DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Jean-François MARTIN
STAGE : Grésillon 2011

Equations fonctionnelles

Exercice 1 Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Exercice 2 Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

Exercice 3 Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(x) + x^2.$$

Exercice 4 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Cauchy dont le graphe n'est pas dense dans le plan. Montrer que f est linéaire.

Exercice 5 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les deux équations fonctionnelles suivantes sont équivalentes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y).$$

Exercice 6 Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\exists n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} : \forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f(x + y^n) = f(x) + f(y)^n.$$

Exercice 7 Soit f l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par (pour tout n dans $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1, \\
f(3) &= 3, \\
f(2n) &= f(n), \\
f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\
f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n).
\end{aligned}$$

Exercice 8 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifant la solution suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right).$$

Montrer que f n'est pas surjective.

- Correction -

Solution de l'exercice 1 Pour x fixé, le membre de droite parcourt $\mathbb{R}$, ce qui assure que f est surjective. De plus, en substituant à y deux éventuels antécédents d'un même nombre, on montre que f est injective. Ainsi, f est bijective.

Soit α l'antécédent de 0. En substituant dans l'équation originale $x = 0, y = \alpha$, on obtient que :

$$f(0) = \alpha + f(0)^2.$$

De plus, en substituant dans l'équation originale $x = y = \alpha$, on obtient que $f(0) = \alpha$. Ainsi, on obtient $f(0) = 0$.

En injectant $x = 0$ dans l'équation originale, on obtient alors que f est involutive. Il est donc naturel de remplacer x par $f(x)$ dans l'équation originale, ce qui donne pour tout x, y réels $f(xf(x) + f(y)) = y + x^2$. En combinant cette relation avec l'équation originale, on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = \pm x.$$

Il faut maintenant montrer qu'il n'y a pas de solutions hybrides. Soit x non nul tel que $f(x) = x$. Soit maintenant y non nul quelconque et montrons que $f(y) = y$. Supposons par l'absurde que $f(y) = -y$. Alors, l'égalité de l'énoncé se réécrit $\pm(x^2 - y) = y + x^2$. Si, le signe est un $+$, l'égalité est équivalente au contradictoire $y = 0$; si le signe est un $-$, l'égalité est équivalente au tout aussi contradictoire $y = 0$.

Ainsi, les deux seules solutions a priori possible sont $\pm\mathrm{Id}$ et une simple vérification montre qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 2 Pour $x = 0$, l'équation de l'énoncé nous donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \ f(0) = f(yf(0)).$$

Supposons par l'absurde que $f(0) \neq 0$ et posons $y = \frac{x}{f(0)}$ dans l'équation précédente. Nous obtenons que f est constante, ce qui est clairement en contradiction avec l'équation de l'énoncé. Ainsi, $f(0) = 0$.

Pour $y = 0$, l'équation de l'énoncé nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(xf(x)) = x^2.$$

Pour $y = -x$, l'équation de l'énoncé nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(-xf(x)) = -x^2.$$

En combinant ces deux équations, nous obtenons que f est surjective.

De plus, si α est un antécédent de 0, injecter $x = \alpha$ dans l'équation $f(xf(x)) = x^2$ nous assure que $0 = \alpha^2$ et donc que $\alpha = 0$. Le seul antécédent de 0 est donc 0.

Soit x et y deux réels tels que $f(x) = f(y) =: c$. Nous avons déjà traité le cas où $c = 0$, nous supposerons donc $c \neq 0$. En utilisant l'équation originale pour $x = 0$ puis pour $y = y - x$, nous obtenons que :

$$x^2 = f(xf(x)) = f(xf(y)) = f((y-x)f(x)) + x^2.$$

Ainsi, $f((y-x)c) = 0$, d'où $(y-x)c = 0$, d'où (comme $c \neq 0$) $x = y$. Ainsi, f est injective. f est donc bijective.

De plus, les équations $f(xf(x)) = x^2$ et $f(-xf(x)) = -x^2$ nous assurent que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}f(\sqrt{x}) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}f(\sqrt{-x}) & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}.$$

En particulier, f^{-1} est impaire et donc f est également impaire.

