DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours

AUTEUR : Nicolas SÉGARRA
STAGE : Montpellier 2014

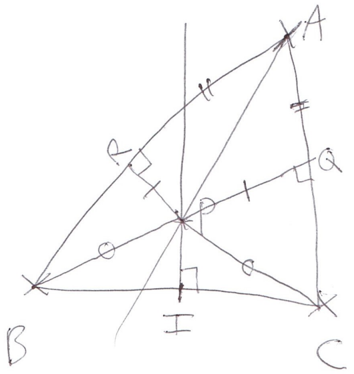
Géométrie du triangle

Introduction.

Commençons par énoncer et démontrer un théorème bien surprenant !

Théorème. Tout triangle est isocèle.

Démonstration.



Soit ABC un triangle. Supposons par l'absurde que ABC n'est pas isocèle en A. Soit P le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice du segment $[BC]$. Soient Q et R les projetés orthogonaux de P sur les droites (AC) et (AB), respectivement (i.e : le point Q est l'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (AC) passant par P). Traçons rapidement un schéma à main levée pour pouvoir mieux raisonner !

Les triangles APR et APQ ont deux angles en commun donc ils sont semblables. Comme ils ont aussi le côté $[AP]$ en commun, ils sont même isométriques, donc $AR = AQ$ et $PR = PQ$. Le point P appartient à la médiatrice du segment $[BC]$ donc $PB = PC$. Les triangles PRB et PQC sont rectangles respectivement en R et en Q donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $RB^2 = PB^2 - PR^2$ et $QC^2 = PC^2 - PQ^2$. Comme, $PB = PC$ et $PR = PQ$, on en déduit que : $RB^2 = QC^2$ donc $RB = QC$ (les longueurs étant toujours positives !). Finalement, on a : $AB = AR + RB = AQ + QC = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en A ! Ce qui contredit l'hypothèse de départ donc tous les triangles sont isocèles !

Bien sûr, ce théorème est totalement faux donc la démonstration est également fausse. Mais où est l'erreur ? Elle est subtile : elle se trouve dans les égalités : $AB = AR + RB = AQ + QC$. Sur notre schéma à main levée (qui est bien trop imprécis et même faux pour "pouvoir mieux raisonner" comme il est écrit ci-dessus !), on voit que P est à l'intérieur du triangle et du coup, les points R et Q appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, ce qui n'est pas vrai si P est à l'extérieur du triangle ! En fait, on a même prouvé par l'absurde que le point P se trouve toujours à l'extérieur du triangle ABC si ABC n'est pas isocèle (et que l'on suppose non plat !) et ainsi, l'un des points Q et R sera à l'extérieur du triangle si ce dernier n'est pas isocèle. D'où l'importance de raisonner sur de bonnes figures et même, si possible, sur plusieurs figures !

I) Droites et points remarquables du triangle.

Pour cette partie, des rappels oraux concernant les définitions et propriétés connues (au programme du collège) ont été faits.

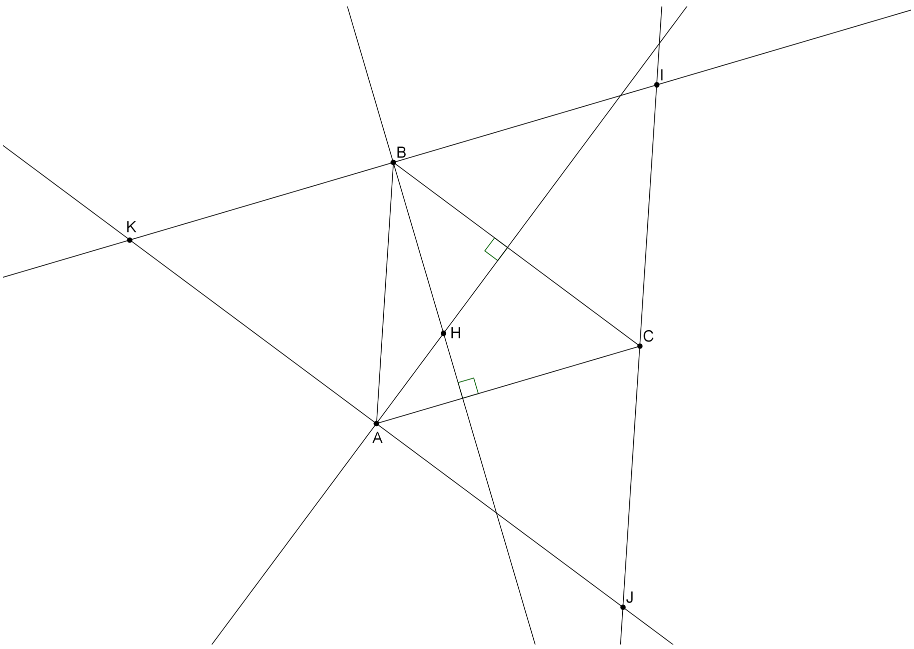
1) Médiatrices et cercle circonscrit.

