DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Exercices sur la chasse aux angles

- Énoncés -

Exercice 1 Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle si et seulement si $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.

Exercice 2 Soient A et B deux points sur un cercle $\mathcal{C}$ et P un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Les droites (PA) et (PB) coupent le cercle en A' et B' respectivement. Montrer que les triangles PAB et $PA'B'$ sont semblables.

Exercice 3 Soit ABC un triangles et P, Q, R des points placés sur les côtes BC, AC et AB respectivement. On trace les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR et CQP. Montrer que ces trois cercles passent par un même point

Exercice 4 Deux cercles se coupent en P et Q. Une droite passant par P coupe les deux cercles en A et A'. La droite parallèle passant par Q coupe les cercles en B et B'. Montrer que les triangles PBB' et QAA' sont isométriques.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit D l'intersection de la bissectrice de $\widehat{B}$ et du côté AC, et E un point du côté BC tel que $AB = BE$. Montrer que (BO) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 7 Soit ABC un triangle tel que la médiane, la hauteur et la bissectrice issues de A coupent l'angle $\widehat{A}$ en quatre angles égaux α. Exprimer tous les angles de la figure en fonction de α et calculer α.

Exercice 8 (Loi des sinus) Soit ABC un triangle. On note $BC = a$, $AC = b$,

$AB = c$ et R le rayon du cercle circonscrit. Montrer que

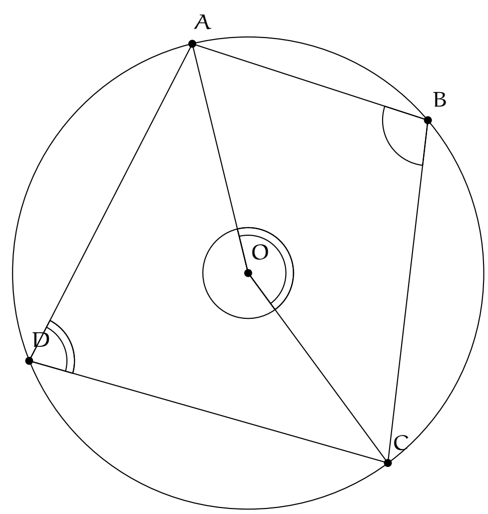
$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R.$$

Indication : Commencez par montrer $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R$ quand ABC est rectangle en B.

Exercice 9 Soit Γ un cercle et BC une corde de Γ. Soit A le milieu de l'arc BC. Par A on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent BC en F et G. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible dans un cercle.

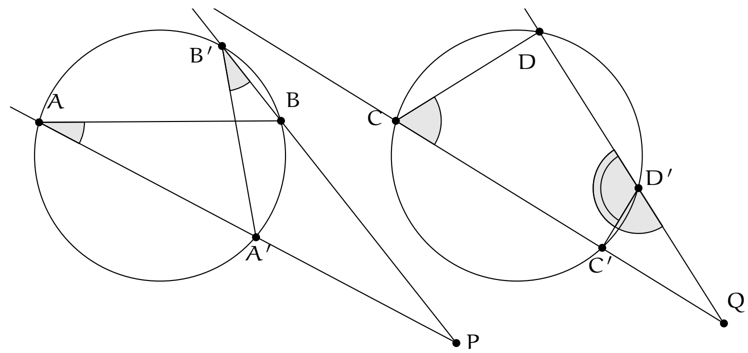
- Corrigés -

Solution de l'exercice 1 Prenons un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle. Par le théorème de l'angle interne et de langle au centre, $\widehat{BOC} = 2 * \widehat{BAC}$ et $\widehat{COB} = 2 * \widehat{CDB}$. Mais comme $\widehat{BOC} + \widehat{COB} = 360°$, on a bien $\widehat{BAC} + \widehat{CDB} = 180°$.