En utilisant plusieurs fois l'équation originale, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, f(yf(x)) &= -x^2 + f(xf(x+y)) = -x^2 - (f((x+y)f(x+y-x)) - (x+y)^2) \\ &= 2xy + f((x+y)f(-y)) + (-y)^2 = 2xy + f(-yf(-y+x+y)) \\ &= 2xy - f(yf(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, on sait que, quelque soient x et y, $f(yf(x)) = xy$. Par symétrie, on en déduit immédiatement que $f(xf(y)) = xy$. On obtient donc que $f(yf(x)) = f(xf(y))$, ce qui se réécrit par injectivité comme $yf(x) = xf(y)$. Quitte à supposer que x et y sont non nuls, on en déduit que $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$. On en déduit immédiatement que cette quantité est constante sur $\mathbb{R}^*$, donc que f est linéaire sur $\mathbb{R}^*$ puis que (car $f(0) = 0$) f est linéaire sur $\mathbb{R}$.

Après vérification, on vérifie que les deux seules solutions de cette équation fonctionnelle sont $\pm\mathrm{Id}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Considérons l'ensemble $E = \{f(x) - f(y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

En considérant la quantité $f(x-f(y))-f(x) = f(f(y))+xf(y)-1$ et en faisant varier x en laissant y fixe, on se rend compte que (à part dans le cas $f(y) = 0$) cette quantité parcourt $\mathbb{R}$. Or, la fonction nulle n'étant clairement pas solution, on peut effectivement trouver un tel y, prouvant que $E = \mathbb{R}$.

En substituant $f(x)$ à x dans l'équation originale, on montre que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; f(f(x) - f(y)) = f(f(y)) + f(x)f(y) + f(f(x)) - 1.$$

En exploitant la symétrie du membre de droite, on obtient que $f(f(x)-f(y)) = f(f(y)-f(x))$. On remarque immédiatement que cela peur s'écrire comme $\forall a \in E, \;\; f(a) = f(-a)$, donc que (puisque $E = \mathbb{R}$), f est paire.

En utilisant cette parité et en posant $x = 0$ dans l'équation originale, nous obtenons directement que $f(0) = 1$.

De plus, en substituant $f(y)$ à x dans l'équation originale, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \;\; f(0) = f(f(y)) + f(y)^2 + f(f(y)), \text{ d'où } \forall y \in \mathbb{R}, \;\; f(f(y)) = 1 - \frac{f(y)^2}{2}.$$

En utilisant cette relation dans l'équation $f(f(x)-f(y)) = f(f(y))+f(x)f(y)+f(f(x)) - 1$, on obtient que :

$$f(f(x) - f(y)) = 1 - \frac{f(y)^2}{2} + f(x)f(y) + 1 - \frac{f(x)^2}{2} - 1 = 1 - \frac{(f(x) - f(y))^2}{2}.$$

Ainsi, on a montré que pour tout a dans E, $f(a) = 1 - \frac{a^2}{2}$. Comme $E = \mathbb{R}$, la seule solution éventuelle est $x \longleftrightarrow 1 - \frac{x^2}{2}$, qui respectivement convient effectivement.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Rappelons (c.f. cours de Pierre) que $\forall (q, x) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{R}, f(qx) = qf(x)$.

Soit U un ouvert non vide ne contenant aucun point du graphe de f.

Supposons par l'absurde que f n'est pas linéaire. Alors, il existe $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ des points du graphe qui ne sont pas alignés avec l'origine O. D'après la remarque préliminaire, tous les points de la forme $(qx, qf(x))$ avec q rationnel appartiennent également au graphe, donc ce dernier est dense dans la droite (OA). On montre de la même façon qu'il est dense dans la droite (OB). En particulier, il existe $C \in (OA)$ et $D \in (OB)$ des points du graphe tels que la droite passe par U. Notons x' et y' les abscisses respectives de C et D. Alors, d'après la remarque préliminaire et en utilisant l'équation de Cauchy, on remarque que pour tous q, r rationnels, $f(qx' + ry') = qf(x') + rf(y')$. On obtient donc un ensemble dense de points du graphe sur la droite (CD), ce qui prouve en particulier qu'il existe des points du graphe à l'intérieur de U, apportant la contradiction désirée.

Solution de l'exercice 5 Le sens direct est évident : on applique simplement deux fois la première équation.

Supposons que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$.

En posant $x = y = 0$ dans l'équation de l'énoncé, on obtient que $f(0) = 3f(0)$; d'où $f(0) = 0$.

En posant $y = -1$, on obtient que pour tout x réel, $f(x) + f(-1) + f(-x) = f(-1)$, doù f impaire.