La définition de la médiatrice d'un segment et les propriétés ont été rappelées à l'oral.

2) Hauteurs.

Propriété. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Démonstration. Soit ABC un triangle.
La parallèle à (AB) passant par C et la parallèle à (AC) passant par B se coupent en I, la parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AB) passant par C se coupent en J et enfin, la parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (BC) passant par A se coupent en K.



On a : $(AK) \parallel (BC)$ et $(BK) \parallel (AC)$ donc $AKBC$ est un parallélogramme donc $AK = BC$. De plus, $(AJ) \parallel (BC)$ et $(CJ) \parallel (AB)$ donc $ABCJ$ est un parallélogramme. Ainsi, $BC = AJ$. Comme $A \in [KJ]$ et $AK = AJ$, on en déduit que A est le milieu du segment $[KJ]$. De même, on montre que C est le milieu de $[IJ]$ et que B est le milieu de $[IK]$.

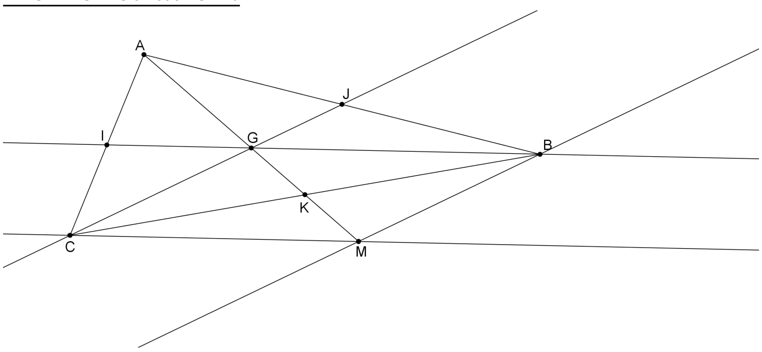
Soit (d_1) la médiatrice du segment $[JK]$. Ainsi, A appartient à (d_1) car A est le milieu de $[KJ]$. De plus, les droites (d_1) et (JK) sont perpendiculaires et les droites (JK) et (BC) sont parallèles donc les droites (d_1) et (BC) sont perpendiculaires. Donc, la droite (d_1) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
De même, nous montrons que la médiatrice de $[IK]$ est la hauteur issue de B dans le triangle

ABC et que la médiatrice de $[IJ]$ est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
Or, les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes donc les trois médiatrices du triangle IJK sont concourantes, ce qui prouve que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

3) Médianes.

Propriétés.
1) Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé : centre de gravité du triangle.
2) Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

Démonstration.



Soit ABC un triangle. On note : I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$. Les droites (BI) et (CJ) sont alors des médianes du triangle ABC. Les droites (CJ) et (BI) ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes en un point que l'on note G. Enfin, on note M le symétrique du point A par rapport à G.