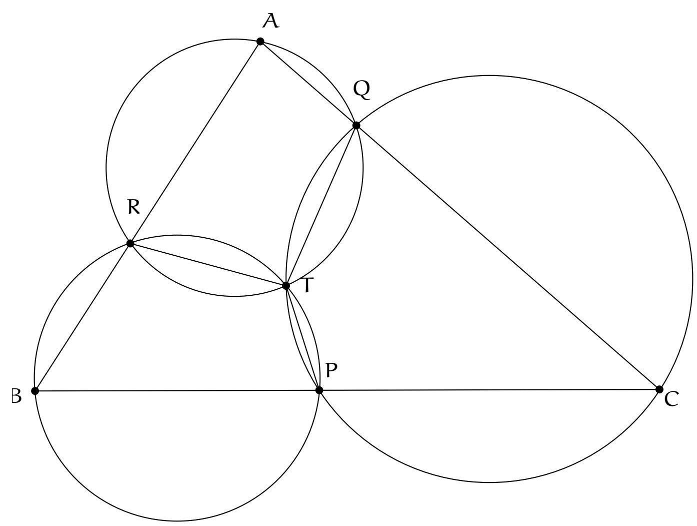
Il faut aussi montrer le sens inverse : supposons que $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$. Soit C' l'intersection du côté BC avec le cercle qui passe par A, B et D. Nous voulons montrer que $C = C'$. Par la question précédente, on sait que $\widehat{BC'D} = 180° - \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Donc les droites (BC) et (BC') sont parallèles et comme elles passent par B toutes les deux elles sont confondues et on a bien $C = C'$.

Solution de l'exercice 2 Tout d'abord il faut remarquer qu'il y a deux figures possibles



Dans les deux cas on veut prouver que deux triangles sont semblables. Mais ils ont déja l'angle $\widehat{P}$ en commun, il suffit donc de trouver deux autres angles égaux. Le premier cas est facile, $\widehat{A} = \widehat{B'}$ par le théorème de l'angle inscrit. Le deuxième cas prend un peu plus de temps : $\widehat{DD'C} + \widehat{C'CD} = 180°$ d'après l'exercice précédent, et $\widehat{QD'C'} = 180° - \widehat{C'D'D} = \widehat{QCD}$. Et voila.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Commençons par tracer la figure :

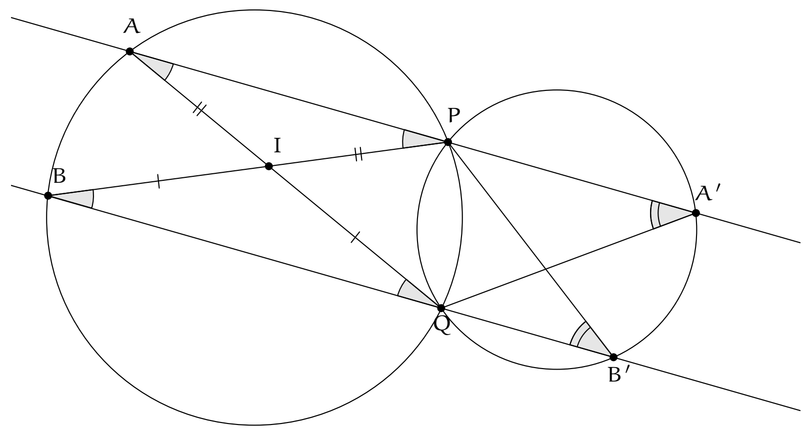


On appelle T le point d'intersection des deux premiers cercles, et on va montrer que T est sur le cercle circonscrit à CQP, c-à-d que le quadrilatère CQTP est inscriptible dans un cercle. Le quadrilatère ARTQ est inscrit dans un cercle, donc $\widehat{RTQ} = 180° - \widehat{A}$. De même, $\widehat{PTR} = 180° - \widehat{B}$. Donc

$$\widehat{QTP} = 360° - \widehat{RTQ} - \widehat{PTR} = \widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \widehat{C}.$$

Donc le quadrilatère CQTP est inscriptible dans un cercle.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Traçons la figure pour nous donner une idée.

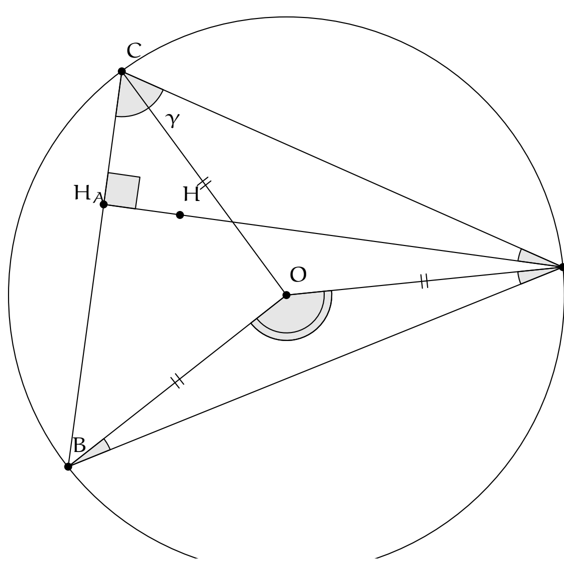


Par les angles inscrits, $\widehat{PAQ} = \widehat{PBQ}$ et $\widehat{PA'Q} = \widehat{PB'Q}$. Les triangles PBB' et QAA' sont donc semblables. Si on trouve deux côtés égaux, on a gagné. On commence par introduire I le point d'intersection de $[PA]$ et $[QB]$. Comme on a des droites parallèles, les angles alternes-internes sont égaux, donc $\widehat{QBI} = \widehat{IPA}$ et $\widehat{IAP} = \widehat{IQB}$. Comme tous ces angles étaient déja égaux par les angles inscrits, on a des triangles isocèles à tire-larigot. Donc

