complet de 5 sommets sans triangle monochrome. On peut imaginer par exemple un pentagone régulier dont les côtés sont bleus et les diagonales sont rouges. Maintenant, on sélectionne un sommet S du graphe. On ajoute un sommet S'. On relie S' à tous les autres sommets A de sorte que SA et $S'A$ soient de la même couleur. Ainsi, $S'AB$ n'est pas monochrome puisque SAB ne l'est pas.
On commence donc avec 15 arêtes, puis on en rajoute $4+5+6+7$, ce qui donne bien 32 arêtes sans triangle monochrome.

Solution de l'exercice 5
Notons qu'il suffit que chacun des mots formés soit la concaténation de deux palindromes, qui vont donner le découpage recherché, et c'est en fait ce que l'on va montrer par récurrence. Sans perte de généralité, à chaque étape, on effectue une transformation du genre $(X, Y) \to (XY, Y)$.

Solution de l'exercice 6
On considère M le triangle de taille minimale contenant tous les points de X. Il est assez facile de voir que ce minimum est atteint, et que sur chaque côté de M se trouve un point de X au moins (éventuellement dans les coins).
A revoir : M le triangle mini contenant tous les points. 3 triangles dans les coins... zones Xa, Xb, Xc...

Solution de l'exercice 7
bon...

Sucreries

Solution de l'exercice 8
bon...