1) D'après le théorème des milieux appliqué aux triangles ACM et ABM, on en déduit que : $(IG) \parallel (CM)$ et que : $(GJ) \parallel (BM)$. Comme $G \in (IB)$ et $(IG) \parallel (CM)$, $(GB) \parallel (CM)$. De même, on montre que $(CG) \parallel (BM)$. Donc le quadrilatère $BMCG$ est un parallélogramme. Ses diagonales : $[BC]$ et $[GM]$ ont alors le même milieu : K (puisque par hypothèse K est le milieu de $[BC]$). Le point K est alors le milieu du segment $[GM]$ et comme M est le symétrique de A par rapport à G, on en déduit que les points A, G, K et M sont alignés. Ainsi, $G \in (AK)$. Donc les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

2) Raisonnons vectoriellement pour gagner en précision. On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ car G est le milieu de $[AM]$.
Ainsi, par relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GK}$ (en utilisant le fait que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{KM}$ car K est le milieu de $[GM]$). Puis, par relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ ainsi, $\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AK} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$. On montre exactement de la même façon que : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ et que : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.

Conséquence. Une conséquence des relations vectorielles précédemment établies est le fait que le centre de gravité d'un triangle est toujours à l'intérieur de ce triangle.

Exercice 1. Soient ABC un triangle et G son centre de gravité. Montrer la relation : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

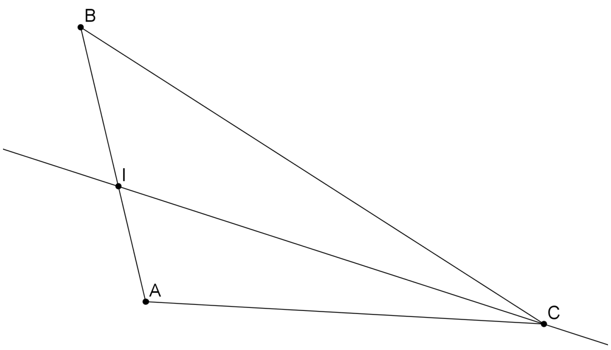
Solution de l'exercice 1. On reprend les notations de la démonstration précédente et on rappelle tout d'abord la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$. On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GK}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ (en utilisant le fait que : $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ car K est le milieu du segment $[GM]$) ainsi, on obtient : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ d'où : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Remarque. La relation de l'exercice : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ nous apprend que le point G est le barycentre des points A, B et C, chacun affecté du coefficient 1 (par exemple !). On note : $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$. On dit aussi que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

4) Bissectrices.

Définition. La bissectrice d'un angle est la demi-droite (on peut aussi la définir en tant que droite) qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

Propriétés de la bissectrice.
1) Un point appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement si ce point est équidistant des deux côtés de l'angle.
2) Soit ABC un triangle. Soit $I \in [AB]$, la droite (CI) est la bissectrice intérieure issue de C si et seulement si $\frac{CA}{CB} = \frac{IA}{IB}$.



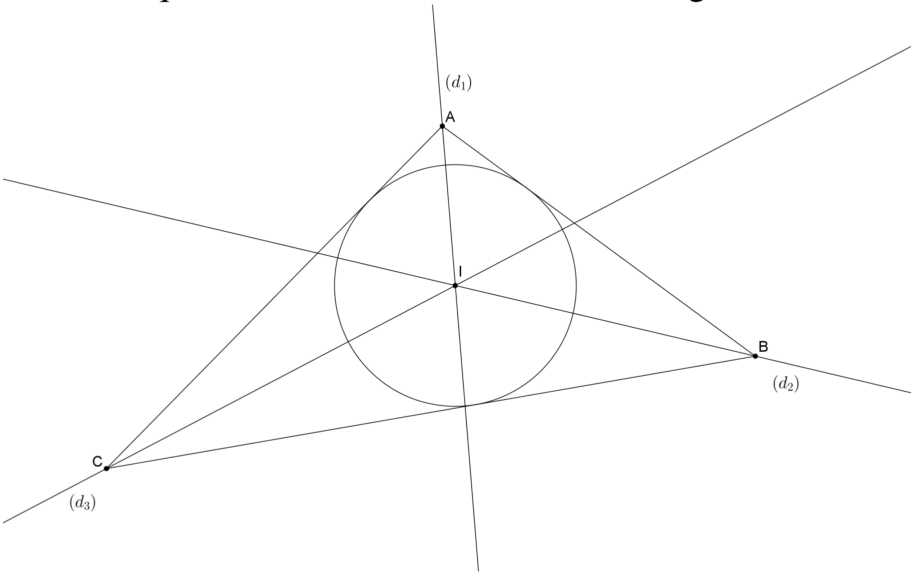
Propriété. Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point et ce point est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Démonstration.

