DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Margaret BILU
STAGE : Montpellier 2014

Théorie extrémale des graphes

1 Rappels sur les graphes

Un graphe est donné par un ensemble V (de l'anglais « vertex ») de sommets, ainsi qu'un ensemble E (de l'anglais « edge ») d'arêtes, chaque arête reliant deux sommets entre eux. Dans ce cours, nous allons supposer les graphes *finis*, c'est-à-dire que V et E sont des ensembles finis. Nous allons de plus supposer qu'il y a au plus une arête entre deux sommets, et qu'il n'y a pas de boucles, c'est-à-dire d'arêtes reliant un sommet à lui-même. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui en partent, c'est-à-dire le nombre de sommets qui sont reliés à lui. Le degré d'un sommet v sera noté $d(v)$, et l'ensemble des sommets reliés (on dira aussi *adjacents*) à v sera noté $D(v)$. Un ensemble de sommets sans aucune arête est appelé ensemble de sommets indépendants.

Nous noterons, pour tout $n \geqslant 1$, K_n le graphe complet à n sommets, c'est-à-dire le graphe à n sommets dont tout couple de sommets est relié par une arête. Plus généralement, le graphe à n sommets obtenu en partitionnant l'ensemble des sommets en r sous-ensembles disjoints $V_1, \ldots, V_r$ de cardinaux respectifs $n_1, \ldots, n_r$ (de sorte que $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ et $n = n_1 + \ldots + n_r$) et en reliant entre eux tous les couples de sommets n'appartenant pas à un même V_i est appelé graphe multipartite complet correspondant à la partition $n_1, \ldots, n_r$ et noté $K_{n_1,\ldots,n_r}$.

On rappelle le lemme des poignées de mains : $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Pour d'autres rappels et précisions sur la notion de graphe, nous vous invitons à consulter l'excellent polycopié de P. Bornsztein, disponible sur le site d'Animath.

2 Introduction au problème

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la présence ou non de sous-graphes complets dans un graphe. Si un graphe G a 4 sommets, et qu'il ne contient aucun K_3 (on dit qu'il est « sans triangle », alors on peut facilement se convaincre qu'il a au plus 4 arêtes (parmi les 6 arêtes possibles).

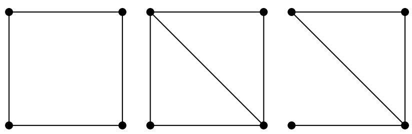
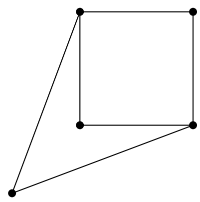


FIGURE 1 – Graphes à 4 sommets sans et avec triangle

Regardons maintenant parmi les graphes à 5 sommets, notés A, B, C, D, E. Un tel graphe a au plus $\binom{5}{2} = 10$ arêtes. S'il est sans triangle, il a au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 2. En effet, sinon, quitte à renommer les sommets, nous pouvons supposer que A est relié à B, C, D. B étant également de degré au moins 3, il est relié à C ou à D, ce qui nous fait un triangle.

Nous pouvons donc supposer que le sommet A par exemple est de degré au plus 2. D'autre part, d'après notre étude des graphes à 4 sommets, pour que notre graphe soit sans triangle, il faut que le nombre d'arêtes reliant deux sommets parmi B, C, D, E soit au plus 4. Un graphe à 5 sommets sans triangle a donc au plus 6 arêtes. De plus, notre raisonnement nous donne automatiquement un exemple d'un tel graphe sans triangle, qui n'est autre que le graphe bipartite complet $K_{2,3}$:



C'est ce genre d'idées que nous allons généraliser dans ce cours, afin de préciser le fait intuitif selon lequel un graphe ayant suffisamment d'arêtes contiendra des triangles, et même des graphes complets plus gros. Nous allons donc nous intéresser à la notion suivante :

Définition 1. Soit $m \geqslant 3$ un entier. On dit qu'un graphe G est m-libre s'il ne contient pas K_m comme sous-graphe. Un graphe 3-libre sera aussi appelé graphe sans triangle.

Remarquons que la notion de graphe multipartite (avec r ensembles de sommets indépendants) ci-dessus nous donne un exemple de graphe $(r+1)$-libre, vu que parmi $r+1$ sommets, nous en aurons toujours deux dans le même ensemble de sommets indépendants, donc non reliés par une arête. En particulier, les graphes bipartites donnent des exemples de graphes sans triangle.

3 Graphes sans triangle : théorème de Mantel

Théorème 2. (Mantel) Si G est un graphe à n sommets sans triangle, alors il a au plus $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arêtes. De plus, le seul graphe à n sommets sans triangle ayant exactement $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arêtes est le graphe bipartite $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Démonstration. Nous allons présenter plusieurs preuves de ce théorème pour illustrer les différentes méthodes que l'on peut employer dans ce cadre. L'initialisation des récurrences a été faite dans le paragraphe d'introduction, et on suppose donc dans les preuves que $n > 4$. Le cas d'égalité ne sera traité que dans la première preuve, l'approche étant similaire pour les autres.

1. **Récurrence en supprimant une arête.** Soit uv une arête dans le graphe G. Puisque u et v n'ont pas de voisin commun, nous avons $d(u) + d(v) \leqslant n$. Si on supprime les sommets u et v, nous obtenons un graphe sans triangle à $n-2$ sommets, qui par hypothèse de récurrence a au plus $\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$ arêtes. Ainsi, le nombre d'arêtes du graphe de départ est inférieur ou égal à $\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor + n - 1 = \lfloor \frac{n^2-4n+4}{4} \rfloor + n - 1 = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
   Pour le cas d'égalité, il faut que toutes les inégalités ci-dessus soient des égalités. Ainsi, $d(u) + d(v) = n$, c'est-à-dire que $D(u) \cup D(v) = V$. Puisque G est sans triangle, $D(u)$ et $D(v)$ sont des ensembles de sommets indépendants, donc G est bipartite. Le graphe

bipartite complet $K_{m,n-m}$ a $m(n-m)$ arêtes, grandeur qui est maximale en $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On vérifie que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ séparément pour n pair et n impair.

