DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaires
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Thomas BUDZINSKI
STAGE : Montpellier 2014

Homothéties, rotations, similitudes

1 Résumé du cours :

1.1 Homothéties :

Définition 1. Soient O un point du plan et k un réel non nul. L'*homothétie* de centre O et de rapport k est la transformation qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$.

Proposition 2. Les homothéties conservent les angles, les rapports de longueurs, les droites, les cercles etc... De plus, l'image d'une droite (Δ) par une homothétie est parallèle à Δ.

Proposition 3. La composée de deux homothéties h_1 et h_2 de rapports k_1 et k_2 est une translation si $k_1k_2 = 1$, et une homothétie de rapport k_1k_2 sinon. Dans ce cas, le centre de $h_1 \circ h_2$ est aligné avec ceux de h_1 et de h_2.

Proposition 4. Soient $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments supportés par des droites parallèles. Il existe une unique homothétie envoyant A sur A' et B sur B'.

1.2 Rotations :

Définition 5. Soient O un point du plan et θ un angle. La *rotation* de centre O et d'angle θ est la transformation qui à un point M associe le point M' tel que $OM' = OM$ et $\angle MOM' = \theta$, les angles étant orientés.

Proposition 6. Les rotations conservent les longueurs, les angles, les droites, les cercles etc... De plus, si (Δ') est l'image d'une droite Δ par un rotation d'angle θ, alors l'angle entre les droites (Δ) et (Δ') vaut θ.

Proposition 7.
- La composée de deux rotations d'angles θ et θ' est une translation si $\theta + \theta'$ est un multiple de 2π, et une rotation sinon.
- Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites se coupant en un point O et faisant entre elles un angle θ. On note s_1 et s_2 les symétries par rapport à (Δ_1) et (Δ_2). Alors $s_1 \circ s_2$ est la rotation de centre O et d'angle 2θ.

Proposition 8. Si $[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments non parallèles de même longueur, il existe une unique rotation envoyant A sur A' et B sur B'.

1.3 Similitudes :

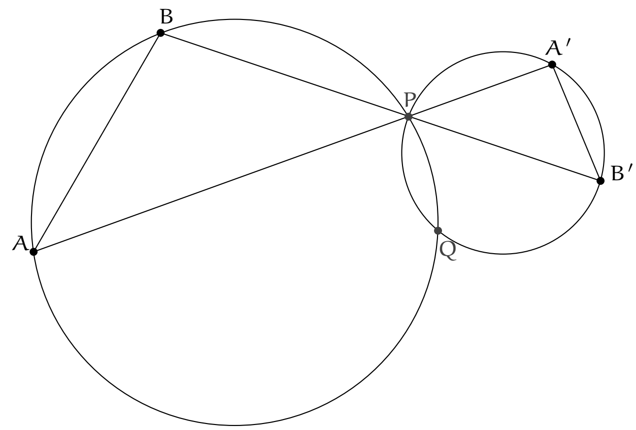
Définition 9.
- Une *similitude* est une transformation qui conserve les rapports de longueurs.
- On peut montrer qu'une similitude conserve les angles. Elle est dite *directe* si elle conserve les angles orientés, et *indirecte* sinon.

Théorème 10.
- Une similitude directe est soit une translation, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre.
- Une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'une symétrie axiale.

Proposition 11. Les similitudes conservent les droites, les cercles, les angles etc... De plus, l'image d'une droite (Δ) par une homothétie est parallèle à Δ.

Proposition 12.
- La composée de deux similitudes est une similitude.
- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe. De plus, le rapport de la composée est le produit des rapports, et l'angle de la composée est la somme des angles.

