DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Vincent MOULY
STAGE : Montpellier 2013

Récurrence, Principe des tiroirs

- Exercices -

Exercice 1 15 élèves ont attrapés 100 tiques. Montrer que deux élèves ont attrapé le même nombre de tiques.

Exercice 2 Soit α un nombre réel tel que $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 (application de la récurence forte) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver k nombres premiers $p_0, \ldots, p_{k-1}$ tels que $\prod_{i \in k} p_i = n$.

NB. On admet que le produit de zéro nombre premier vaut 1.

- Solutions -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On raisonne par l'absurde. On note $t_0, t_1, \ldots, t_{14}$ les nombres de tiques des élèves, supposés distincts. Quitte à intervertir les élèves, on peut donc supposer $t_0 < t_1 < \ldots < t_{14}$. Comme ce sont des entiers, on a alors $0 \leqslant t_0$, $t_1 \geqslant t_0 + 1 \geqslant 1$, et ainsi de suite jusqu'à $t_{14} \geqslant 14$.

Le nombre total T de tiques vérifie alors $T \geqslant 0 + 1 + \ldots + 14 = 105$, soit $100 \geqslant 105$, ce qui est absurde.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On procède par récurence sur n. En fait, on montre par récurence la proposition $P(n) = (\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} \text{ ET } \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z})$.

Initialisation : $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$ et $\alpha^0 + \frac{1}{\alpha^0} = 2 \in \mathbb{Z}$.

Hérédité : on suppose P vraie au rang n. Déjà, $\alpha^{n+1-1} + \frac{1}{\alpha^{n+1-1}} = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse de récurence. Ensuite,

$$\alpha^{n+1}+\frac{1}{\alpha^{n+1}} = \alpha^{n+1}+\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\alpha^{n-1}+\frac{1}{\alpha^{n-1}}-\alpha^{n-1}-\frac{1}{\alpha^{n-1}} = (\alpha+\frac{1}{\alpha})(\alpha^{n}+\frac{1}{\alpha^{n}})-(\alpha^{n-1}+\frac{1}{\alpha^{n-1}})$$

qui est entier, comme somme de produits d'entiers.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vrai, donc en particulier, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$

Solution de l'exercice 3 On procède par récurence forte sur n.

Initialisation : le cas $n = 1$ est admis par l'énoncé.

Hérédité : on suppose que, pour tout k tel que $1 \leqslant k < n$, k se décompose comme produit de facteurs premiers. On distingue alors deux cas :

.Si n est premier, alors $n = n$, donc n se décompose comme le produit d'un nombre premier.

.Sinon, par définition de la non primitude, $n = ab$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 1$. On a alors $a = \frac{n}{b} < n$ et de même, $b < n$. Donc, par hypothèse de récurence forte, $a = \prod_{i \in r} p_i$ et $b = \prod_{j \in r'} p'_j$, donc $n = ab = p_0 p_1 \ldots p_{r-1} p'_0 \ldots p'_{r'-1}$.

- Principe des tiroirs -

Si on cherche à ranger $n+1$ chaussettes (ou pigeons) dans n tiroirs (ou trous de pigeon), on sait qu'au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes.

Plus généralement, si on cherche à ranger au moins $(kn + 1)$ objets dans n ensembles, on sait qu'au moins un des ensembles contient au moins $k + 1$ objets.

De même, si on cherche à ranger au plus $kn - 1$ pigeons dans n tiroirs, au moins un trou de pigeon contiendra au plus $k - 1$ chaussette.

Exercice 4 Dans un groupe de 2013 personnes, certaines se connaissent et d'autre non. On admet que si A connait B, alors B connais également A. Montrer qu'il y a deux personnes ayant le même nombre de connaissances.

Solution de l'exercice 4 On suppose d'abord qu'une des personnes connaît tout le monde. Dans ce cas, tout le monde la connaît, donc personne ne connait personne. Les nombres d'amis possibles pour une personne donnée sont donc les entiers de 1 à 2012, soit 2012 possibilités. Comme il y a 2013 élèves, par le principe des trous de chaussettes, deux personnes ont le même nombre de connaissances.

De même, si personne n'a 2012 connaissances, les nombres d'amis possibles pour une personne donnée sont les entiers de 0 à 2011, ce qui conclut.