DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Jean-François MARTIN
STAGE : Grésillon 2011

Multiplicateurs de Lagrange : exercices

Exercice 1 Montrer que :

$$\forall x, y, z \in [0;1], \quad \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} \leqslant 1 - (1-x)(1-y)(1-z).$$

Exercice 2 Soit a, b, c des réels strictement positifs vérifiant l'identité $a + b + c = 1$. Montrer que :

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3 Montrer l'inégalité de Hölder : pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\forall p, q \in]1; +\infty[: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ \forall (a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}, \ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

En déduire "l'inégalité des mauvais élèves" :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall r \in \mathbb{R}^+, \ \forall (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}, \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{r+1}}{y_i^r} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{r+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^r}.$$

Exercice 4 Montrer de deux manières différentes l'inégalité suivante :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant 1.$$

Exercice 5 Soit ABC un triangle, H son orthocentre et I son centre du cercle inscrit. Montrer que :

$$AH + BH + CH \geqslant AI + BI + CI.$$

Remarque : On peut même montrer (beaucoup beaucoup plus difficilement) que :

$$AH + BH + CH \geqslant \sqrt{AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB} \geqslant AI + BI + CI.$$

- Correction -

De manière générale, si h est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, nous noterons ∇h son gradient, c'est-à-dire le vecteur de ses dérivées partielles :

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

Solution de l'exercice 1 La fonction qui à x, y, z associe $\frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(1-z)$ est clairement convexe (toute fonction affine ainsi que la fonction inverse sur les positifs étant convexes). En particulier, elle atteint son maximum sur ces bords, i.e. sur $\{0;1\}^3$. Quitte à permuter les variables, les seuls cas à vérifier sont donc $x = y = z = 1$, $x = y = 1, z = 0$, $x = 1, y = z = 0$,$x = y = z = 0$. Or, on voit facilement qu'on a égalité dans chacun de ces cas, ce qui conclut cette preuve.

Solution de l'exercice 2 La fonction racine est concave. En effet, sa dérivée seconde est l'application $x \longrightarrow -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, à valeurs strictement négatives. Ainsi, l'inégalité de Jensen (pondérée avec les poids a, b, c) montre que :

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b} \leqslant \sqrt{\sum_{cyc} ab}.$$

De plus, on sait que $\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$, ce qui se réécrit comme $\sum_{cyc} ab \leqslant \sum_{cyc} a^2$ puis comme $3\sum_{cyc} ab \leqslant \sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab$ puis comme $3\sum_{cyc} ab \leqslant (a+b+c)^2 = 1$, d'où $\sum_{cyc} ab \leqslant \frac{1}{3}$. Ainsi, on obtient que :

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b} \leqslant \sqrt{\sum_{cyc} ab} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Solution de l'exercice 3 Fixons p et q tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Procédons par récurrence sur n. L'initialisation pour $n=0$ est triviale, toutes les sommes étant vides.

Supposons que l'inégalité de Hölder avec ces p et q est démontrée pour un certain entier positif $n-1$ et montrons la pour n.

Fixons pour l'instant les a_i et considérons les b_i comme variables. L'inégalité étant homogène en ces y_i, et le cas où tous ces derniers sont nuls étant trivial, nous pouvons sans restriction de la généralité supposer que $\sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Il nous reste alors à montrer que :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Posons F l'application qui à $(b_1, b_2, ..., b_n)$ associe $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ et C celle qui y associe $\sum_{i=1}^n a_i^p$.

Nous voulons montrer que F sous la condition $C=1$ est majorée par $(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}$. Nous allons pour ce faire utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Étudions dans un premier temps les cas au bord. La condition $C=1$ nous assure qu'un n-uplet $(b_1, b_2, ..., b_n)$ est au bord si et seulement si au moins une des variables est soit nulle, soit égale à 1. De plus, puisque si l'une des variables est égale à 1 toutes les autres sont nulles, il suffit de se restreindre au cas où une des variables est nulle. Supposons donc sans restriction de la généralité que $b_n = 0$. Il faut maintenant montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i.$$

Or, on peut clairement minorer le premier terme par $\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ qui est d'après l'hypothèse de récurrence plus grand que le membre de droite, ce qui conclut le cas du bord.