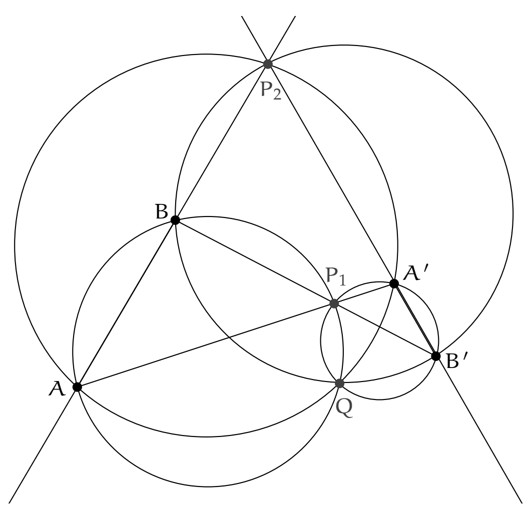
Théorème 13.
- Soient A, B, A' et B' quatre points du plan. Alors il existe une unique similitude directe envoyant A sur A' et B sur B'.
- De plus, soient P l'intersection de (AA') et (BB'), Γ_1 et Γ_2 les cercles circonscrits à PAB et $PA'B'$ et Q la deuxième intersection de Γ_1 et Γ_2. Alors Q est le centre de cette similitude directe.
- Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Alors il existe une similitude envoyant ABC sur $A'B'C'$ ssi ABC et $A'B'C'$ sont semblables.



Remarque 14. Si Q est le centre de la similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B', alors $\frac{QA}{QA'} = \frac{QB}{QB'}$ et $\widehat{AQA'} = \widehat{BQB'}$ donc $\frac{QA}{QB} = \frac{QA'}{QB'}$ et $\widehat{AQB} = \widehat{A'QB'}$, donc Q est aussi le centre de la similitude directe qui envoie A sur B et A' sur B'.

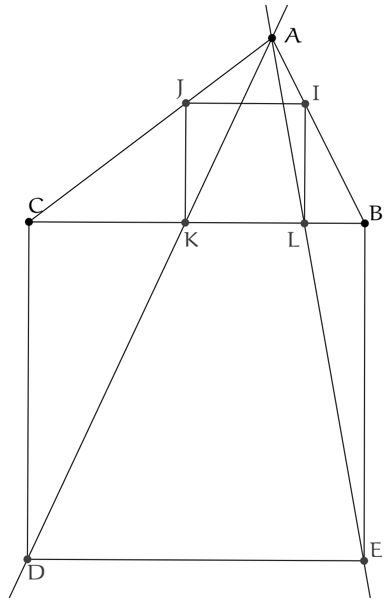
Par conséquent, si on applique la construction du théorème précédent en cherchant à envoyer $[AA']$ sur $[BB']$, on obtiendra le même point Q, d'où le *théorème de Miquel* :

Théorème 15. Soient A, B, A' et B' quatre points, P_1 l'intersection de (AA') et (BB') et P_2 l'intersection de (AB) et $(A'B')$. Alors les cercles circonscrits aux triangles ABP_1, $A'B'P_1$, $AA'P_2$ et $BB'P_1$ passent par un même point.



2 Exercices :

Exercice 1 Soit ABC un triangle. Construire (par exemple à la règle et au compas) un carré ayant deux sommets sur $[BC]$, un sommet sur $[AB]$ et un sommet sur $[AC]$.



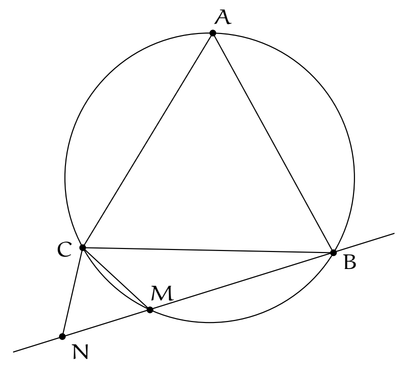
Solution de l'exercice 1 On commence par construire l'image de notre carré par une homothétie bien choisie de centre A. On construit donc le carré $BCDE$ tel que les intérieurs de ABC et $BCDE$ soient disjoints. On note ensuite K l'intersection de (AD) avec (BC), et L l'intersection de (AE) avec (BC). Pour compléter notre carré. On choisit enfin I et J "au-dessus" de K et L tels que $IJKL$ soit un carré. Il reste à vérifier que $i \in [AB]$ et $J \in [AC]$.

On sait qu'il existe h une homothétie de centre A qui envoie (DE) sur (BC). Comme $K \in (AD)$ et $L \in (AE)$, on a $h(D) = K$ et $h(E) = L$. De plus, h envoie un carré sur un carré, donc envoie $BCDE$ sur $IJKL$, donc B sur I et C sur J. Ainsi, A, I et B sont alignés de même que A, J et C. Comme h est de rapport entre 0 et 1, ils sont même alignés dans cet ordre.

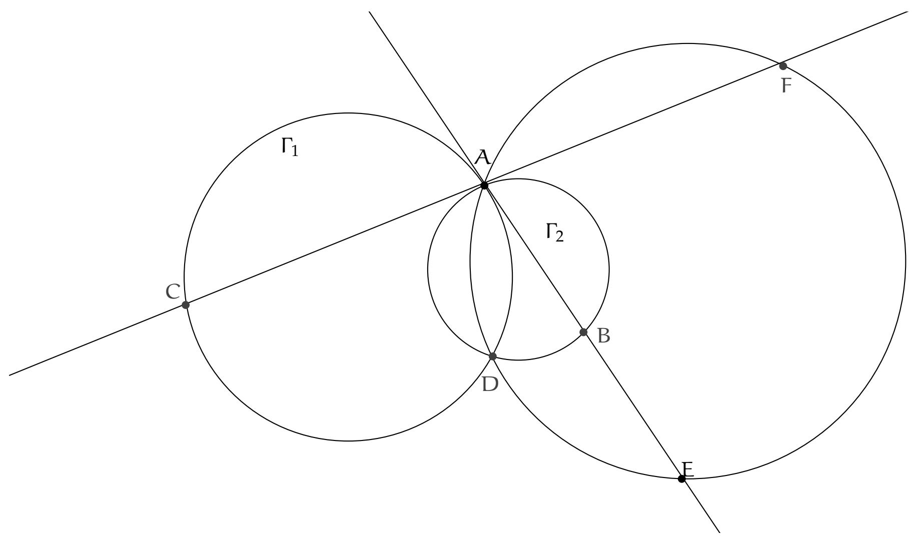
Exercice 2 Soit ABC un triangle équilatéral et M sur son cercle circonscrit, sur l'arc entre B et C ne contenant pas A.
Montrer que $MB + MC = MA$.

Solution de l'exercice 2 En géométrie, il est plus facile de manipuler des sommes de longueurs quand les points considérés sont alignés. Soit donc N le point de (MB) sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B, tel que $MN = MC$: par chasse aux angles, $\angle CMN = 60°$, donc CMN est équilatéral. On veut maintenant montrer $AM = BN$. Or, soit r la rotation de centre C et d'angle $60°$: elle envoie A sur B et M sur N, d'où le résultat.

Exercice 3 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points A et D. La tangente à Γ_1 en A recoupe Γ_2 en B, et la tangente à Γ_2 en A recoupe Γ_1 en C.



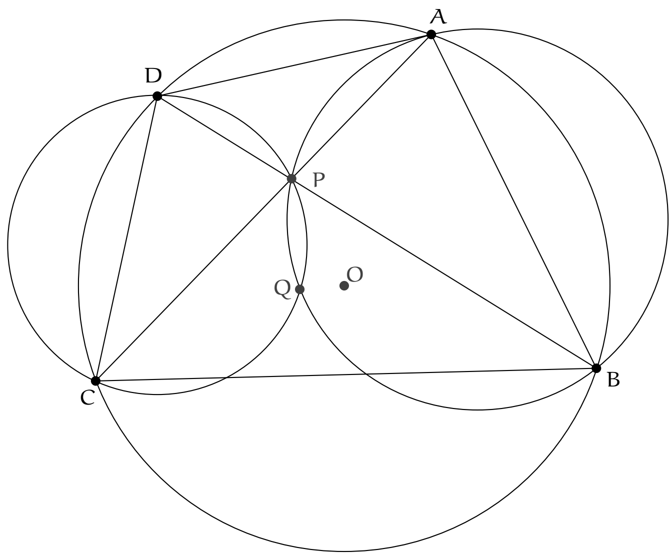
Soit $E \in [AB)$ tel que $BE = AB$, et F la deuxième intersection de $[AC)$ avec le cercle circonscrit Ω à ADE. Montrer que $AC = AF$.