2. **Récurrence en supprimant un sommet.** On suppose que c'est vrai pour tous les graphes à $n-1$ sommets. Soit un graphe à n sommets. Alors il a nécessairement un sommet de degré inférieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: sinon, choisissons un sommet v_1. Parmi les sommets adjacents à v_1, choisissons un sommet v_2. Nous avons $|D(v_1)| \geqslant 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $|D(v_2)| \geqslant 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, d'où
$$|D(v_1) \cap D(v_2)| = |D(v_1)| + |D(v_2)| - |D(v_1) \cup D(v_2)| \geqslant 2 + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n > 2\left(\frac{n}{2}\right) - n \geqslant 0.$$
Donc il existe un sommet $v_3 \in D(v_1) \cap D(v_2)$, ce qui nous fait un triangle.
Soit donc un sommet v_n de degré inférieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Par hypothèse de récurrence, le graphe à $n-1$ sommets sans triangle obtenu en supprimant v_n et toutes les arêtes qui en partent a au plus $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ arêtes. Donc notre graphe à n sommets a au plus $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arêtes. Cette dernière quantité est inférieure à $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n^2+1}{4} \rfloor$. Puisqu'un carré est toujours congru à 0 ou à 1 modulo 4, nous avons $\lfloor \frac{n^2+1}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, ce qui conclut.
3. **Inégalités** Pour toute arête uv, nous avons $d(u)+d(v) \leqslant n$ comme ci-dessus. En sommant cela sur toutes les arêtes uv, on obtient
$$\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) \leqslant |E|n.$$
Dans le côté gauche, chaque terme $d(u)$ apparaît autant de fois qu'il y a d'arêtes partant de u, donc $d(u)$ fois. Ainsi, on a
$$\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) = \sum_{u \in V} d(u)^2.$$
Nous savons que $\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$ (lemme des poignées de mains). Par Cauchy-Schwarz, on a
$$|E|n \geqslant \sum_{u \in V} d(u)^2 \geqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 = 2\frac{|E|^2}{n},$$
d'où $|E| \leqslant \frac{n^2}{4}$.

□

4 Estimation du nombre de triangles

Soit G un graphe, et soient

T_0 = {ensembles de trois sommets de G deux-à-deux non reliés}
T_1 = {ensembles de trois sommets de G tels qu'exactement deux d'entre eux soient reliés.}
T_2 = {ensembles de trois sommets de G tels qu'exactement deux d'entre eux soient non reliés.}

ainsi que T_3 l'ensemble des triangles.

Ce premier lemme précise la technique utilisée dans la troisième preuve du théorème de Mantel :

Lemme 3. On a $|T_3| \geqslant \frac{1}{3}\sum_{uv\in E}(d(u)+d(v)-n)$

Démonstration. Le nombre de triangles ayant pour côté uv est

$$|D(u)\cap D(v)| = |D(u)| + |D(v)| - |D(u)\cup D(v)| \geqslant d(u)+d(v)-n.$$

Puisque chaque triangle a trois côtés, chaque triangle est compté trois fois dans la somme $\sum_{uv\in E}(d(u)+d(v)-n)$, d'où le résultat. □

Lemme 4. On a

$$|T_1| + |T_2| = \frac{1}{2}\sum_{u\in V}(d(u)(n-1-d(u))).$$

Démonstration. La somme $\sum_{u\in V}(d(u)(n-1-d(u)))$ compte le nombre de triplets (x,y,z) avec x,y reliés par une arête et z non relié à x. Les éléments de T_1 sont en correspondance exacte avec les paires de triplets de la forme $\{(x,y,z),(y,x,z)\}$ avec x et y reliés, x et z non reliés et y et z non reliés. Les paires de T_2 sont quant à elles en correspondance exacte avec les paires de triplets de la forme $\{(x,y,z),(z,y,x)\}$ avec x et y reliés, x et z non reliés et y et z reliés. Chaque élément de $T_1\cup T_2$ est donc compté exactement deux fois dans la somme considérée, d'où le résultat. □

Lemme 5. On a

$$|T_2| + 3|T_3| = \sum_{u\in V}\binom{d(u)}{2}.$$

Démonstration. Pour chaque sommet u, le terme $\binom{d(u)}{2}$ compte le nombre de couples de sommets parmi les voisins de u. Chaque élément de T_2 est donc compté exactement une fois, et chaque triangle est compté trois fois, une fois pour chaque sommet, d'où le résultat. □

5 Sommets de petit degré

Dans la deuxième preuve du théorème de Mantel, nous avons montré que l'absence de triangles force l'existence d'un sommet de « petit » degré. Le résultat suivant donne une borne explicite sur le degré d'un tel sommet, dans le cas des triangles mais aussi dans le cas de graphes complets plus gros.

Lemme 6. (Zarankiewicz) Soit $k \geqslant 3$ un entier. Si G est un graphe k-libre à n sommets, alors il existe un sommet de degré inférieur ou égal à $\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \rfloor$.

