DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Margaret BILU
STAGE : Montpellier 2013

Calculs, inégalités

- Techniques de calcul et de factorisation -

Identités remarquables Rappelons les trois identités connues depuis le collège :
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

L'identité suivante généralise la troisième identité :

Proposition 1. Soient a, b des réels. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

Démonstration. Il suffit de développer le côté droit :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1}.$$

Dans la deuxième somme on effectue le changement de variable $l = k+1$. On obtient

$$a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{l=1}^{n} a^{n-l}b^l = a^n - b^n.$$

□

Exemple 2. Soit une suite géométrique de premier terme x_0 et de raison r. Alors la somme de ses n premiers termes se calcule à l'aide de l'identité ci-dessus appliquée à $a = 1$ et $b = r$:

$$x_0 + x_0 r + x_0 r^2 + \ldots + x_0 r^{n-1} = x_0 \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Existe-t-il une identité analogue pour $a^n + b^n$? Lorsque n est pair, pas vraiment. Par contre, si n est impair, on a

$$a^n + b^n = a^n - (-b^n) = a^n - (-b)^n,$$

et d'après l'identité précédente, cela donne

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}(-b)^k.$$

Exercice 1 Si $a + b = 2$ et $a^2 + b^2 = 2$, combien vaut $a^3 + b^3$? Et $a^4 + b^4$?

Binôme de Newton : Généralisons maintenant les deux autres identités. Soient n et $k \leqslant n$ des entiers naturels. On note $\binom{n}{k}$ (et on prononce "k parmi n") le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments. Ce sont les coefficients qui vont intervenir dans le développement de $(a + b)^n$. Plus précisément,

Proposition 3. (Binôme de Newton) Pour tous a, b, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En effet, chaque terme dans le développement de $(a+b)^n$ s'obtient en choisissant a dans certains facteurs et b dans tous les autres. Chaque terme est donc bien de la forme $a^k b^{n-k}$ pour un certain k. À k fixé, on obtient un terme $a^k b^{n-k}$ autant de fois qu'il y a de manières de choisir k fois a parmi les n facteurs, donc $\binom{n}{k}$. Le coefficient devant $a^k b^{n-k}$ est donc bien $\binom{n}{k}$.

Cependant, tant qu'on n'a pas donné de formule pour $\binom{n}{k}$, ce résultat ne dit pas grand chose. On a en fait la formule suivante :

Proposition 4. Soit n un entier naturel, et k un entier naturel inférieur à n. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Démonstration. Nous allons prouver la deuxième formule (qui est clairement équivalente à la première). Le numérateur $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ correspond au fait de choisir un premier élément, pour lequel il y a n choix, ensuite un deuxième parmi les $n-1$ restants (ce qui fait $(n-1)$ choix), et cætera jusqu'au

k-ième, pour lequel il y a $n-(k-1)=n-k+1$ choix. Maintenant, le sous-ensemble obtenu ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a choisi ses éléments. Il faut donc diviser par le nombre de permutations d'un ensemble de k éléments, à savoir $k!$. $\square$

Exemple 5. Vérifier que $\binom{n}{0}=1$, que $\binom{n}{1}=n$, et que pour tout k, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, d'abord en utilisant la définition de $\binom{n}{k}$, puis en utilisant la formule. Cela signifie que le développement de $(a+b)^n$ commencera toujours par $a^n+na^{n-1}b$ et sera symétrique. En plus du cas $n=2$ ci-dessus, il est bon de connaître les cas $n=3$ et $n=4$:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Exercice 2 Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0.$$

Sommes télescopiques : Parfois on peut faire apparaître dans un calcul une somme de la forme

$$(a_0-a_1)+(a_2-a_2)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1}).$$

Alors tous les termes au milieu se simplifient (on dit parfois en jargon mathématique qu'ils se "télescopent") et on se retrouve simplement avec a_0-a_{n+1}.
Exercice 3 Calculer

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{2013\times 2014}.$$

Exercice 4 Soient a et b des réels positifs tels que $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}=1$. Montrer qu'alors

$$\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=a-b.$$

- Inégalités -

Pour les inégalités usuelles, voir les polycopiés des stages précédents, ainsi que le cours d'Animath rédigé par Pierre Bornsztein.

Exercice 5 Montrer l'inégalité de Nesbitt : pour tous les réels $a, b, c > 0$, on a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Trouver également le cas d'égalité.