Solution de l'exercice 3 D'après la construction du centre d'une similitude appliquée aux cercles Γ_1 et Γ_2, D est le centre de la similitude directe s_1 qui envoie C sur A et A sur B. En regardant les cercles Γ_1 et Ω, D est le centre de la similitude directe qui envoie C sur F et A sur E, donc le centre de la similitude directe s_2 qui envoie C sur A et F sur E.

Or, comme il existe une unique similitude directe de centre D qui envoie C sur A (car le rapport est forcément $\frac{DA}{DC}$ et l'angle forcément $\widehat{ADC}$), on a $s_1 = s_2$, donc on a une similitude qui envoie C sur A, A sur B et F sur E. Comme B est le milieu de $[AE]$, on en déduit que A est le milieu de $[CF]$.

Exercice 4 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle Γ de centre O. On note P l'intersection des diagonales de $ABCD$. Les cercles circonscrits à PAB et PCD se recoupent en Q. Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

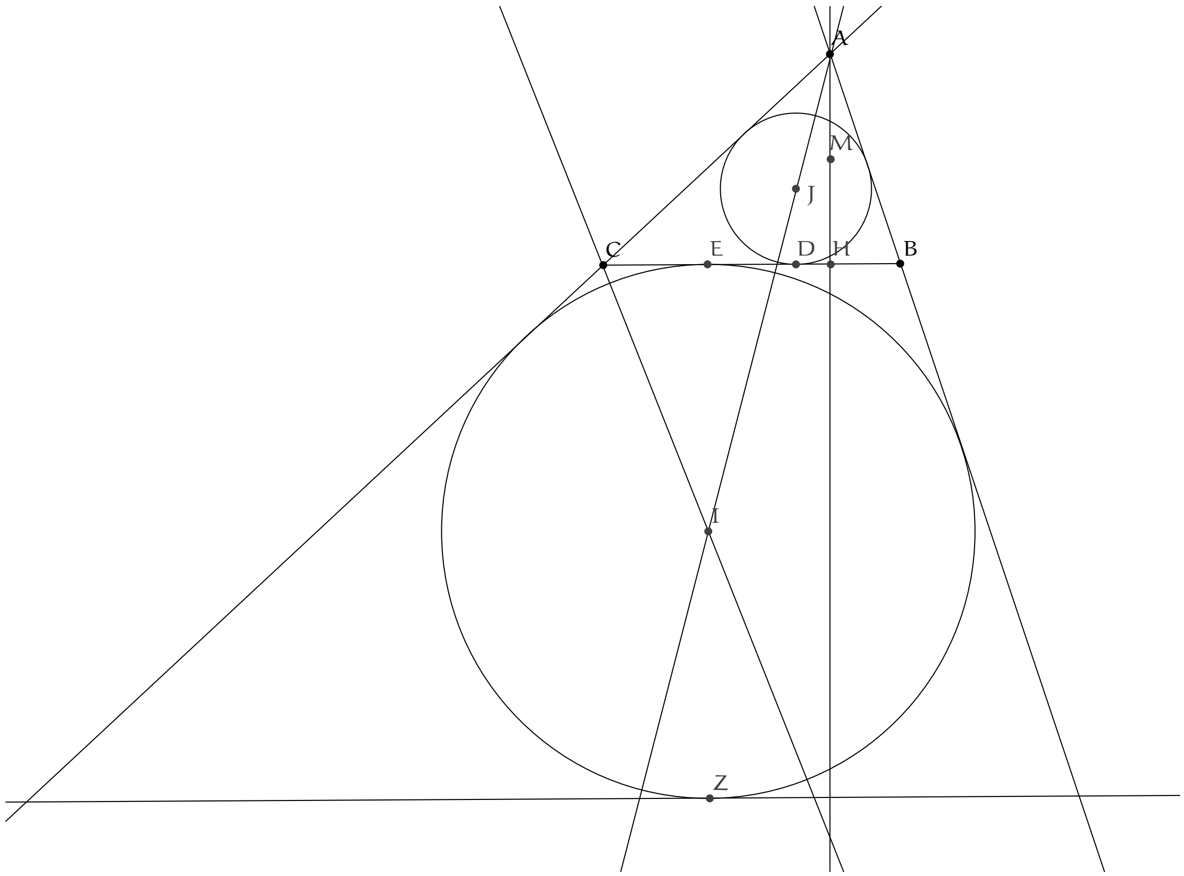


Solution de l'exercice 4 La première chose à remarquer est que Q est le centre de la similitude qui envoie A sur B et C sur D, et donc de celle qui envoie A sur C et B sur D. On devra choisir celle qui nous intéresse plus tard...