Démonstration. Dans cette preuve nous utilisons à répétition le fait que pour deux sous-ensembles de sommets A et B de G,

$$|A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B| \geqslant |A| + |B| - n. \tag{1}$$

Supposons que la conclusion du lemme soit fausse, en prenons un sommet v_1. On peut choisir $v_2 \in D(v_1)$, et de plus d'après (1),

$$|D(v_1)\cap D(v_2)| \geqslant d(v_1) + d(v_2) - n > 2\left(\frac{k-2}{k-1}n\right) - n > 0,$$

donc il existe $v_3 \in D(v_1)\cap D(v_2)$. Soit $j \leqslant k-1$, et supposons construits des sommets $v_1,\dots,v_j$ tels que pour tout $\ell \in \{2,\dots,\ell-1\}, v_\ell \in \cap_{i=1}^{\ell-1}V(v_i)$ et

$$\left|\cap_{i=1}^{j} D(v_i)\right| \geqslant j\left(1 + \left\lfloor\frac{k-2}{k-1}n\right\rfloor\right) - (j-1)n.$$

Puisque $j \leqslant k-1$, on a

$$\left|\cap_{i=1}^{j} D(v_i)\right| > j\frac{k-2}{k-1}n - (j-1)n \geqslant (k-2)n - (j-1)n \geqslant 0,$$

donc il existe $v_{j+1} \in \cap_{i=1}^{j} D(v_i)$, et de plus

$$\left|\cap_{i=1}^{j+1} D(v_i)\right| \geqslant \left|\cap_{i=1}^{j} D(v_i)\right| + |D(v_{j+1})| - n \geqslant (j+1)\left(1 + \left\lfloor \frac{k-1}{k-2} n \right\rfloor\right) - jn.$$

On construit ainsi par récurrence des sommets $v_1, \ldots, v_k$ formant un graphe complet à k sommets, contradiction. $\square$

Exercice 1 Soit un ensemble de 2013 points tel que parmi trois quelconques de ces points, il y en ait toujours deux à distance inférieure ou égale à 1. Montrer qu'alors il en existe 1007 que l'on peut recouvrir avec un disque de rayon 1.

Solution de l'exercice 1 On considère le graphe dont les sommets sont les points, et une arête relie deux points si la distance entre ceux-ci est strictement supérieure à 1. Il existe un sommet v de degré inférieur ou égal à $\lfloor \frac{2013}{2} \rfloor = 1006$. Cela veut dire qu'il existe $2012 - 1006 = 1006$ points qui ne sont pas reliés à v, et qui sont donc à distance inférieure ou égale à 1 de lui. Le disque de centre v et de rayon 1 répond à la question.

6 Le théorème de Turán

Dans ce qui précède, nous avons vu que pour obtenir un graphe sans triangle, il suffit de prendre un graphe bipartite, c'est-à-dire un graphe constitué de deux ensembles de sommets indépendants, car alors tout ensemble de trois sommets a au moins deux sommets dans l'un de ces deux ensembles de sommets indépendants. De plus, le théorème de Mantel dit que si à nombre de sommets n fixé on veut maximiser le nombre d'arêtes, il faut que le graphe bipartite soit complet et que les sommets soient équirepartis autant que possible entre les deux ensembles de sommets indépendants.

En s'inspirant de cela, on trouve facilement un moyen de construire à coup sûr un graphe $s+1$-libre pour tout $s \geqslant 2$: il suffit de prendre un graphe multipartite avec s ensembles de sommets indépendants. Fixons maintenant le nombre n de sommets. Si on veut maximiser le nombre d'arêtes, cela paraît judicieux de repartir les sommets aussi équitablement que possible entre les ensembles de sommets indépendants. On pose donc la division euclidienne $n = as + b$ de n par s, et on considère le graphe s-partite complet $K_{a+1,\ldots,a+1,a\ldots,a}$ où $a+1$ apparaît b fois et a apparaît $s-b$ fois. Autrement dit, on met $a+1$ sommets dans b ensembles de sommets indépendants, et a sommets dans les autres, et on relie tous les sommets appartenant à des ensembles de sommets indépendants distincts. On notera se graphe $T(n,s)$ et on l'appellera graphe de Turán. On note $t(n,s)$ son nombre d'arêtes.

Remarque 7. L'entier a ci-dessus n'est autre que $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$, et $T(n,r) = K_{\lceil \frac{n}{r} \rceil, \ldots, \lceil \frac{n}{r} \rceil, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor}$, où $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ intervient b fois.

Exercice 2 Montrer que $t(n-s,s) + (n-s)(s-1) + \binom{s}{2} = t(n,s)$. En déduire que $t(n,s) \leqslant \lfloor \frac{s-1}{2s} n^2 \rfloor$.

Solution de l'exercice 2 Si $n = as + b$ est la division euclidienne de n par s, celle de $n-s$ par s s'obtient simplement en remplaçant a par $a-1$. Ainsi, $T(n-s,s)$ s'obtient à partir de $T(n,s)$

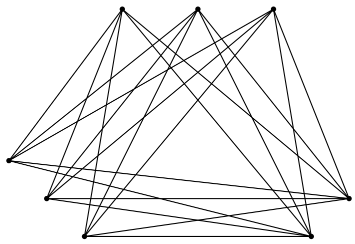


FIGURE 2 – Le graphe $T(8,3)$

en enlevant un sommet dans chaque ensemble de sommets indépendants. Cela enlève d'une part les arêtes entre deux sommets supprimés, qui sont au nombre de $\binom{s}{2}$, et d'autre part les arêtes ayant exactement une extrémité parmi les sommets supprimés : il y en a $(n-s)(s-1)$, car choisir une telle arête revient à choisir l'un des $n-s$ sommets non supprimés, ainsi que l'un des $s-1$ sommets supprimés qui ne sont pas dans le même ensemble de sommets indépendants. Une récurrence sur a permet ensuite de prouver la borne demandée.

Remarque 8. On peut montrer plus précisément que

$$t(n,s) \leqslant \frac{s-1}{s}\frac{n^2-b^2}{2} + \binom{b}{2}$$

arêtes, où b est le reste de la division euclidienne de n par s.

Théorème 9. (Turán) Si un graphe G à n sommets est $s+1$-libre alors son nombre d'arêtes est inférieur ou égal à $t(n,s)$. De plus, il y a égalité si et seulement si $G = T(n,s)$.

Autrement dit, de même que dans le cas des graphes sans triangles, le graphe de Turán maximise le nombre d'arêtes que peut avoir un graphe r-libre.

Démonstration. On fait une récurrence sur $a = \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$. Si $a = 0$, le graphe a strictement moins de s sommets donc est nécessairement $s+1$-libre, et moins de $\binom{n}{2} = \binom{b}{2} = t(n,s)$ arêtes.

Supposons que la conclusion est vraie pour $a-1$, et considérons un graphe G à n sommets, $s+1$ libre, ayant un nombre maximal d'arêtes, c'est-à-dire que l'ajout de n'importe quelle arête ferait apparaître un K_{s+1}. Cette dernière supposition implique que G contient une copie H de K_s. Par $s+1$-liberté, chaque sommet n'appartenant pas à H est relié à au plus $s-1$ sommets de H. De plus, le graphe $G\backslash H$ est K_{s+1} libre et possède $n-s = (a-1)s+b$ sommets, donc par hypothèse de récurrence il a au plus $t(n-s,s)$ arêtes. Le nombre d'arêtes de G est donc au plus

$$\underbrace{t(n-s,s)}_{\text{arêtes de } G\backslash H} + \underbrace{(n-s)(s-1)}_{\text{arêtes entre } H \text{ et } G\backslash H} + \underbrace{\binom{s}{2}}_{\text{arêtes de } H}.$$

D'après l'exercice ci-dessus, cette expression vaut exactement $t(n,s)$. □

7 Exercices

Exercice 3 Soit G un graphe tel que la moyenne des degrés de ses sommets soit supérieure ou égale à $(1/2+c)n$, avec $c > 0$. Montrer que G contient au moins $c\binom{n}{3}$ triangles.

Exercice 4 Soit G un graphe de degré moyen d. Montrer que G contient un sous-graphe H dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à $\frac{d}{2}$

Exercice 5 Il y a n participants à un colloque, chacun connaissant au plus k langues. Pour chaque groupe de trois participants, il y en a au moins deux qui parlent une même langue. Trouver la plus petite valeur de n telle que pour toute distribution de langues satisfaisant ces propriétés, on puisse trouver une langue parlée par au moins trois délégués.

Exercice 6 On considère 21 points sur un cercle. Montrer qu'au moins 100 paires de ces points définissent un angle au centre inférieur ou égal à 120°.

Exercice 7 Soit $n \geqslant 2$ un entier. On appelle *intervalle* un sous-ensemble $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ tel qu'il existe $1 \leqslant a < b \leqslant n$ tels que $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. Soient $A_1, \dots, A_N$ des sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ tels que si $1 \leqslant i < j \leqslant n$ alors $A_i \cap A_j$ est un intervalle. Montrer que $N \leqslant \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ et que cette borne est optimale.

Exercice 8 Montrer qu'un graphe à n sommets et m arêtes a au moins $\frac{m}{3n}(4m - n^2)$ triangles.

Exercice 9 Soit G un graphe de n sommets ayant au moins $\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ arêtes. Montrer qu'il contient un triangle ou un 4-cycle.

Exercice 10 Il y a 1991 participants à un événement sportif. Chacun d'eux connait au moins n autres participants (le fait de se connaître est réciproque). Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle il existe nécessairement un groupe de 6 participants se connaissant deux à deux ?

Exercice 11 (IMO 2003) Soit A un sous-ensemble de $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ ayant exactement 101 éléments. Montrer qu'il existe $t_1, \dots, t_{100} \in S$ tels que les ensembles $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$ soient disjoints.

Exercice 12 Soit G un graphe. Montrer qu'il contient un ensemble de sommets indépendants de cardinal supérieur ou égal à

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

Exercice 13 Soit $n \geqslant 2$, et soit G un graphe avec $2n$ sommets et $n^2 + 1$ arêtes. Montrer que G contient K_4 privé d'une arête (ou, autrement dit, deux triangles avec un côté en commun).

Exercice 14 Soit G un graphe 4-libre, et tel que son nombre de sommets soit un multiple de trois. Quel est le nombre maximal de triangles de G ?

Exercice 15

1. (Théorème de Dirac) Soit un graphe G à $n \geqslant 3$ sommets tel que les degrés de tous ses sommets soient supérieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$. Montrer que G admet un cycle hamiltonien, c'est-à-dire qu'il est possible de parcourir tous les sommets du graphe une et une seule fois et de revenir au point de départ.
2. Soit un graphe G à $n \geqslant 3$ sommets tel que les degrés de tous ses sommets soient supérieurs ou égaux à $\frac{n+1}{2}$. Montrer qu'alors pour toute arête e, G admet un cycle hamiltonien passant par e.

Exercice 16 Dans un pays, il y a $n \geqslant 5$ villes, desservies par deux compagnies aériennes. Tout couple de villes est relié par au plus une des deux compagnies aériennes (une liaison est toujours dans les deux sens). Une restriction gouvernementale impose que, si on enchaîne strictement moins de 6 vols avec une même compagnie, on ne puisse pas se retrouver dans la ville d'où on est parti. Montrer que ces deux compagnies offrent à elles deux moins de $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$.

Exercice 17 (Shortlist 2001) Soit G un graphe fini 5-libre, et tel que deux triangles ont toujours au moins un sommet en commun. Montrer qu'il suffit d'enlever au plus deux sommets pour que le graphe ne contienne plus de triangles.