$$AQ = AI + IQ = PI + IB = PB.$$

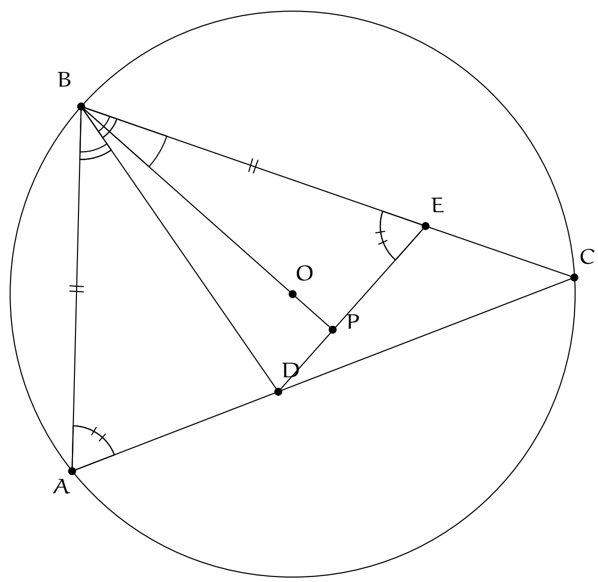
On a nos deux côtés égaux, les deux triangles sont isométriques.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Faisons la figure :



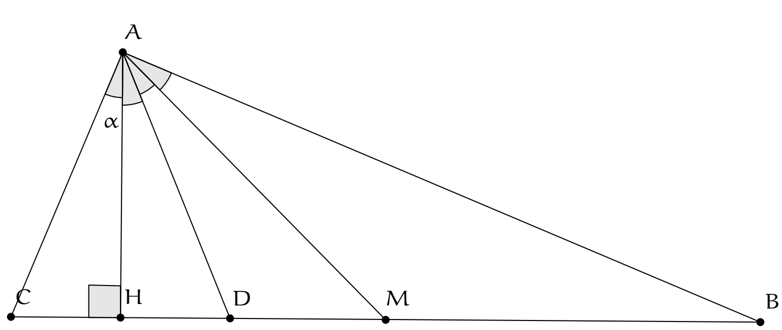
Nous allons calculer les angles en question en fonction de $\gamma = \widehat{BCA}$. Tout d'abord, le triangle CAH_A est rectangle en H_A, donc $\widehat{HAC} = 90° - \gamma$. Pour calculer l'autre angle, on commence par utiliser angle inscrit-angle au centre et on trouve $\widehat{BOA} = 2\gamma$. Ensuite, comme le triangle BOA est isocèle en O, il est facile de calculer $\widehat{OAB} = \frac{180° - \widehat{BOA}}{2} = 90° - \gamma = \widehat{CAH}$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Commençons par faire la figure :



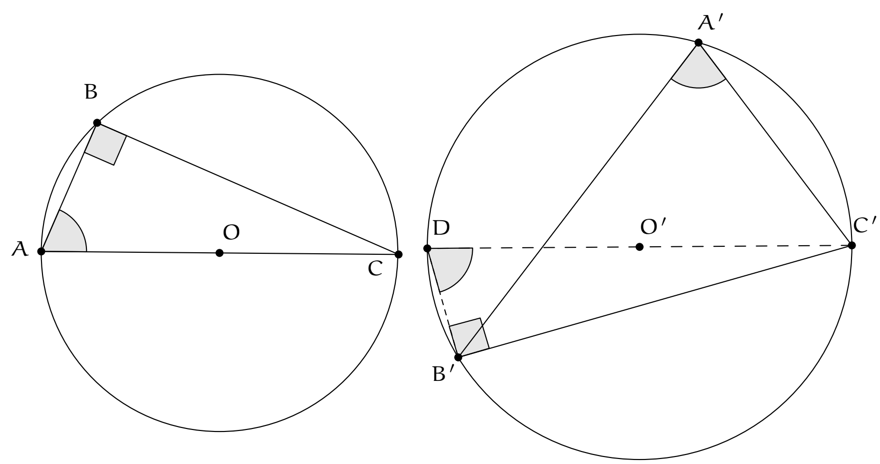
Nous voulons montrer que l'angle $\widehat{BPE}$ est droit, nous allons donc chercher les valeurs des deux autres angles du triangle. Si on note $\alpha = \widehat{A}$, alors l'angle $\widehat{EBP} = 90° - \alpha$ d'après l'exercice précédent. Ensuite on remarque que le point E est le symétrique de A par rapport à la droite BD, donc les triangles BAD et BED sont le symétrique l'un de l'autre et $\widehat{BED} = \alpha$. Donc $\widehat{BPE} = 180° - (90° - \alpha + \alpha) = 90°$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Faisons le dessin :