En posant $y = 1$, on montre que pour tout x réel, $f(2x + 1) = 2f(x) + f(1)$. On a donc immédiatement que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R},\ \ f(2f(u + v + uv) + 1) = 2f(u) + 2f(v) + 2f(uv) + f(1).$$

De plus, en utilisant l'équation de l'énoncé avec $x = u$ et $y = 2v + 1$, on montre que pour tous $u, v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(2f(u + v + uv) + 1) &= f(u + (2v + 1) + u(2v + 1)) = f(u) + f(2v + 1) + f(2uv + u) \\ &= f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u). \end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient donc que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R},\ \ f(u) + 2f(uv) = f(2uv + u).$$

On remarque en particulier que, pour $v = -\frac{1}{2}$, on montre que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(2x) = 2f(x)$. On peut donc réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\forall u, v \in \mathbb{R},\ \ f(u) + f(2uv) = f(u + 2uv).$$

En substituant $u = x$ et $2uv = y$ (en supposant x non nul), on montre que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ \ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

De plus, cette équation est encore valide pour $x = 0$ puisque l'on a déjà démontré que $f(0) = 0$.

On a donc bien démontré que les deux équations étaient équivalentes.

Solution de l'exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ tel que l'équation de l'énoncé soit vérifiée.

En posant $x = y = 0$ dans cette équation, on obtient que $f(0) = f(0) + f(0)^n$, d'où $f(0)^n = 0$ i.e. $f(0) = 0$.

En posant $x = 0$, on montre que pour tout y réel, $f(y^n) = (f(y))^n$. L'équation de l'énoncé se réécrit donc $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ f(x + y^n) = f(x) + f(y^n)$. On en déduit en particulier (en posant $y = y^n$) que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

En posant $y = -x$ dans cette dernière équation, on obtient clairement que f est impaire. En particulier, cette propriété permet de se passer de la condition $y > 0$ dans l'équation de Cauchy.

Fixons un réel x. Soit $\alpha = f(1)$. On sait d'après Cauchy que pour tout rationnel q, $f(q) = \alpha q$. On sait de plus que pour tout rationnel q, $f(qx) = qf(x)$. On peut alors montrer que pour $X \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k X^k f(x)^{n-k} &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} f(X)^k f(x)^{n-k} = (f(X) + f(x))^n = f(X + x)^n = f((X + x)^n) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} X^k x^{n-k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} f(X^k x^{n-k}) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} X^k f(x^{n-k}).\end{aligned}$$

En posant respectivement P et Q les polynômes $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k X^k f(x)^{n-k}$ et $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} X^k f(x^{n-k})$ respectivement, on en déduit que $P - Q$ admet une infinité de racines et est donc nul. En particulier, le coefficient devant X^{n-2} est le même dans ces deux polynômes, ce qui se réécrit comme $\alpha^{n-2} f(x)^2 = f(x^2)$. En particulier, on en déduit qu'il y a un quart de plan sans points du graphe de f. L'exercice 4 permet alors de conclure que f est linéaire.

Après vérification, les seules solutions sont la fonction nulle, l'identité et, si n est impair, la fonction $-\mathrm{Id}$.

Solution de l'exercice 7 L'étude des petites valeurs ainsi que l'omniprésence des puissances de 2 donne rapidement une expression plus agréable de f : c'est la fonction qui renverse l'écriture en base 2. Les équations de l'énoncé définissant clairement intégralement f, il suffit de vérifier que cette autre fonction, que nous nommerons g vérifie aussi ces conditions. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et notons

$\overline{b_1b_2...b_n}^2$ l'écriture en base 2 de n. Alors $g(1) = g(\overline{1}^2) = \overline{1}^2 = 1$, $g(3) = g(\overline{11}^2) = \overline{11}^2 = 3$, et :

$$g(2n) = g(\overline{b_1b_2...b_n0}^2) = \overline{0b_n...b_2b_1}^2 = \overline{b_n...b_2b_1}^2 = g(\overline{b_1b_2...b_n}^2) = g(n).$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} g(4n+1) &= g(\overline{b_1b_2...b_n01}^2) = \overline{10b_n...b_2b_1}^2 = 2^n + \overline{1b_n...b_2b_1}^2 \\ &= 2 \cdot \overline{1b_n...b_2b_1}^2 - \overline{b_n...b_2b_1}^2 = 2g(2n+1) - g(n), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} g(4n+3) &= g(\overline{b_1b_2...b_n11}^2) = \overline{11b_n...b_2b_1}^2 = 2 \cdot 2^n + \overline{1b_n...b_2b_1}^2 \\ &= 3 \cdot \overline{1b_n...b_2b_1}^2 - 2 \cdot \overline{b_n...b_2b_1}^2 = 2g(2n+1) - g(n). \end{aligned}$$

Le nombre de points fixes se calcule alors facilement : la moitié (au sens large) du nombre en détermine le reste, et il faut que le dernier chiffre soit 1. En utilisant que $2011 = \overline{11111011011}^2$, cela donne un total de $1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+2\cdot(14) = 90$ points fixes.