Exercice 18 (Shortlist 2012) On se donne 2^{500} points sur un cercle, numérotés $1, \dots, 2^{500}$ dans un certain ordre. Montrer que l'on peut choisir 100 cordes reliant certains de ces points, disjointes deux à deux, et telles que, si pour chaque corde on calcule la somme des deux nombres situés à ses extrémités, on obtienne 100 sommes distinctes.

8 Solutions

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Notons d la moyenne des degrés des sommets. Soit $uv \in E$ une arête. Le nombre de triangles contenant E est égal à

$$|D(u) \cap D(v)| \geqslant d(u) + d(v) - n.$$

En sommant sur toutes les arêtes, vu que chaque triangle correspond à trois arêtes, le nombre de triangles est au moins égal à

$$\frac{1}{3} \sum_{uv \in E} (d(u) + d(v) - n).$$

Chaque terme $d(u)$ dans cette somme est compté autant de fois qu'il y a d'arêtes uv, donc $d(u)$ fois. Ainsi, le nombre de triangles est supérieur ou égal à

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(\sum_{v \in V} d(v)^2 - n|E|\right) &\geqslant \frac{1}{3}(nd^2 - n|E|) \\ &= \frac{1}{3}nd(d - \frac{n}{2}). \end{aligned}$$

Si $d = cn + \frac{n}{2}$, alors on obtient que le nombre de triangles est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}cdn$. En utilisant que $d \geqslant \frac{n}{2}$, on obtient le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Nous allons enlever les sommets de G un à un jusqu'à arriver un tel sous-graphe. Le nombre total d'arêtes est $\frac{nd}{2}$. S'il existe un sommet de degré inférieur strictement à $\frac{d}{2}$, on l'enlève. Cela enlève $< \frac{d}{2}$ arêtes. Ce processus doit nécessairement se terminer, vu que sinon le nombre d'arêtes sera toujours strictement positif quand on aura enlevé tous les sommets.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Remarquons d'abord que $n \geqslant 2k+3$. En effet, si $n = 2k+2$, répartissons les participants en deux groupes de $k+1$ personnes. On prend $2\binom{k+1}{2}$ langues différentes, que l'on distribue parmi les couples de personnes d'un même groupe, de sorte que deux personnes n'appartenant pas au même groupe ne puissent pas communiquer. Dès qu'on prend trois personnes, il y en a deux qui appartiennent au même groupe, et ont donc une langue en commun.

Montrons maintenant que $n = 2k+3$ convient. Considérons le graphe à $2k+3$ sommets dont les sommets sont les participants du colloque, et les arêtes relient deux participants n'ayant pas de langue en commun. D'après l'énoncé, ce graphe est sans triangle. Pour faire apparaître trois personnes parlant la même langue, il faut faire apparaître « beaucoup »de personnes parlant la même langue qu'un certain individu A, car alors deux d'entre elles auront une langue en commun parce que le nombre de langues parlées par A est limité. Il faut donc faire apparaître un sommet de petit degré dans ce graphe. Or nous savons qu'il existe un sommet A de degré $\lfloor \frac{2k+3}{2} \rfloor \geqslant k+1$. Il existe donc $k+1$ participants $A_1, \ldots, A_{k+1}$ pouvant communiquer avec A. Or A ne parle qu'au plus k langues, donc il existe deux participants A_i et A_j parlant la même langue parmi ces k langues. A, A_i, A_j ont donc une langue en commun.

Remarque 10. La disposition pour $n = 2k+2$ est exactement le graphe de Turán $T(2k+2, 2)$.

Solution de l'exercice 6 Trouvons le bon graphe sans triangle : on relie deux points si l'angle au centre qu'ils définissent est strictement supérieur à 120°. Trois tels points ne sont alors jamais reliés deux à deux, donc le graphe est sans triangle. Le nombre d'arêtes est alors inférieur ou égal à $21^2/4$, donc à 110. Dans le graphe complémentaire il y a donc $\binom{21}{2} - 110 = 100$ arêtes, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7 La borne à montrer suggère de ramener le problème à la construction d'un graphe sans triangle à n sommets et N arêtes. On construit un graphe G dont les sommets sont les entiers $1, \ldots, n$, et où deux entiers a et b sont reliés par une arête s'il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $a = \min A_i$ et $b = \max A_i$. Si A_i et A_j vérifient $\{\min A_i, \max A_i\} = \{\min A_j, \max A_j\}$, alors, puisque $A_i \cap A_j$ est un intervalle, $A_i = A_j$. Le nombre d'arêtes du graphe est donc exactement N. De plus, ce graphe est sans triangle : en effet, soient trois entiers $a < b < c$ reliés deux à deux, et $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ tels que A_i et A_j correspondent respectivement aux arêtes ab et bc. Alors $A_i \cap A_j \subset \{b\}$, impossible car un intervalle a au moins deux éléments (cela prouve plus généralement qu'un entier n'est relié qu'à des entiers soit tous plus grands, soit tous plus petits que lui, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être maximum et minimum en même temps).

D'après le théorème de Mantel, nous avons donc la borne cherchée. De plus, elle est atteinte quand G est le graphe bipartite complet $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, les deux ensembles de sommets indépendants correspondant respectivement à $\{1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ et à $\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \ldots, n\}$.