Soient ABC un triangle et (d_1), (d_2) et (d_3) les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ respectivement.
Soit I le point d'intersection de (d_1) et (d_2).

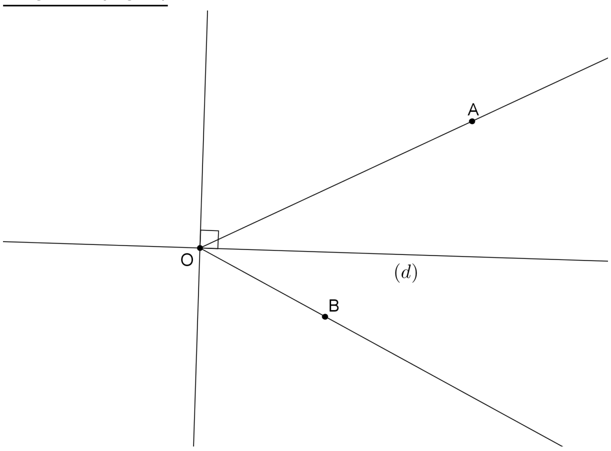
Notation : pour un point M et une droite (AB), la distance du point M à la droite (AB) est notée : $d(M, (AB))$.

Le point I appartient à (d_1) donc à la bissectrice de $\widehat{BAC}$ donc $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$.
Le point I appartient à (d_2) donc à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ donc $d(I,(AB)) = d(I,(BC))$.
Ainsi, on a : $d(I,(AC)) = d(I,(BC))$ donc le point I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ donc $I \in (d_3)$.
Par conséquent, les trois bissectrices du triangle ABC sont concourantes en I.

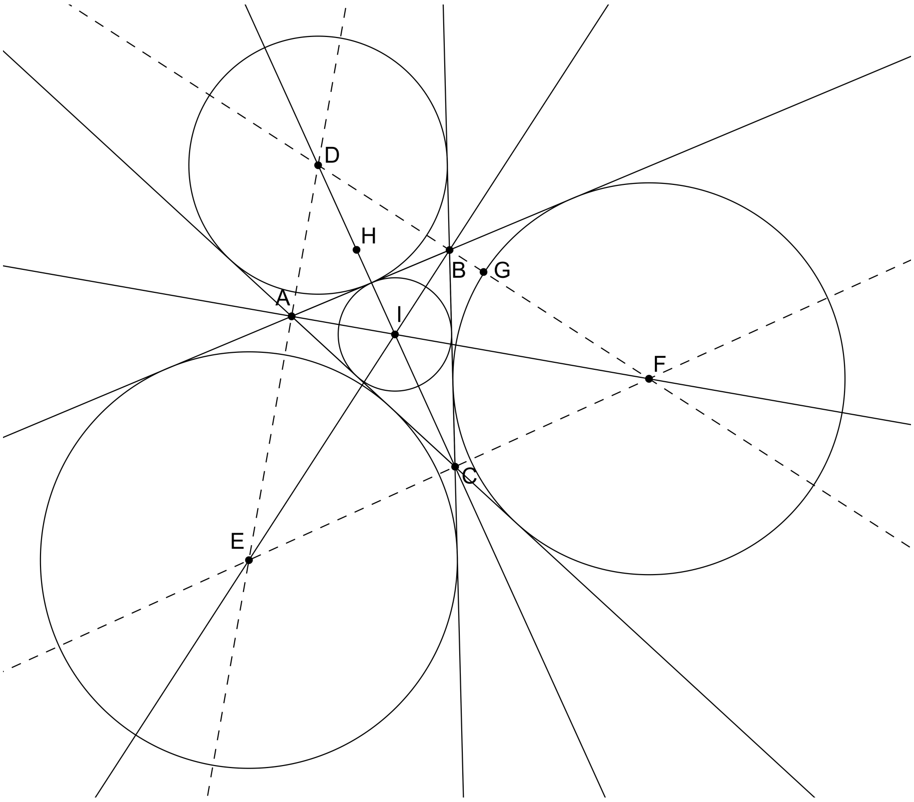


Définition. Le cercle inscrit à un triangle ABC est le cercle tangent aux trois côtés du triangle ABC.