Passons maintenant au cœur même de l'exercice : soit $(y_1, y_2, ..., y_n) \in]0;1[^n$ un éventuel extremum intérieur. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, un tel extremum vérifierait la condition suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda \nabla C(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Or, $\forall (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla F(b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ainsi que $\nabla C(b_1, b_2, ..., b_n) = (qb_1^{q-1}, qb_2^{q-1}, ..., qb_n^{q-1})$. Ainsi, l'égalité due aux multiplicateurs de Lagrange se réécrit comme :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, ..., a_n) = q\lambda(y_1^{q-1}, y_2^{q-1}, ..., y_n^{q-1}).$$

De plus, comme l'inégalité à démontrer est clairement homogène en les a_i (et le cas où $\lambda = 0$ i.e. où tous les a_i sont nuls étant trivial), on peut supposer quitte à diviser par $q\lambda$ que l'on a simplement :

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (y_1^{q-1}, y_2^{q-1}, ..., y_n^{q-1}).$$

Il nous suffit donc maintenant de montrer que :

$$\forall (y_1, y_2, ..., y_n) \in]0;1[^n \colon \sum_{i=1}^{n-1} y_i^q = 1, \ \left(\sum_{i=1}^{n-1} (y_i^{q-1})^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i^{q-1} y_i.$$

En utilisant la relation sur la somme des y_i^q puis en élevant à la puissance $p > 1$, cette dernière inégalité est encore équivalente à :

$$\forall (y_1, y_2, ..., y_n) \in]0;1[^n \colon \sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1, \ \sum_{i=1}^{n} y_i^{p(q-1)} \geqslant 1.$$

Or, on peut remarquer (en utilisant la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ que :

$$p(q-1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}(q-1) = \frac{q}{q-1}(q-1) = q.$$

En particulier, on voit en utilisant la relation sur la somme des y_i^q que, dans ce cas, l'inégalité à démontrer est en fait une égalité, ce qui conclut également ce cas et donc cette preuve de l'inégalité de Hölder.

Déduisons-en maintenant "l'inégalité des mauvais élèves".

Soit $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$. Utilisons l'inégalité de Hölder pour $2n$ variables avec les paramètres suivants :

$$p = r+1, \ q = \frac{r+1}{r}, \ \forall i \in 1;...;n, \ a_i = \frac{x}{y^{\frac{r}{r+1}}}, \ \forall i \in 1;...;n, \ b_i = y^{\frac{r}{r+1}}.$$

Comme $\frac{1}{r+1} + \frac{r}{r+1} = 1$, la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ est vérifiée et l'inégalité de Hölder montre donc que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{y^{\frac{r}{r+1}}}\right)^{r+1}\right)^{\frac{1}{r+1}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(y^{\frac{r}{r+1}}\right)^{\frac{r+1}{r}}\right)^{\frac{r}{r+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{y^{\frac{r}{r+1}}} y^{\frac{r}{r+1}}.$$

Après élévation à la puissance $r+1$-ième et division par $(y_1 + ... + y_n)^r$, cela se réécrit bien ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{r+1}}{y_i^r} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{r+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^{r}}.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Nous allons utiliser les "mauvais élèves" et Jensen.

Première méthode : "l'inégalité des mauvais élèves".

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité proposée est clairement équivalente à l'inégalité suivante :

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}} \geqslant 1.$$

Or, "l'inégalité des mauvais élèves" appliquée avec $n=3$, $r=\frac{1}{2}$, $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $y_1=a^3+8abc$, $y_2=b^3+8abc$ et $y_3=c^3+8abc$ montre que :

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8abc)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24abc)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il suffit donc clairement de montrer que $(a+b+c)^3 \geqslant a^3+b^3+c^3+24abc$. Or, cette inégalité est après développement de $(a+b+c)^3$ équivalente à $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc \geqslant a^3+b^3+c^3+24abc$, qui est après simplification et division par 6 également équivalente à $a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b \geqslant 6abc$. Mais cette dernière inégalité est triviale d'après l'inégalité arithmético-géométrique : $a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b \geqslant 6\sqrt{a^2ba^2cb^2cb^2ac^2ac^2b} = 6abc$.

Deuxième méthode : l'inégalité de Jensen.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité proposée étant clairement homogène, on peut clairement supposer que $a+b+c=1$. De plus, l'application $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ est convexe. En effet, sa dérivée seconde est l'application $x \longrightarrow \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$ à valeurs strictement positives. L'inégalité de Jensen (pondérée avec les poids a, b, c) montre donc que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}}.$$

Il suffit donc de montrer que $a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab) \leqslant 1$, ce qui peut se réécrire sous la forme $(a+b+c)^3 \geqslant a^3+b^3+c^3+24abc$, inégalité déjà prouvée lors de la première méthode.

Solution de l'exercice 5 Dans toute la suite, nous considérerons des longueurs et des angles algébriques (en particulier, si ABC est obtus en A, la longueur AH sera considérée négative). Il est suffisant de montrer l'inégalité avec ces longueurs algébriques : en effet, I étant toujours intérieur au triangle, seules les longueurs du membre de gauche sont susceptibles de changer de signes, rendant donc le cas échéant l'inégalité plus serrée.

Soit α (resp. β resp. γ) les angles $\widehat{CAB}$ (resp. $\widehat{ABC}$ resp. $\widehat{BCA}$). R dénote le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Faisons quelques calculs d'angle préliminaires :

$$\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

$$\widehat{AHB} = 180^\circ - \widehat{HAB} - \widehat{HBA} = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

Pour calculer AI, on peut utiliser la loi des sinus dans AIB :

$$AI = \frac{AB \cdot \sin(\widehat{BAI})}{\sin(\widehat{AIB})}.$$

Ainsi, on peut calculer AI, en utilisant la loi des sinus dans ABC puis la loi de duplication du sinus :

$$AI = \frac{AB \cdot \sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(90^\circ + \frac{\gamma}{2})} = \frac{AB \cdot \sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})} = \frac{2R\sin(\gamma)\sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})} = \frac{4R\sin(\frac{\gamma}{2})\cos(\frac{\gamma}{2})\sin(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\gamma}{2})} = 4R\sin(\frac{\beta}{2}$$

On montre bien sûr de même que $BI = 4R\sin(\frac{\gamma}{2})\sin(\frac{\alpha}{2})$ et que $CI = 4R\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2})$.

Pour calculer AH, on peut utiliser la loi des sinus dans AHB :

$$AH = \frac{AB \cdot \sin(\widehat{ABH})}{\sin(\widehat{AHB})}.$$

Il suffit alors d'utiliser la loi des sinus dans ABC pour obtenir une expression plus agréable :

$$AH = \frac{AB \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \gamma)} = \frac{AB \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{2R\sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\gamma)} = 2R\cos(\alpha).$$

On montre bien sûr de même que $BH = 2R\cos(\beta)$ et que $CH = 2R\cos(\gamma)$.

Ainsi, après simplification par $2R$, l'inégalité à prouver se réécrit comme suit :

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \geqslant 2(\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) + \sin(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\gamma}{2}) + \sin(\frac{\gamma}{2})\sin(\frac{\alpha}{2})).$$

Soit F l'application qui associe $\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) - 2(\sin(\frac{x}{2})\sin(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{y}{2})\sin(\frac{z}{2}) + \sin(\frac{z}{2})\sin(\frac{x}{2}))$ à (x, y, z) et C celle qui y associe $x+y+z$. On veut montrer que F sous la condition $C = 180°$ est positive (on ne suppose plus que $x, y, z < 90°$. Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Étudions dans un premier temps les cas sur les bords. Comme $x + y + z = 180°$, les cas sur les bords correspondent à lorsqu'au moins une des variables est nulle ou égale à $180°$. De plus si l'une des variables est égale à $180°$, les autres sont nulles. Il suffit donc de se restreindre au cas où une des variables (disons z) est nulle.

Il faut alors montrer l'inégalité suivante, avec $x + y = 180°$:

$$\cos(x) + \cos(y) + 1 - 2\sin(\frac{x}{2})\sin(\frac{y}{2}).$$

En notant $y = 1 - x$, elle se réécrit comme :

$$1 - 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) \geqslant 0.$$

Cette inégalité est triviale, étant équivalente à $1 - \sin(x) \geqslant 0$, vérifiée puisque le sinus est à image dans $[0; 1]$.