Exercice 6 Soient $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ des réels. Montrer que

$$n(a_1^3 + \ldots + a_n^3) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^2 + \ldots + a_n^2).$$

Exercice 7 Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ tels que $a_1 \ldots a_n = 1$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(2 + a_i) \geqslant 3^n.$$

Exercice 8 Montrer que pour tous réels x et y, on a

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}.$$

Exercice 9 Montrer que pour tous $a, b, c > 0$

$$\frac{(a + 2b + 3c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leqslant 6.$$

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 D'après l'identité ci-dessus, on a $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 2(2 - ab)$. Il suffit donc d'évaluer ab. On a $4 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2 + 2ab$, d'où $ab = 1$, et $a^3 + b^3 = 2$. Ensuite, $4 = (a^2+b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2$, d'où $a^4 + b^4 = 2$. *Solution de l'exercice 2* La première chose à faire est d'exploiter un peu mieux la condition qui nous est donnée. Une manière simple de le faire est de tout mettre au même dénominateur et de multiplier par $(1+a)(1+b)$. On obtient

$$a(1+b) + b(1+a) = (1+a)(1+b),$$

c'est-à-dire, en développant et en simplifiant, $ab = 1$. Ainsi, la condition de l'énoncé n'est qu'une manière déguisée de dire que a et b sont inverses l'un de l'autre ! En remplaçant b par $\frac{1}{a}$ dans le premier terme du côté gauche de l'expression cherchée, on obtient :

$$\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = \frac{a}{1+\frac{1}{a^2}} - \frac{b}{1+a^2} = \frac{a^3-b}{1+a^2}.$$

Afin de faire disparaître le dénominateur, on va introduit artificiellement des facteurs $(1+a^2)$ au numérateur et on utilise encore $ab = 1$:

$$\frac{a^3-b}{1+a^2} = \frac{a^3+a-a+a^2b-a^2b-b}{1+a^2} = \frac{a(a^2+1)-a+a-b(1+a^2)}{1+a^2} = a-b.$$

Solution de l'exercice 3 On applique simplement la formule du binôme à $a = b = 1$ et à $a = 1, b = -1$.

Solution de l'exercice 4 L'astuce est de remarquer que pour tout entier strictement positif k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Par télescopage, la somme cherchée vaut donc $1 - \frac{1}{2014} = \frac{2013}{2014}$.

Solution de l'exercice 5 Appelons I le côté gauche de l'inégalité, et $J = a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$. Alors par Cauchy-Schwarz, $IJ \geqslant (a+b+c)^2$. On se ramène donc à montrer

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2},$$

ce qui est équivalent à

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca),$$

vrai car équivalent à

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

On voit grâce à cette dernière inégalité aussi que l'égalité n'a lieu que lorsque $a = b = c$.

Solution de l'exercice 6 Par symétrie, on peut supposer $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et on applique l'inégalité de Tchebychev.

Solution de l'exercice 7 On applique l'IAG à chaque facteur : $2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geqslant 3\sqrt[3]{a_i}$, d'où l'inégalité grâce à la condition sur les a_i. L'égalité n'a lieu que lorsque tous les a_i valent 1.

Solution de l'exercice 8 Remarquons qu'il suffit de prouver l'inégalité lorsque x et y sont positifs. Dans ce cas, en appliquant l'IAG à chacun des termes du côté droit , on a

$$x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2+1)+\frac{1}{2}(y^2+x^2+1) = x^2+y^2+1.$$

Il suffit donc de montrer que l'inégalité est en fait stricte, c'est-à-dire que le cas d'égalité n'a jamais lieu. Or d'après le cas d'égalité de l'IAG, pour qu'il y ait égalité il faut et il suffit que $x = \sqrt{y^2+1}$ et $y = \sqrt{x^2+1}$ simultanément, ce qui, en mettant au carré, donne bien deux conditions contradictoires.

Solution de l'exercice 9 On applique Cauchy-Schwarz :

$$(1 \times a + 1 \times b + 1 \times b + 1 \times c + 1 \times c + 1 \times c)^2 \leqslant 6 \times (a^2 + 2b^2 + 3c^2).$$

Une autre possibilité est

$$(1 \times a + \sqrt{2} \times \sqrt{2}b + \sqrt{3} \times \sqrt{3}c)^2 \leqslant (1^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2)(a^2 + (\sqrt{2}b)^2 + (\sqrt{3}c)^2).$$