Pour faire apparaître des angles droits, on introduit les milieux M et N des diagonales [AC] et [BD] : les angles $\widehat{OMP}$ et $\widehat{ONP}$ sont droits donc O, M, N et P sont cocycliques sur le cercle de diamètre [OP]. Pour pouvoir utiliser M et N, on choisit la similitude s de centre Q qui envoie A sur B et C sur D. Elle envoie M sur N et A sur B, donc la construction du centre d'une similitude montre que Q est l'intersection des cercles circonscrits à MNP et ABP, donc Q est sur le cercle de diamètre [OP], d'où le résultat.

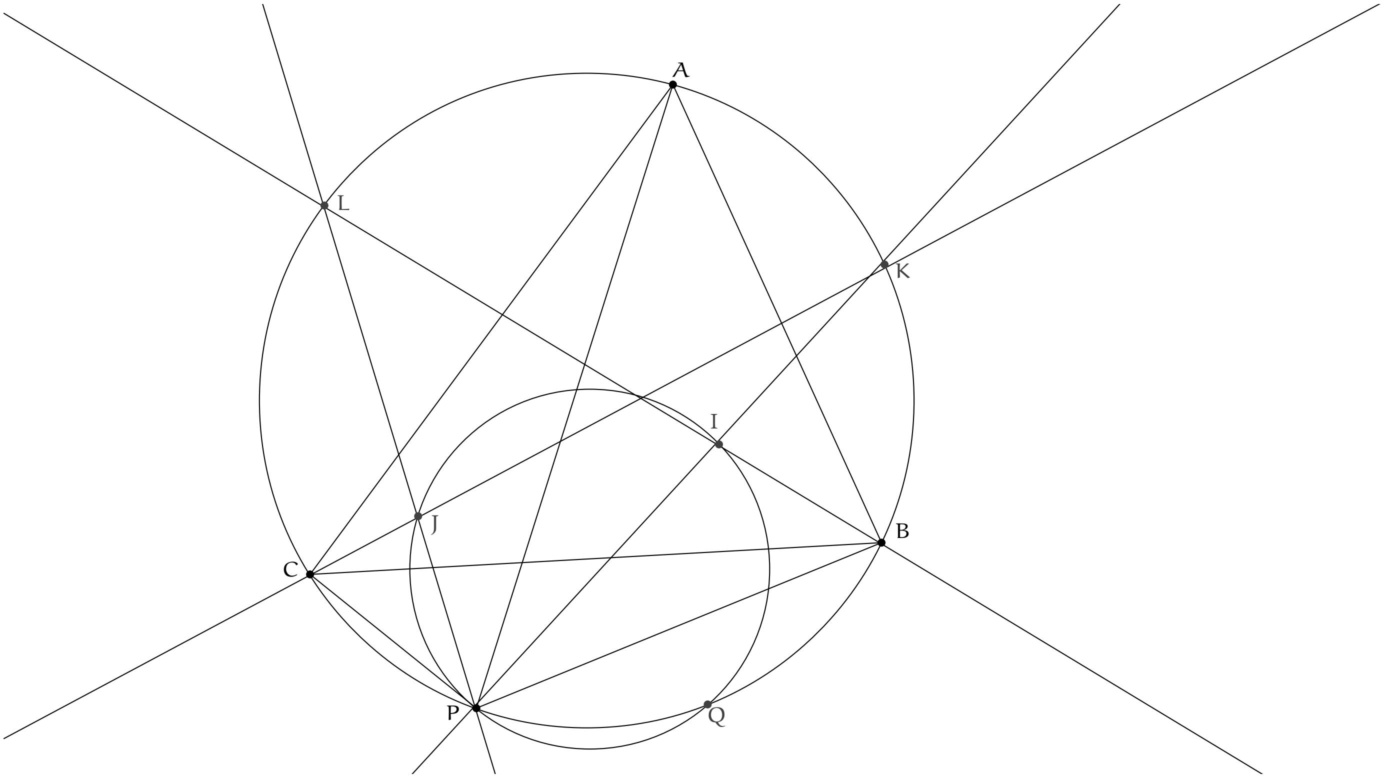
Exercice 5 Soit ABC un triangle, D le point de contact du cercle inscrit avec [BC], J le centre du cercle A-exinscrit et M le milieu de la hauteur issue de A. Montrer que M, D et I sont alignés.