Solution de l'exercice 8 Supposons par l'absurde que f est surjective.

Notons pour tout entier n strictement positif a_n un antécédent de n.

Remarquons qu'en posant $x = u$ puis $y = v$ on montre que $f(u) = f(v)$ pour $u, v \in \mathbb{R}$, et que pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} f\left(u + \frac{1}{n}\right) &= f\left(u + \frac{1}{f(a_n)}\right) = f\left(a_n + \frac{1}{f(u)}\right) = f\left(a_n + \frac{1}{f(v)}\right) \\ &= f\left(v + \frac{1}{f(a_n)}\right) = f\left(v + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On peut appliquer ce raisonnement m fois pour montrer que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R} : f(u) = f(v),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ \ f\left(u + \frac{m}{n}\right) = f\left(v + \frac{m}{n}\right).$$

Ainsi, on a montré que $\forall q \in \mathbb{Q}_+^* : f(u) = f(v),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ \ f(u+q) = f(v+q)$. Or, en appliquant l'équation de l'énoncé, on voit que $f\left(a_1 + \frac{1}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 - 1 + \frac{1}{f(a_1)}\right) = f(a_1)$. Ainsi, en appliquant un certain nombre de fois le résultat précédent, on voit que $f(a_1) = f\left(a_1 + \frac{1}{f(a_1-1)}\right)$, $f\left(a_1 + \frac{1}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{2}{f(a_1-1)}\right)$, $f\left(a_1 + \frac{2}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{3}{f(a_1-1)}\right)$ jusqu'à $f\left(a_1 + \frac{f(a_1-1)-1}{f(a_1-1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{f(a_1-1)}{f(a_1-1)}\right)$.

En combinant toutes ces égalités, on en déduit que $f(a_1) = f(a_1+1)$. On en déduit alors immédiatement que $\forall q \in \mathbb{Q}_+^*, \ \ f(a_1+q) = f(a_1+q+1)$.

On remarque que l'égalité de l'énoncé montre (puisque le second membre parcourt alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}^*$) que $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{1}{\mathbb{N}^*}\right) = \mathbb{N}^*$. Pour les valeurs particulières suivantes de x, on en déduit donc que :

$$\begin{cases} x = a_1 + \frac{1}{3} \ \Rightarrow \ \exists \alpha : f\left(a_1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}\right) = 1. \\ y = a_1 \ \Rightarrow \ \exists \beta : f\left(a_1 + \frac{1}{\beta}\right) = q \text{ où } \frac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de la fraction } \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

On déduit alors de l'équation de l'énoncé ainsi que de la propriété $\forall q \in \mathbb{Q}_+^*, \ f(a_1+q) = f(a_1+q+1)$ que :

$$\begin{aligned} f\left(a_1 + \frac{1}{q}\right) &= f\left(a_1 + \frac{1}{f\left(a_1 + \frac{1}{\beta}\right)}\right) \\ &= f\left(a_1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{f(a_1)}\right) = f\left(a_1 + \frac{1}{\beta} + 1\right) = f\left(a_1 + \frac{1}{\beta}\right) = q \end{aligned}$$

Soit k un entier strictement positif tel que $kp \equiv \ [q]$ (existant d'après Bézout). Alors, en utilisant $\frac{kp-1}{q}$ fois cette même propriété, on déduit de $f\left(a_1 + \frac{1}{q}\right) = q$ que $f\left(a_1 + \frac{kp}{q}\right) = q$. En utilisant plusieurs fois la stabilité par addition par un rationnel de l'égalité entre les images, on déduit de $f(a_1) = 1 = f\left(a_1 + \frac{p}{q}\right)$ que $f\left(a_1 + \frac{kp}{q}\right) = 1$. Ainsi, $q = 1$, ce qui est contradictoire puisque $\frac{p}{q}$ est défini comme étant la somme de $\frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}$.