Définition.



On considère un angle $\widehat{AOB}$. Soit (d) sa bissectrice intérieure.
On appelle : bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{AOB}$ la droite perpendiculaire à (d) passant par le point O.
Définition.



Sur la figure, on a tracé en traits pleins les bissectrices intérieures (les droites (AI), (BI) et (CI)) du triangle ABC et en pointillés les bissectrices extérieures.
On remarque que les bissectrices extérieures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ainsi que la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ACB}$ sont concourantes en un point D. On voit que le point D est le centre d'un cercle appelé : cercle exinscrit du triangle ABC. On voit aussi que le cercle exinscrit de centre D est tangent au segment $[AB]$ et aux droites (AC) et (BC).
Enfin, on remarque qu'il a deux autres cercles exinscrits (de centres E et F sur la figure) construits de la même façon que le premier et ayant des propriétés similaires au cercle exinscrit de centre D.

Exercice 2. On reprend les notations de la définition précédente.
Montrer que les milieux des segments $[DF]$ et $[DI]$ appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution de l'exercice 2. Soit G le milieu du segment $[DF]$. La bissectrice intérieure d'un angle et sa bissectrice extérieure sont perpendiculaires donc les angles $\widehat{DAF}$ et $\widehat{FCD}$ sont droits. Ainsi, les triangles ADF et DFC ont le même cercle circonscrit et alors les points A, D, F et C sont cocycliques.
Dans le cercle circonscrit au triangle ADF, l'angle inscrit $\widehat{AFD}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AGD}$ donc on a : $\widehat{AGD} = 2\widehat{AFD} \Rightarrow \widehat{AGB} = 2\widehat{AFB}$. On a : $\widehat{AIB} = 180 - (\widehat{IAB} + \widehat{IBA}) = 180 - \dfrac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{CBA})$. De plus, $\widehat{FIB} = 180 - \widehat{AIB} = \dfrac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{ABC})$. Enfin, $\widehat{AFB} = \widehat{IFB} = 90 - \widehat{FIB} = 90 - \dfrac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{ABC})$ et ainsi, $\widehat{AGB} = 180 - (\widehat{CAB} + \widehat{ABC}) = \widehat{BCA}$. Ainsi, par la réciproque du théorème de l'angle inscrit, les points A, C, G et B sont cocycliques donc G appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit H le milieu du segment $[DI]$. On montre comme précédemment que les points D, B, I et A sont cocycliques : ils appartiennent tous au cercle circonscrit au triangle AID.
Dans ce cercle, l'angle inscrit $\widehat{ADI}$ et l'angle au centre $\widehat{AHI}$ interceptent le même arc donc $\widehat{AHI} = 2\widehat{ADI}$. On montre comme précédemment que : $\widehat{AIH} = \dfrac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{BCA})$ et que : $\widehat{ADI} = 90 - \widehat{AIH} = 90 - \dfrac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{BCA})$ ainsi, $\widehat{AHI} = \widehat{AHC} = \widehat{ABC}$. Par conséquent, les points H, A, B et C sont cocycliques et alors H appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

II) Droite d'Euler et cercle d'Euler.

1) Droite d'Euler.

Exercice 3 : droite d'Euler. Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit.
1) Démontrer la relation vectorielle : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
2) En déduire que les points O, G et H sont alignés.

Solution de l'exercice 3.
1) Soit H' le point tel que : $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Soit A' le milieu du segment $[BC]$.
Par la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C} \Rightarrow \overrightarrow{AH'} = 2\overrightarrow{OA'}$ ($\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ car A' est le milieu de $[BC]$). Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AH'}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires donc les droites (AH') et (OA') sont parallèles. Or, (OA') est la médiatrice de $[BC]$ (car O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et A' est le milieu de $[BC]$), donc on a : $(AH') \perp (BC)$. Ainsi, (AH') est la hauteur issue de A dans le triangle ABC donc $H' \in (AH)$. On montre de même que $H' \in (BH)$ donc $H' = H$.
2) On écrit : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$ et comme, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, on en déduit que : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Donc les points O, G et H sont alignés.