Solution de l'exercice 8 Le nombre de triangles est supérieur ou égal à

$$\frac{1}{3} \sum_{uv \in E} (d(u) + d(v) - n) \geqslant \frac{1}{3} \left(\sum_{u \in V} d(u)^2 - nm \right) \geqslant \frac{1}{3} \left(\frac{4m^2}{n} - nm \right) = \frac{m}{3n} \left(4m - n^2 \right).$$

Solution de l'exercice 9 Supposons le contraire, et soit un sommet x de degré $d(x) = d$. Montrons d'abord

$$\sum_{y \text{ adjacent à } x} \deg(y) \leqslant n - 1$$

Deux voisins de x quelconques ne sont pas reliés car notre graphe n'a pas de triangle. Donc un sommet compté dans la somme du côté gauche est nécessairement soit x (qui est compté d fois, une fois pour chaque y adjacent à x), soit l'un des $n - d - 1$ sommets autres que x ou ses voisins. Si un tel sommet est compté deux fois, c'est qu'il est relié à deux voisins de x, or cela n'est pas possible car cela créerait un 4-cycle. Ainsi, la somme considérée est inférieure ou égale à $1 \times d + (n - d - 1) \times 1 = n - 1$.

Or

$$n(n-1) \geqslant \sum_{x \in V} \sum_{y \text{ adjacent à } x} \deg(y) = \sum_{y \in V} \deg(y)^2 \geqslant \frac{1}{n} \left(\deg(y)\right)^2 = \frac{1}{n} (2|E|)^2,$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice 10 On construit un graphe dont les sommets sont les participants, reliés par une arête lorsqu'ils se connaissent. Alors tout sommet est de degré au moins n, et on cherche la valeur minimale de n pour laquelle ce graphe contient nécessairement K_6. D'après le lemme de Zarankiewicz, un graphe 6-libre à 1991 sommets contient au moins un sommet de degré inférieur ou égal à $\lfloor \frac{4\times 1991}{5} \rfloor = 1592$. Le borne $n \geqslant 1593$ est donc suffisante. D'autre part, elle est optimale si on considère le graphe de Turán 6-libre $T(1991, 5)$. Ce graphe est le graphe complet 5-partite avec 399 arêtes dans une des parties et 398 dans les autres. Le degré minimal d'un sommet de se graphe est par conséquent $1991 - 399 = 1592$.

Solution de l'exercice 11 L'énoncé nous invite à considérer le graphe dont les sommets sont les éléments de S et tel que deux sommets a et b sont reliés si les ensembles $\{x + a | x \in A\}$ et $\{x + b | x \in A\}$ sont disjoints. On veut montrer que ce graphe n'est pas 100-libre. Pour utiliser le théorème de Turán, on va chercher à minorer le nombre d'arêtes du graphe. Deux éléments distincts a et b de S sont reliés si et seulement si pour tous $x, y \in A$, on a $x - y \neq a - b$. Comme l'ensemble A a 101 éléments, cela fait au plus 101×100 différences possibles. Ainsi, pour un élément a de S fixé, il y a au plus 101×100 sommets non reliés à a dans G, c'est-à-dire que le degré de tout sommet de G est supérieur ou égal à $10^6 - 10100 - 1$. G a donc au moins

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in V} d(v) \geqslant \frac{10^6(10^6 - 10100 - 1)}{2}$$

arêtes. Il reste à vérifier que cette dernière valeur est supérieure à $\frac{98}{2\times 99}(10^6)^2$, c'est à dire que $99(10^6 - 10101) > 98 \times 10^6$, donc $10^6 \geqslant 99 \times 10101 = 999999$, ce qui est vrai.

Solution de l'exercice 12 Notons $f(G) = \sum_{v \in G} \frac{1}{1+d(v)}$. On raisonne par récurrence sur le nombre n de sommets de G. Quand $n = 1$, c'est clair. Supposons que c'est vrai pour tous les graphes à $n - 1$ sommets, et considérons G à n sommets. Soit v_0 un sommet de degré minimal d dans G, et $v_1, \dots, v_d$ ses voisins. On considère le graphe G' obtenu à partir de G en supprimant les sommets $v_0, \dots, v_d$. Si G' est vide, alors $d = n - 1$ et par minimalité de d, G est le graphe complet à n sommets et $f(G) = n \times \frac{1}{n} = 1$, donc la conclusion est clairement vraie.

Supposons maintenant que G' est non vide. Alors par hypothèse de récurrence, G' contient un ensemble I' de sommets indépendants de cardinal supérieur ou égal à $f(G')$, et $I := I' \cup \{v_0\}$ est un ensemble de sommets indépendants dans G.

Si on note $d'(v)$ le degré d'un sommet v de G', nous avons clairement $d'(v) \leqslant d(v)$. De plus, pour tout i, $d(v_i) \geqslant d = d(v_0)$ Nous avons donc

$$f(G') = \sum_{v \in G'} \frac{1}{1 + d'(v)} = f(G) - \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{1 + d(v_i)} \geqslant f(G) - \frac{1 + d}{1 + d} = f(G) - 1,$$

d'où

$$|I| \geqslant |I'| + 1 \geqslant f(G') + 1 \geqslant f(G),$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13 On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est clair. Supposons que c'est vrai pour n, et considérons un graphe G avec $2(n + 1) = 2n + 2$ sommets et $(n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$ arêtes. D'après le théorème de Mantel, il contient un triangle formé de trois sommets u, v, w. Parmi les sommets du triangle, il y en a deux, disons u et v, dont les degrés ont la même parité. Considérons le sous-graphe de G obtenu en supprimant u et v

ainsi que les arêtes qui en partent. Si le sous-graphe en question a au moins n^2+1 arêtes, on a fini par hypothèse de récurrence. Sinon, cela veut dire qu'au moins $2n+2$ arêtes de G ont au moins une extrémité appartenant à l'ensemble $\{u, v\}$. Puisque u et v sont reliés par une arête, le nombre de telles arêtes est également donné par la quantité $d(u)+d(v)-1$, qui est impaire car $d(u)$ et $d(v)$ sont de même parité. Ainsi,

$$d(u)+d(v)-1 \geqslant 2n+2.$$

Le nombre d'arêtes partant de u ou de v et différentes de uv, uw, vw est donc supérieur ou égal à $2n$. Puisqu'il n'y a que $2n-1$ sommets différents de u, v, w, par le principe des tiroirs il y en a au moins relié relié aussi bien à u qu'à v, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Pour toute arête e, on note $d(e)$ le nombre de triangles ayant l'arête e pour côté, autrement dit, le nombre de sommets reliés aux deux extrémités de e. Nous allons adopter la méthode de comptage de triangles ci-dessus en utilisant cette notion de degré d'une arête à la place du degré d'un sommet.