Remarque 16. On rappelle que le cercle A-exinscrit au triangle ABC est le cercle tangent au segment [BC], et aux demi-droites [AB) et [AC).



Solution de l'exercice 5 Soit Z le point "en bas" du cercle exinscrit : l'homothétie de centre A qui envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit envoie D sur Z, donc A, D et Z sont alignés, donc il existe h de centre D qui envoie A sur Z. Elle envoie (BC) sur elle-même, donc la hauteur issue de A sur la droite (IZ), donc le pied H de la hauteur est envoyé sur le point de contact E du cercle exinscrit avec $[BC]$, donc le milieu de la hauteur M est envoyé sur le milieu de $[EZ]$, c'est-à-dire I. D étant le centre de cette homothétie, on en déduit que D, M et I sont alignés.

Exercice 6 Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et P un point variable sur l'arc BC ne contenant pas A. On note I et J les centres des cercles inscrits à PAB et PAC. Montrer que quand P varie, la seconde intersection du cercle circonscrit à PIJ avec Γ est fixe.



Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, on rappelle le théorème dit du Pôle Sud : la bissectrice de $\widehat{ABC}$ recoupe Γ au milieu M de l'arc AC. De plus, M est le centre d'un cercle passant par B, C et le centre du cercle inscrit à ABC. La démonstration de ce théorème est une chasse aux angles simple, laissée en exercice.

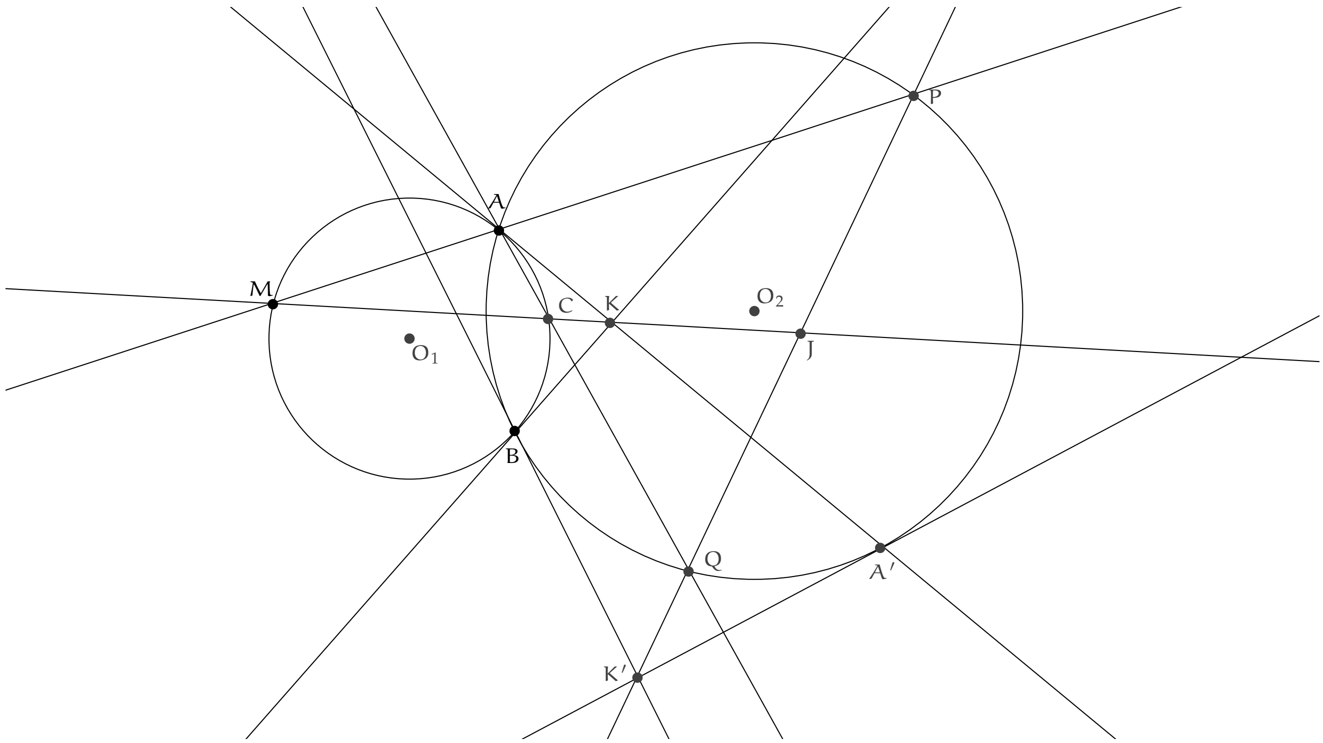
Soient donc K et L les milieux des arcs AB et AC : d'après le théorème du pôle Sud, P, I et K sont alignés de même que P, J et L. De plus, $KA = KB = KI$ et $LA = LC = LJ$. D'après la construction du centre d'une similitude, le second point qui nous intéresse, noté Q, est le centre de la similitude directe qui envoie K sur L et I sur J. Il suffit donc de montrer que la similitude qui envoie K sur L et I sur J est toujours la même.

