DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Emmanuel LECOUTURIER
STAGE : Montpellier 2012

Inégalités : convexité

- La Théorie -

Définition 1. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est convexe si pour tous points A, B de X on a $[A, B] \subset X$.

Exemple 2. En dimension 1, les ensembles convexes sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 3. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pour tous $x, y \in X$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Autrement dit l'image du barycentre de deux points est plus petite que le barycentre des images de ces deux points.

En fait si on suppose la fonction continue, on a la proposition suivante.

Proposition 4. Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous $x, y \in X$, alors f est convexe.

Démonstration. On peut supposer qu'on est en dimension 1 et que (pour simplifier) $X = [0,1]$ car la convexité se vérifie sur tous les segments de X. Soit E l'ensemble des $\lambda \in [0,1]$ tels que pour tous $x, y \in X$, $f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. On sait que $0{,}1 \in E$. De plus si $\lambda, \mu \in E$ alors $\frac{\lambda+\mu}{2} \in E$ (cela découle de l'hypothèse sur les milieux). Donc E contient les rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ où $k, n \in \mathbb{N}$. Comme ces rationnels sont denses dans $[0,1]$, on conclut par continuité de f. Les détails sont laissés au lecteur. $\square$

On peut automatiquement renforcer l'inégalité de convexité.

Proposition 5. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors si x_1, ..., x_n sont dans $]a,b[$ et que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ où $\lambda_i > 0$, alors $f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$

Proposition 6. Si f et g sont deux fonctions convexes sur X, alors $f + g$ est convexe et λf est convexe pour $\lambda \geqslant 0$.

Le moyen le plus efficace (admis) pour voir si une fonction est convexe est le théorème suivant.

Théorème 7. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$. Alors f est convexe ssi $f'' \geqslant 0$ sur I.

Exemples : Les fonction $x \to x^\alpha$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha \geqslant 1$ ou $\alpha \leqslant 0$. En effet la dérivée seconde est $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

Proposition 8. Sur un intervalle fermé $I = [a,b]$, une fonction convexe atteint son maximum aux bornes de l'intervalle.

Attention, comme nous le verrons en exercice, une fonction de plusieurs variables peut être convexe en chaque variable séparément, mais pas convexe en tant que fonction de trois variables. Cependant on peut quand même essayer d'appliquer la proposition précédente à chaque variable.

- Applications aux inégalités classiques -

Les inégalités entre moyennes découlent de la convexité/concavité de certaines fonctions.

Théorème 9. Comparaison des moyennes quadratique/arithmétique/géométrique/harm
Soient $0 < x_1 \leqslant ... \leqslant x_n$. Alors

$$\left(\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}\right)^{1/2} \geqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geqslant (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

Démonstration. La première inégalité découle de la convexité de la fonction $f : x \to x^2$. La deuxième découle de la concavité de la fonction logarithme. La dernière est une conséquence directe de la deuxième (I.A.G). Pour une preuve détaillée, cf. le poly de Pierre Bornsztein inégalités théorème 8. $\square$

Théorème 10 (Inégalité de Holder)**.** Soit p, $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors si $x_1, ..., x_n > 0$ et $y_1, ..., y_n > 0$, on a

$$a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leqslant (a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \times (b_1^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration. On peut supposer $b_1^q + ... + b_n^q = 1$ car l'inégalité est homogène en les b_i. On sait que la fonction $x \to x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $x_i = \frac{a_i}{b_i^{q-1}}$ et $\lambda_i = b_i^q$. Alors l'inégalité de Holder découle de l'inégalité de convexité appliqué aux x_i avec les rapports λ_i. □

- Exercices -

Exercice 1 Soient $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$. Montrer que $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Exercice 2 Soient $0 < a < b$ et $x_i \in [a, b]$. Prouver que $(x_1 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$.

Exercice 3 Soient $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Montrer que $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2$.

Exercice 4 Soient $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Montrer que $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqslant 1$.

Exercice 5 Soit $ABCD$ un tétraèdre et $KLMN$ un autre tétraèdre dont les sommets sont sur les faces de $ABCD$. Montrer que le périmètre de $KLMN$ est $\leqslant \frac{4}{3}$ fois le périmètre de $ABCD$.

Exercice 6 Soient a, b, c et d tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Montrer que $\sum_{cyc} \sqrt{1 - ab} \leqslant 2\sqrt{3}$.

Exercice 7 (IMO 2001) Soient a, b, c positifs. Montrer que $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$.

- Solutions -

Solution de l'exercice 1 La fonction $f(x) = (x + \frac{1}{x})^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ est somme de fonctions convexes. Donc $f(a) + f(b) \geqslant 2f(\frac{a+b}{2}) = 2f(\frac{1}{2}) = \frac{25}{2}$.

Solution de l'exercice 2 La fonction $f(x_1, ..., x_n) = (x_1 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n})$ est convexe en chaque variable (attention cela ne veut pas dire que f est une fonction convexe). En effet en développant l'expression on obtient une somme de fonctions convexes en chaque variable. Le maximum est donc atteint aux points extrémaux de $[a, b]$, c'est à dire qu'il y a p x_i égaux à a et $n - p$ x_i égaux à b ($0 \leqslant p \leqslant n$). On cherche à minimiser le terme de gauche de l'inégalité en fonction de p. Ce terme est $(pa + (n - p)b)(\frac{p}{a} + \frac{n-p}{b}) = p^2 + (n - p)^2 + (n - p)p(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$. Le coefficient en p est $n(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2)$ et celui en p^2 est $2 - \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Donc

$p^2 + (n-p)^2 + (n-p)p(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$ atteint son minimum pour $p = \frac{n}{2}$ (si on ne considère plus p entier). Et le minimum est alors $\frac{n^2}{4}(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}) = \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$.

Solution de l'exercice 3 La fonction $f(a,b,c)$ du membre de gauche est convexe en chaque variable, donc elle atteint son maximum sur un des 8 points $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ avec $\epsilon_i \in \{0,1\}$ (en effet on utilise le fait que si une fonction $g : [u,v] \to \mathbb{R}$ est convexe alors g atteint son maximum en u ou en v). On vérifie que le maximum correspond à $(1,1,0)$ et vaut 2.

Solution de l'exercice 4 La fonction $f(a,b,c)$ du membre de gauche est convexe en chaque variable, donc elle atteint son maximum sur un des 8 points $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ avec $\epsilon_i \in \{0,1\}$. On vérifie que le maximum vaut 1.

Solution de l'exercice 5 La fonction distance à un point est convexe (le vérifier pour les milieux, en utilisant la formule de la médiane par exemple) donc si le périmètre de KLMN est maximal, alors K, L, M et N sont dans $\{A,B,C,D\}$. Il y a un nombre fini de cas à tester.

Solution de l'exercice 6 On utilise la concavité de $\sqrt{1-x}$ et le fait que $ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{(a+b+c+d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2}$.