Soit $3k$ le nombre de sommets de G. Nous allons commencer par montrer que si e, f, g sont trois arêtes formant un triangle,

$$d(e)+d(f)+d(g) \leqslant 3k.$$

En effet, dans le cas contraire, par le principe des tiroirs il existe nécessairement un sommet du graphe, différent des extrémités de e, f, g, qui est compté deux fois dans le côté gauche, donc qui est sommet de deux triangles ayant deux de ces arêtes pour côté. Or cela impliquerait l'existence d'un K_4, contradiction.

En notant t le nombre de triangles et en sommant l'inégalité ci-dessus sur tous les triangles, on obtient

$$\sum_{\text{triangles}} (d(e)+d(f)+d(g)) \leqslant 3kt.$$

Dans la somme du côté gauche, chaque $d(e)$ est compté autant de fois qu'il y a de triangles contenant e, donc $d(e)$ fois. Ainsi, le côté gauche vaut $\sum_{\text{arêtes}} d(e)^2$. On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$3kt \geqslant \sum_{\text{arêtes}} d(e)^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{\text{arêtes}} d(e)\right)^2}{m}$$

où l'on note m le nombre d'arêtes du graphe. Dans la somme $\sum_{\text{arêtes}} d(e)$, chaque triangle est compté trois fois (une fois pour chacun de ses côtés), elle vaut donc $3t$.

Nous avons donc $mk \geqslant 3t$. D'autre part, d'après le théorème de Turán, $m \leqslant \frac{(3k^2)}{3} = 3k^2$. Nous avons donc $t \leqslant k^3$.

Réciproquement, pour montrer que ce résultat est optimal, le fait que nous ayons utilisé le théorème de Turán pour le démontrer nous suggère de considérer le graphe de Turán $K_{k,k,k}$, 4-libre car tripartite. Le nombre de triangles est clairement k^3.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

1. On raisonne par l'absurde, et on prend parmi les graphes à n sommets pour lesquels le résultat à montrer n'est pas vrai, un graphe G avec un nombre d'arêtes maximal. Ainsi, l'ajout de n'importe quelle arête à G (ce qui ne change pas le fait que les degrés sont supérieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$) fait apparaître un cycle hamiltonien.

Soient x et y deux sommets non adjacents. Puisque l'ajout de l'arête xy crée un cycle hamiltonien, il existe un chemin hamiltonien (c'est-à-dire parcourant tous les sommets du graphe une et une seule fois) $x = z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = y$ allant de x à y. Les ensembles

$$\{i : x \text{ adjacent à } z_{i+1}\}$$

et

$$\{i : y \text{ adjacent à } z_i\}$$

sont tous les deux contenus dans $\{1, \dots, n-1\}$, et de cardinal supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$, donc ils ont une intersection non vide. Soit j un élément de cette intersection. Alors x est adjacent à z_{j+1} et y est adjacent à z_j, donc on obtient un cycle hamiltonien

$$y, z_2, \dots, z_j, z, z_{n-1}, \dots, z_{j+1}, y,$$

contradiction.

2. Soient x et y les extrémités de l'arête e. D'après la question précédente, il existe un cycle hamiltonien H. S'il passe par e, on a fini. Sinon, soit x' le successeur de x, et y' celui de y dans ce cycle. On considère le chemin qui commence en x', qui parcourt H dans le sens direct jusqu'en y, puis qui va en x en suivant l'arête e, et qui parcourt H en sens inverse pour arriver à y'. Si x' et y' sont reliés par une arête, on a fabriqué un cycle hamiltonien contenant e. Sinon, notons

$$x' = z_1, z_2, \dots, z_k = y, z_{k+1} = x, z_{k+2}, \dots, z_n = y'$$

ce chemin, et considérons les ensembles

$$\{i : x' \text{ adjacent à } z_{i+1}\} \backslash k$$

et

$$\{i : y' \text{ adjacent à } z_i\} \backslash k.$$

Ils sont inclus dans l'ensemble $\{1, \dots, n-1\} \backslash k$ de cardinal $n-2$ et chacun d'eux est de cardinal supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$, donc ils s'intersectent nécessairement en un entier $p \neq k$. Il suffit alors de considérer le cycle hamiltonien

$$x' = z_1, z_2, \dots, z_p, y' = z_n, z_{n-1}, \dots, z_{p+1}, x'.$$

Puisque $p \neq k$, l'arête $e = z_k z_{k+1}$ y appartient bien, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> On considère le graphe G dont les sommets sont les n villes, deux villes étant reliées par une arête rouge ou bleue si l'une ou l'autre des deux compagnies propose un vol direct entre ces villes. L'hypothèse de l'énoncé signifie qu'il n'y a pas de 3-, 4- ou 5- cycles monochromes. Raisonnons par l'absurde et supposons que le nombre d'arêtes est strictement plus grand que $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$. Alors d'après le théorème de Turán, G contient K_4. Avec la condition sur les 3- et 4-cycles, on vérifie facilement que si on appelle A_1, A_2, A_3, A_4 les sommets de cette copie H de K_4 à l'intérieur de G, quitte à les renommer, les arêtes A_1A_2, A_2A_3 et A_3A_4 sont rouges et les autres sont bleues.