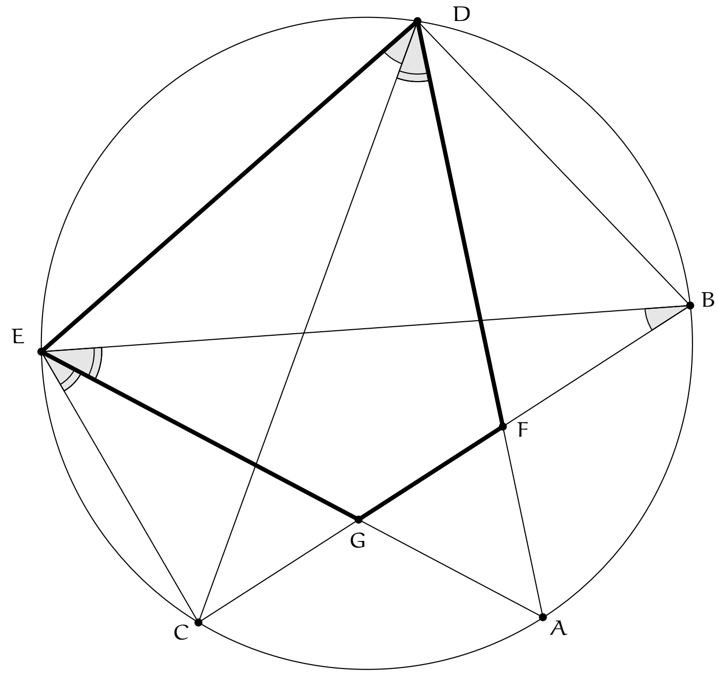
Il est facile de calculer tous les angles en fonction de α : $\widehat{BCA} = \widehat{HDA} = 90° - \alpha$, $\widehat{DMA} = 90° - 2\alpha$ et $\widehat{CBA} = 90° - 3\alpha$. Intéressons nous maintenant au calcul de α. Appelons O le centre du cercle circonscrit de ABC. Nous grâce à l'exercice d'avant d'avant, que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH} = \alpha$. Mais cela signifie que O est sur la médiane (AM). Comme O est également sur la médiatrice de $[BC]$, cela veut dire que $0 = M$. Le rayon du cercle circonscrit et sur le segment $[BC]$, donc le triangle est rectangle en A et $\alpha = \frac{90^\circ}{4} = 22.5^\circ$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> (Loi des sinus) Faisons la figure dans le cas où ABC est rectangle en B et dans le cas général.



Dans le cas rectangle, par définition du sinus, $\sin(\widehat{A}) = \frac{BC}{AC}$, et comme AC est le diamètre du cercle circonscrit, On a bien $\frac{BC}{\sin(\widehat{A})} = 2R$. Dans le cas général on se ramène au cas particulier en créant le point D : on a un triangle rectangle en B', donc $\frac{B'C'}{\sin(\widehat{D}} = 2R$ et comme $\widehat{D} = \widehat{A'}$ on a l'égalité souhaitée.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Comme d'habitude, on commence par une figure :



Nous voulons montrer que le quadrilatère $EDFG$ est inscriptible dans un cercle, essayons de montrer que $\widehat{EDF} + \widehat{FGE} = 180^\circ$. Par les angles inscrits, on a que $\widehat{EDC} = \widehat{EBC}$ et $\widehat{CDA} = \widehat{CEA}$. Comme de plus les arcs CA et AB sont de même longueur, $\widehat{CEA} = \widehat{EAB}$. Maintenant, en faisant la somme des angles dans le triangle EBG on trouve que $\widehat{BGE} = 180^\circ - \widehat{GEB} - \widehat{EBG}$ et en utilisant toutes les égalités obtenues précédemment on a le résultat souhaité.