DOMAINE : Algèbre, Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Vincent MOULY
STAGE : Montpellier 2013

Exercices de combinatoire et inégalités

- Combinatoire -

Exercice 1 Exprimer le nombre de diagonales d'un n-gône convexe.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Chaque sommet est relié par une diagonale à tous les autres, sauf 3 (ses deux voisins et lui-même). Donc il y a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

En combinatoire on est souvent amené à compter des configurations dont certaines sont considérées équivalentes. On compte alors le nombre total de combinaisons possibles en considérant qu'elles sont différentes, puis on divise par le nombre de combinaisons qui sont équivalentes. Par exemple pour compter ses moutons, un berger compte le nombre total de pattes puis divise par 4, car en considérant que deux pattes sont équivalentes si elles appartiennent au même animal, alors chaque patte est équivalente à 3 autres, donc on les groupe par 4.

Exercice 2 On colorie chaque face d'un cube d'une couleur différente choisie parmi 6. Combien y a-t-il de coloriages distincts ?

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Si l'on considère que le cube est dans une position fixée, il y a $6! = 720$ façons de le colorier. Or, un cube colorié peut être dans 24 positions (6 choix de la face du bas, 4 rotations possibles). Donc il existe $\frac{720}{24} = 32$ coloriages différents.

Exercice 3 n personnes ($\geqslant 3$) sont assises autour d'une table circulaire. Combuen y a-t-il de dispositions distinctes ? On considerera que deux position sont identiques si chaque convive a les même voisins dans les deux positions.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Il y a $n!$ façons de positionner n personnes autour d'une table. Or une table peut être disposée de $2n$ façons différentes : n rotations et une symétrie sont possibles. Donc il existe $\frac{n!}{2n}$ dispositions de tables possibles.

Un deuxième principe important de la combinatoire consiste à compter la même quantité de deux manières différentes. On parle de *double comptage*.

Exercice 4 Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Une première solution calculatoire consistant à utiliser la formule des coefficients binomiaux ne sera pas détaillée ici. Voici une solution combinatoire. Soit un groupe de n personnes. k personnes fondent une association et choisissent un président. Il y a donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir les membres, puis k chefs possibles. Mais on peut d'abord choisir le président (n choix), puis les $n-1$ membres restants, soit $\binom{n}{(n-1)}$ cas. D'où l'égalité par double comptage.

Exercice 5 Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Une première solution calculatoire consistant à utiliser la formule des coefficients binomiaux ne sera pas détaillée ici. Voici une solution combinatoire. Soit un groupe de $2n$ personnes, parmi lesquelles n filles et n garçons. Comptons le nombre de possibilités de former un club avec n membres. C'est $\binom{2n}{n}$. Mais si l'on sait qu'il y a k garçons dans le club, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces k garçons parmi les n, puis il faut completer avec $n-k$ filles. Donc il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ façons de faire un club de n personnes avec k garçons. En sommant pour k de 0 à n on obtient bien l'égalité par double comptage.

- Inégalités : un carré est toujours positif ! -

Une des inégalités les plus simples est la suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$. En remplacant x par une expression plus intéressante puis en développant, on peut obtenir de nombreuses inégalités, dont voici quelques exemples.

Dans les exercices qui suivent, a et b sont des réels strictement positifs.

Exercice 6 (Inégalité arithmético-géométrique)

Montrer que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On développe $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ qui donne $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Exercice 7 Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On développe $(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}})^2 \geqslant 0$, qui donne $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, ou on applique directement l'exercice précédent avec x et $\frac{1}{x}$.

Exercice 8 Soient x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 6.$$

Solution de l'exercice 8 On regroupe un terme et son inverse, et on applique l'exercice précédent, pour obtenir $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z} \geqslant 2+2+2=6$

Exercice 9 Montrer que $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$.

Solution de l'exercice 9 On montre le carré de cette inégalité, c'est-à-dire $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$. Comme $(a-b)^2 \geqslant 0$, on a aussi $2a^2+2b^2 \geqslant a^2+b^2+2ab$ en ajoutant a^2+b^2 et en passant $-2ab$ dans le membre de droite. On en déduit l'inégalité ci-dessus en divisant par 4. Comme chaque membre est positif, on peut prendre la racine de l'inégalité, et on obtient $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$.

Exercice 10 Montrer que $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Solution de l'exercice 10 On développe $(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}})^2 \geqslant 0$, qui donne $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ab}}$ donc l'inégalité cherchée.

En mettant bout à bout toutes ces inégalités, on a :

$$\min(a,b) \leqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \max(a,b)$$

On parle respectivement de moyenne harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique.