DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2013

# Géométrie

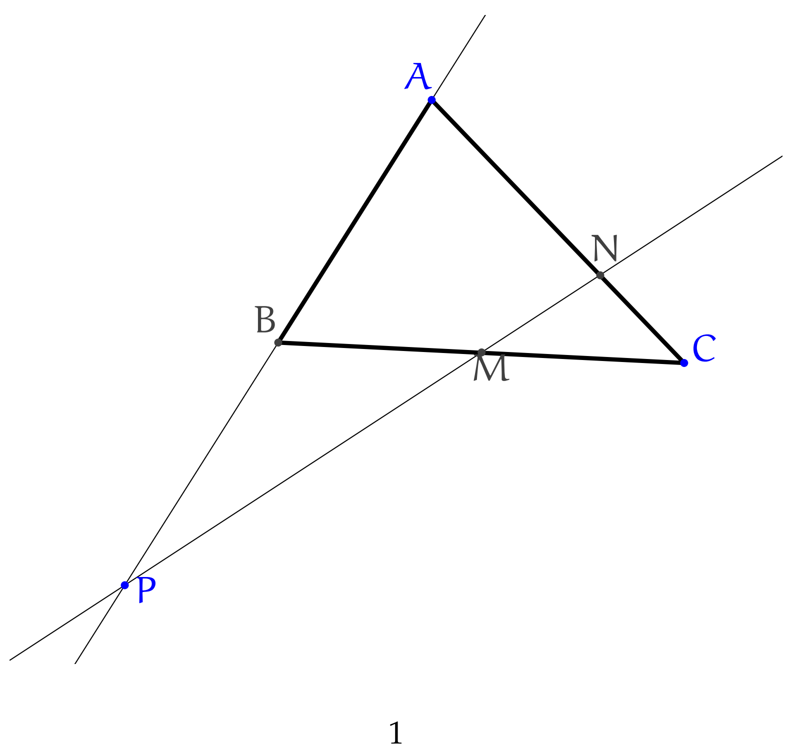
Cette séance a été consacrée essentiellement à un cours d'initiation, illustré par quelques exercices. Nous ne nous attarderons guère sur le cours, qu'on peut trouver dans bien des publications, mais surtout sur les exercices.

Après avoir rappelé le théorème de Thalès, j'ai montré le théorème de Ménélaüs : trois points sur les côtés d'un triangle, $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$ sont alignés si et seulement si, en mesure algébrique, $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

**Exercice 1**

Soit $ABC$ un triangle, $M$ le milieu de $BC$, $N$ au tiers de $AC$ à partir de $C$. La droite $(MN)$ coupe $(AB)$ en $P$. Déterminer la position de $P$ par rapport à $A$ et $B$.

*Solution de l'exercice 1*



La relation $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ donne $\frac{PA}{PB} = 2$, $P$ est le symétrique de $A$ par rapport à $B$.

Pour généraliser cette notion de "milieu", "tiers", j'ai introduit les barycentres, qui exigent une certaine pratique du calcul vectoriel, et ai montré le théorème de Céva à l'aide de coordonnées barycentriques : soit trois points sur les côtés d'un triangle, $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$ ; les droites $(AM), (BN), (CP)$ sont concourantes si et seulement si, en mesure algébrique, $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1$.

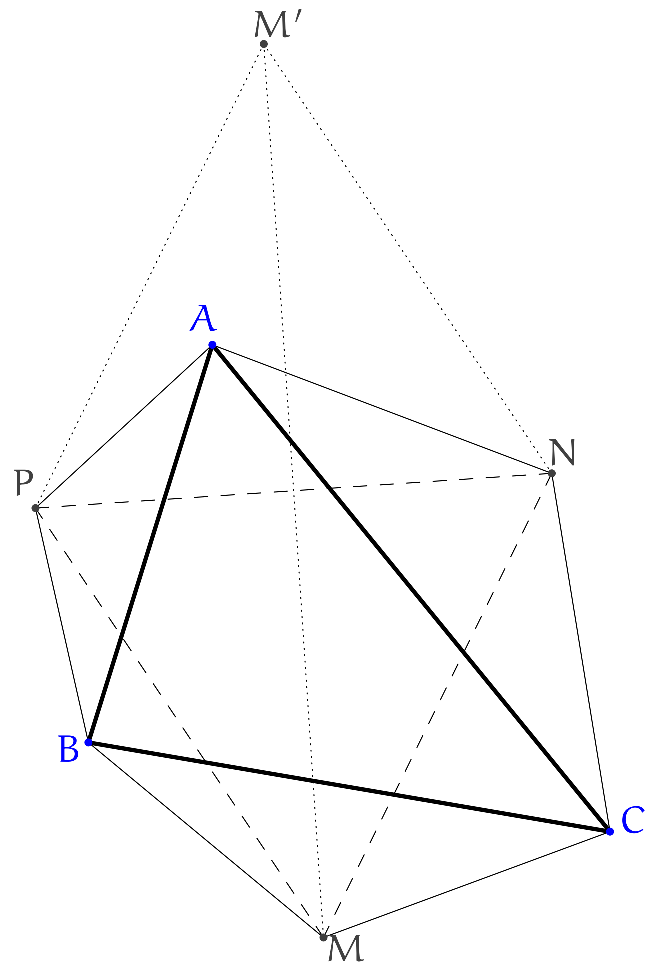
Puis, j'ai rappelé le théorème de Pythagore et sa généralisation, le théorème d'Al Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$. J'ai montré au passage la formule de Héron : l'aire du triangle $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

J'ai ensuite abordé les transformations du plan : translations, rotations (composition de deux rotations), homothéties, similitudes, en illustrant à l'aide de deux exercices :

**Exercice 2**

Sur les côtés d'un triangle $ABC$, on trace, extérieurement à $ABC$, des triangles isocèles $BMC, CNA, APB$ ayant tous des angles au sommet de 120°. Montrer que le triangle $MNP$ est équilatéral.

*Solution de l'exercice 2*

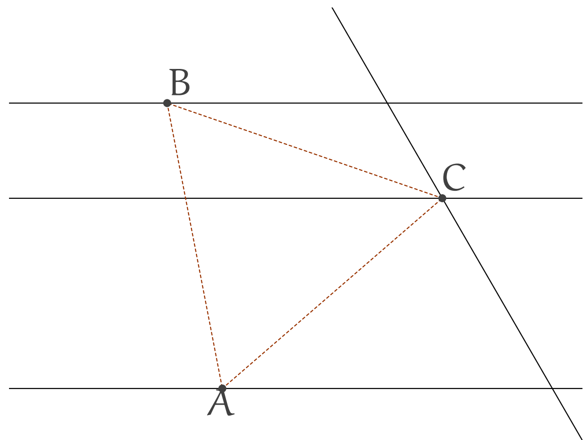



Considérons les rotations de centres $M$, $N$, $P$ et d'angles $120\,^\circ$. Comme $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$, la composée de ces trois rotations est une translation ("rotation d'angle nul et de centre à l'infini"). Mais la première rotation envoie $B$ en $C$, la deuxième $C$ en $A$ et la troisième $A$ en $B$, de sorte que la composée de ces trois rotations envoie $B$ en $B$ : c'est donc l'identité. Or la première rotation envoie $M$ en lui-même, puisqu'il est le centre de la rotation. La seconde envoie ce même $M$ en un point $M'$, et la troisième, $M'$ en $M$ puisque la composée des trois est l'identité. Par définition de la rotation, les triangles $MNM'$ et $M'PM$ sont tous deux isocèles, d'angles en $N$ et $P$ égaux à $120^\circ$. La médiatrice de $MM'$ est axe de symétrie de chacun des deux triangles, donc bissectrice de $\widehat{MNM'}$ et de $\widehat{M'PM}$. On en déduit que les triangles $MNP$ et $M'NP$ ont chacun deux angles de $60^\circ$, donc trois car la somme des angles d'un triangle vaut $180^\circ$ : ces triangles sont tous deux équilatéraux, ce qui achève la démonstration.

**Exercice 3**

Comment placer, sur trois droites parallèles, des points $A$, $B$, $C$ de sorte que $ABC$ soit un triangle équilatéral ?

*Solution de l'exercice 3*



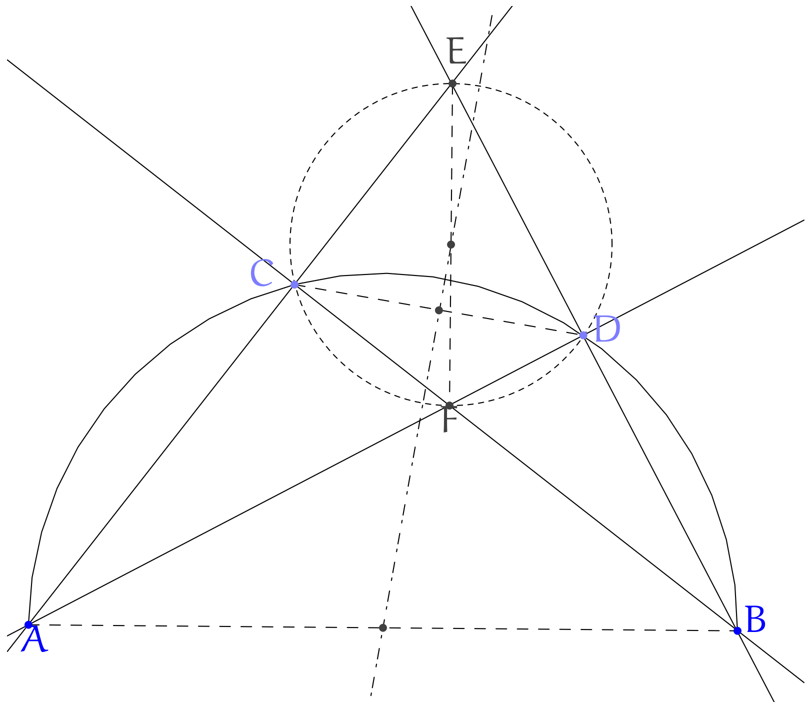

Plaçons $A$ sur l'une des droites. La rotation de centre A et d'angle 60° transforme B en C. Mais il transforme également la droite contenant B en une droite, qui fait avec les parallèles un angle de 60°. Cette transformée coupe donc la troisième droite en un point, qui ne peut être que C : c'est le seul point qui soit simultanément sur la troisième droite, comme doit l'être le point C, et transformé par la rotation de centre A d'un point de la deuxième droite, comme doit l'être à nouveau le point C. Ayant les points A et C, il est facile de compléter le triangle équilatéral : B est transformée de C par une rotation de centre A et de 60° en sens inverse.

Puis, j'ai abordé rapidement le cercle, notamment les angles inscrits et la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient cocycliques. Je n'ai pas parlé du cas de la tangente, mais j'ai mentionné le cas particulier de l'angle droit, illustré par l'exercice que voici :

**Exercice 4**

C et D sont deux points situés sur un demi-cercle de diamètre AB. Les droites $(AC)$ et $(BD)$ se coupent en E, les droites $(AD)$ et $(BC)$ se coupent en F. Montrer que les milieux de AB, CD, EF sont alignés.

*Solution de l'exercice 4*




Puisque $AB$ est un diamètre, les angles inscrits $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont droits, d'où l'on déduit que les angles $\widehat{ECF}$ et $\widehat{EDF}$ sont eux aussi droits : $C$ et $D$ sont donc situés sur le cercle de diamètre $EF$. Le milieu de $EF$, centre de ce cercle, est équidistant de $C$ et $D$, il appartient donc à la médiatrice de $CD$, tout comme le milieu de $AB$, centre du demi-cercle auquel appartiennent par hypothèse $C$ et $D$. La médiatrice passe donc par les trois milieux de $AB$, $CD$ et $EF$, d'où le résultat.

Je n'ai pas eu le temps de faire un autre exercice que j'avais prévu, et que nous avons utilisé comme exercice du test.

J'ai terminé le cours en présentant la loi des sinus : soit $ABC$ un triangle, $\alpha, \beta, \gamma$ ses angles en $A, B, C$ respectivement, $R$ le rayon de son cercle circonscrit.

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} = 2R$$

Mais je n'ai pas pu aborder les points remarquables du triangle, G, O, H, I, droite et cercle d'Euler... avec trois exercices initialement envisagés !