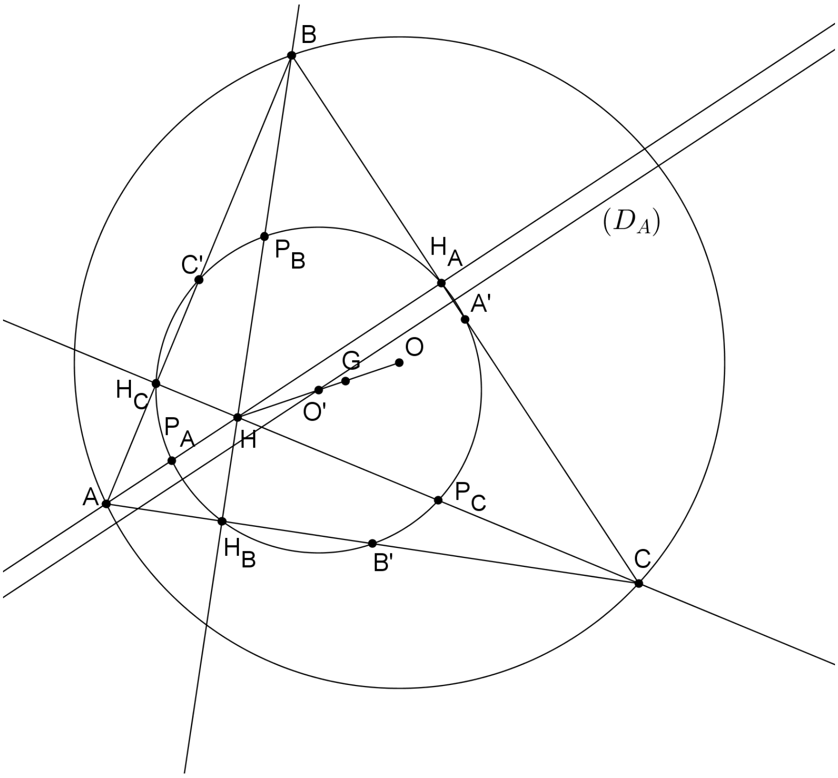
Remarque. On reprend les notations de l'exercice 2. On appelle droite d'Euler : la droite passant par les points O, G et H.

2) Cercle d'Euler.

Définition : homothétie (du plan). L'homothétie de centre O et de rapport λ (où O est un point du plan et λ est un réel non nul) est une transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

Théorème (admis). Une homothétie h de rapport λ transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre I' et de rayon R' avec : $I' = h(I)$ et $R' = |\lambda|R$.

Théorème : cercle d'Euler.



Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité et H son orthocentre. Soient A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement et P_A, P_B et P_C les milieux respectifs des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.
Alors, les neuf points A', B', C', H_A, H_B, H_C, P_A, P_B, P_C appartiennent à un même cercle appelé cercle d'Euler, de centre O' milieu du segment $[OH]$ et de rayon $\frac{R}{2}$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

<u>Démonstration.</u> Soient O' le milieu de $[OH]$ et Γ le cercle de centre O' et de rayon $\frac{R}{2}$. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. On a : $h(O) = O'$ (découle de la relation : $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$) donc h envoie le cercle circonscrit à ABC sur Γ. Comme on a : $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, on en déduit que : $h(A) = A'$. De même, on montre que $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$. Ainsi, les points A', B' et C' appartiennent à Γ. Soit maintenant h' l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$. On a : $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ donc $h'(O) = O'$ donc h' envoie le cercle circonscrit à ABC sur Γ. De la relation : $\overrightarrow{HP_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$, on déduit que : $h'(A) = P_A$. De même, on montre que : $h'(B) = P_B$ et que : $h'(C) = P_C$. Ainsi, P_A, P_B et P_C appartiennent à Γ.
Soit (D_A) la parallèle à la droite (AH_A) passant par le point O'. Comme $(AH_A) \perp (BC)$, on en déduit que : $(D_A) \perp (BC)$. Le point A' est le milieu de $[BC]$ et O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc (OA') est la médiatrice de $[BC]$ ainsi : $(OA') \perp (BC)$. Ainsi, $(D_A) /\!/ (OA')$.
En appliquant le théorème des milieux dans le triangle HOH_A puis dans le triangle OH_AA', on montre que la droite (D_A) coupe le segment $[H_AA']$ en son milieu.