Étudions maintenant le cas où la fonction F admet sous la condition C un extremum intérieur (x, y, z). Le théorème des multiplicateurs de Lagrange montre que (x, y, z) vérifie la condition suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(x, y, z) = \nabla C(x, y, z).$$

Après calcul (et puisque être proportionnel à $(1, 1, 1)$ signifie avoir ses trois composantes égales), cela se réécrit comme :

$$\begin{aligned} -\sin(x) - \cos(\frac{x}{2})\left(\sin(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{z}{2})\right) &= -\sin(y) - \cos(\frac{y}{2})\left(\sin(\frac{z}{2}) + \sin(\frac{x}{2})\right) \\ &= -\sin(z) - \cos(\frac{z}{2})\left(\sin(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{y}{2})\right). \end{aligned}$$

En définissant $S \geqslant 0$ la somme $\sin(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{z}{2})$ et g la fonction qui à t associe $\sin(t) + \cos(\frac{t}{2})\left(S - \sin(\frac{t}{2})\right)$, la condition liée aux multiplicateurs de Lagrange s'écrit $g(x) = g(y) = g(z)$. Or, la loi de duplication du sinus nous assure que pour tout t réel, $g(t)$ se réécrit $\frac{1}{2}\sin(t) + S\cos(\frac{t}{2})$. Calculons la dérivée de g :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{S}{2}\sin(\frac{t}{2}).$$

Or, cette fonction est clairement strictement croissante sur l'intervalle considéré (comme cos y est strictement croissante et $t \longrightarrow sin(\frac{t}{2})$ strictement décroissante), donc, dans le pire des cas, g' est d'abord strictement négative puis positive, i.e. g est d'abord strictement décroissante puis strictement croissante, i.e. tout réel admet au plus deux antécédents par g. Or, x, y et z sont trois antécédents d'un même réel et ne peuvent donc être distincts. On peut donc sans restriction de la généralité supposer que $x = z$ (on peut remarquer que cela implique d'ailleurs $x \leqslant 90^\circ$. En utilisant cette propriété et en écrivant y comme $180^\circ - 2x$, l'inégalité à démontrer se réécrit :

$$2\cos(x) - \cos(2x) - 2\left(\sin^2(\frac{x}{2}) + 2\sin(\frac{x}{2})\cos(x)\right) \geqslant 0.$$

En utilisant de nombreuses fois les formules de duplications, l'inégalité se réécrit comme :

$$\begin{aligned}
& 2\cos(x) - \cos(2x) - 2\left(\sin^2(\frac{x}{2}) + 2\sin(\frac{x}{2})\cos(x)\right) \geqslant \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})\right) - (2\cos^2(x) - 1) - 2\left(\sin^2(\frac{x}{2}) + 2\sin(\frac{x}{2})(1 - 2\sin^2(x))\right) \geqslant \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})\right) - \left(2\left(1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})\right)^2 - 1\right) - 2\left(\sin^2(\frac{x}{2}) + 2\sin(\frac{x}{2})(1 - 2\sin^2(x))\right) \geqslant
\end{aligned}$$

Il est donc naturel d'introduire le polynôme $P = 2(1-2X^2) - (2(1-2X^2)^2 - 1) - 2(X^2 + 2X(1-2X^2))$. Il suffit en effet alors de montrer que $P\left(\sin(\frac{x}{2})\right) \geqslant 0$. Or :

$$\begin{aligned}
& P = (1-2X^2) - (2(1-2X^2)^2 - 1) - 2(X^2 + 2X(1-2X^2)) \\
\Leftrightarrow\ & P = 2 - 4X^2 - (2 - 8X^2 + 8X^4 - 1) - 2(X^2 + 2X - 4X^3)) \\
\Leftrightarrow\ & P = -8X^4 + 8X^3 + 2X^2 - 4X + 1 \\
\Leftrightarrow\ & P = (2X-1)^2(-2X^2+1).
\end{aligned}$$

L'inégalité à montrer devient alors évidente, puisque $x \leqslant 90^\circ$ implique $\sin(\frac{x}{2}) \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Ceci clôt la solution.