Regardons alors les $n-4$ autres sommets. Chacun de ces sommets ne peut être relié par plus de deux arêtes à des sommets de H. En effet, s'il y en a 3, il y en a deux de la même couleur, qui avec celles de H forment soit un 3-cycle, soit un 4-cycle, ce qui contredit l'énoncé.

Cette remarque nous permet d'éliminer les cas $5 \leqslant n \leqslant 8$. En effet, le nombre d'arêtes de notre graphe est au plus

$$\underbrace{6}_{\text{arêtes de } H} + \underbrace{2(n-4)}_{\text{arêtes entre } H \text{ et } G\backslash H} + \underbrace{\binom{n-4}{2}}_{\text{arêtes de } G\backslash H}.$$

On vérifie que c'est inférieur à $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pour $5 \leqslant n \leqslant 8$. La conclusion de l'énoncé est donc vraie pour ces valeurs de n.

Supposons donc maintenant que $n \geqslant 9$, et faisons une récurrence, initialisée par ce que nous venons de montrer : par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour $G\backslash H$, graphe à $n-4 \geqslant 5$ sommets. Le nombre d'arêtes de $G\backslash K$ est donc inférieur ou égal à $\frac{(n-4)^2}{3}$. Alors le nombre d'arêtes de G est inférieur ou égal à

$$6 + 2(n-4) + \frac{(n-4)^2}{3}.$$

Nous avons donc $6 + 2(n-4) + \frac{(n-4)^2}{3} \geqslant \frac{n^2}{3}$, ce qui donne $n \leqslant 5$, contradiction.

Solution de l'exercice 17 Nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Le graphe contient une copie de K_4, dont nous appellerons les sommets A, B, C, D. Tout triangle contient alors au moins deux sommets parmi A, B, C, D. Supposons qu'il existe deux triangles contenant deux paires de sommets disjointes parmi A, B, C, D : sans perte de généralité, nous pouvons les appeler EAB et FCD. Ces deux triangles ont un sommet en commun, donc $E = F$. Nous aboutissons alors à une contradiction car $EABCD$ est dans ce cas un graphe complet à 5 sommets. Soit maintenant un triangle, que nous pouvons sans perte de généralité noter EAB. Alors d'après ce qui précède tout autre triangle doit nécessairement contenir A ou B. Ainsi, il suffit de supprimer les points A et B pour ne plus avoir de triangle.
2. Le graphe ne contient pas K_4, mais contient K_4 privé d'une arête, c'est-à-dire deux triangles partageant un côté. Notons A, B, C, D ces sommets, avec A et D non reliés. Un triangle qui ne contient ni B, ni C, doit, pour avoir un sommet en commun avec ABC et BCD, contenir A et D, ce qui est impossible car A et D ne sont pas reliés. Donc tout triangle contient B ou C. Il suffit donc de supprimer B et C.
3. Deux triangles quelconques ont exactement un sommet en commun. Soient ABC et ADE des triangles, avec B, C, D, E nécessairement tous distincts. Soit un autre triangle, et supposons qu'il ne contient pas A. Alors sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il contient B et D. Cela veut dire que B et D sont reliés, ce qui fait apparaître un triangle ABD ayant deux sommets en commun avec ABC, contradiction. Ainsi, tout triangle contient A et il suffit de supprimer A.

Solution de l'exercice 18 Dans toute la suite pour simplifier nous noterons $n = 2^{499}$, de sorte qu'il y a $2n$ points numérotés $1, \ldots, 2n$ et que les sommes différentes possibles aux extrémités d'une corde sont $3, 4, \ldots, 4n-1$. On considère des couleurs que l'on appelle $c_3, c_4, \ldots, c_{4n-1}$ et on colorie une corde avec la couleur c_i si la somme des nombres à ses extrémités est i. Ainsi, deux cordes ayant exactement une extrémité en commun auront des couleurs différentes.

Pour chaque couleur c, on considère le graphe G_c dont les sommets sont les cordes de couleur c, et dont deux sommets sont reliés par une arête s'ils correspondent à des cordes qui ne sont pas disjointes. Le but est de montrer qu'il existe une couleur c telle que G_c contienne un ensemble de 100 sommets indépendants. Pour cela, nous allons utiliser le résultat de l'exercice 12, en montrant que la moyenne des quantités $f(G_c) = \sum_{v \in G_c} \frac{1}{1+d(v)}$ sur tous les graphes G_c est strictement supérieure à 100.

Chaque corde ℓ divise le cercle en deux arcs, et par le principe des tiroirs l'un des deux arcs contient un nombre $m(\ell)$ de points inférieur ou égal à $n-1$ en son intérieur. Pour tout $i = 0, 1 \ldots, n-2$, il y $2n$ cordes ℓ avec $m(\ell) = i$. Une telle corde a un degré inférieur ou égal à i dans le graphe G_c correspondant à sa couleur c : en effet, les cordes de couleur c qu'elle intersecte doivent nécessairement avoir une extrémité parmi les i points du « petit »arc qu'elle intercepte, et deux cordes de même couleur ont des extrémités distinctes.

D'après ce que nous venons de voir, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-2\}$, les $2n$ cordes ℓ telles que $m(\ell) = i$ contribuent au moins avec un terme $\frac{2n}{1+i}$ à la somme $\sum_c f(G_c)$. Il y a $4n-3$ couleurs en tout, donc en prenant la moyenne sur toutes les couleurs, cela donne qu'il existe une couleur c telle que

$$f(G_c) \geqslant \frac{2n}{4n-3} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Il reste donc à montrer que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} > 200$ pour $n = 499$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} &= 1 + \sum_{k=1}^{499} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i} \\ &> 1 + \sum_{k=1}^{499} \frac{2^{k-1}}{2^k} \\ &= 1 + \frac{499}{2} > 200, \end{aligned}$$

ce qui conclut.