La droite (D_A) coupe le segment $[H_A A']$ en son milieu tout en lui étant perpendiculaire donc la droite (D_A) est la médiatrice du segment $[H_A A']$. Ainsi, on a : $O'H_A = O'A' = \dfrac{R}{2}$ donc $H_A \in \Gamma$. On montre de la même façon que H_B et H_C appartiennent à Γ.

<u>Exercice 4.</u> On reprend les notations du théorème précédent.
Montrer que le point O' est le milieu du segment $[P_A A']$.

<u>*Solution de l'exercice* 4.</u> Le triangle $P_A H_A A'$ est rectangle en H_A donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse : $[P_A A']$. Or, les points P_A, A' et H_A appartiennent au cercle d'Euler de centre O' donc le cercle d'Euler est le cercle circonscrit au triangle $P_A H_A A'$ ainsi, O' est le centre du cercle circonscrit au triangle $P_A H_A A'$. Par conséquent, O' est le milieu de $[P_A A']$.

<u>III Cours d'introduction sur le barycentre.</u>

<u>Définition.</u> Soient A, B, C et G quatre points du plan et α, β, γ trois réels tels que : $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. On dit que le point G est le barycentre des points A, B et C, affectés respectivement des coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ si $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. On note : $G = bary\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

<u>Remarque</u> : le barycentre de deux points pondérés appartient à la droite formée par ces deux points.

<u>Généralisation à n points pondérés. (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).</u> Soient A_1, A_2, A_3, ..., A_n n points du plan et α_1, ..., α_n des réels tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. On dit que G est le barycentre des points A_1, ..., A_n affectés des coefficients α_1, α_2, ..., α_n si : $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

<u>Propriétés.</u> On reprend les notations et les conditions de la généralisation à n points pondérés.

1) Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$.

2) Homogénéité du barycentre : Si $G = bary\{(A_1,\alpha_1),...,(A_n,\alpha_n)\}$ alors pour tout réel $\lambda \neq 0$,
$G = bary\{(A_1,\lambda\alpha_1),...,(A_n,\lambda\alpha_n)\}$.

3) Associativité du barycentre : Soient $G = bary\{(A_1,\alpha_1),...,(A_n,\alpha_n)\}$ et $H = bary\{(A_1,\alpha_1),...,$
(avec $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$ et $1 \leq k \leq n$). Alors, $G = bary\{(H,\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i),(A_{k+1},\alpha_{k+1}),...,(A_n,\alpha_n)\}$.

"Explosion" du barycentre : si $G = bary\{(H,\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i),(A_{k+1},\alpha_{k+1}),...,(A_n,\alpha_n)\}$,
avec $H = bary\{(A_1,\alpha_1),...,(A_k,\alpha_k)\}$ (en ayant : $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$) alors $G = bary\{(A_1,\alpha_1),...,(A_n,\alpha_n)\}$.

Preuves.

1) On a : $G = bary\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. Pour tout point M du plan, on a (en utilisant la relation de Chasles) : $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GM} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$.

2) On a : $G = bary\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. En multipliant par $\lambda \neq 0$, on obtient : $\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ donc $G = bary\{(A_1, \lambda\alpha_1), ..., (A_n, \lambda\alpha_n)\}$.

3) On a : $G = bary\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ et $H = bary\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_k, \alpha_k$ donc $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{HA_i} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GH} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{HA_i} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GH} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ donc $G = bary\{(H, \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i), (A_{k+1}, \alpha_{k+1}), ..., (A_n, \alpha_n)\}$.

Pour "l'explosion" du barycentre, la preuve est similaire.