Or l'angle de la similitude est l'angle entre les deux droites (IK) et (JL), qui vaut $180 - \widehat{KPL} = \widehat{KAL}$; qui est fixe. De plus, le rapport vaut $\frac{JL}{IK} = \frac{AL}{AK}$, fixe aussi. Comme il n'existe qu'une similitude de rapport et d'angle fixé qui envoie K sur L, la similitude qui nous intéresse est toujours la même. En particulier, son centre est fixe.

Exercice 7 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en deux points A et B. Les tangentes à Γ_1 et Γ_2 se coupent en K. Soit M un point variable sur Γ_1, distinct de 1 et B. On note P le second point d'intersection de (MA) et Γ_2, C le second point d'intersection de (MK) et Γ_1, et Q le second point d'intersection de (AC)

avec Γ_2.

– Montrer que (PQ) passe par un point fixe quand M varie.
– Montrer que le milieu de $[PQ]$ est sur la droite (MK).



<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

– D'après la construction du centre d'une similitude, B est le centre d'une similitude directe s qui envoie M sur P, C sur Q, le cercle Γ_1 sur Γ_2. Par conséquent, s envoie (MC) sur (PQ) donc, comme (MC) passe par un point fixe K, (PQ) passe par $s(K)$, noté K'. De plus, on peut construire K' : c'est l'intersection des tangentes à Γ_2 en B et A', où $A' = s(A)$. Or, A' est la seconde intersection de Γ_2 avec la tangente à Γ_1 en A (cela correspond au cas limite quand M tend vers A.
– On note O_1 et O_2 les centres des deux cercles, et J le milieu de $[PQ]$: les angles $\widehat{O_2JK'}$, $\widehat{O_2A'K'}$ et $\widehat{O_2BK'}$ sont droits donc O_2, K', A', B et J sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[O'K']$. De plus $\widehat{K'KO_1} = \widehat{K'KB} + \widehat{BKO_1} = \frac{1}{2}\widehat{A'KB} + \frac{1}{2}\widehat{BKA} = \frac{1}{2}\widehat{A'KA} = 90$, donc K est aussi sur ce cercle.
On a donc $\widehat{BKJ} = 180 - \widehat{BQJ} = 180 - \widehat{BQP} = 180 - \widehat{BKM}$ donc J, K et M sont alignés, d'où le résultat.