DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Jean-Louis TU

STAGE : Montpellier 2014

# Coordonnées barycentriques

## 1 Préliminaires

**Définitions de base** Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan et $a_1, \ldots, a_n$ des réels de somme non nulle. On appelle *barycentre* de $(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)$ l'unique point $G$ tel que pour tout point $O$ on ait

$$a_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{OA_n} = (a_1 + \cdots + a_n)\overrightarrow{OG}.$$

En fait cette condition ne dépend pas de $O$. En effet, en utilisant $\overrightarrow{O'A_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}$, on s'aperçoit que lorsque l'on remplace $O$ par $O'$ dans le membre de gauche, celui-ci augmente de $(a_1 + \cdots + a_n)\overrightarrow{O'O}$, et de même pour le membre de droite. Ceci permet de montrer l'existence et l'unicité de $G$.

Le point $G$ s'interprète physiquement comme le centre de gravité d'un solide dont la masse est concentrée en les points $A_1, \ldots, A_n$ tel que $A_i$ soit affecté du poids $a_i$ pour tout $i$ (on autorise des poids négatifs). Le point $G$ est le point par lequel il faut suspendre le solide afin qu'il reste horizontal.

On notera $G = \text{bar}((A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n))$. On écrira aussi abusivement

$$G = \frac{a_1A_1 + \cdots + a_nA_n}{a_1 + \cdots + a_n}.$$

On montre aisément la propriété d'associativité des barycentres, qui s'écrit

$$\text{bar}((A, a), (\text{bar}((B, b), (C, c)), d)) = \text{bar}((A, a), (B, d\frac{b}{b + c}), (C, d\frac{c}{b + c})).$$

Soit maintenant $ABC$ un (vrai) triangle du plan. Pour tout point $M$ du plan, il existe un et un seul triplet $(x, y, z)$ de réels tels que $x + y + z = 1$ et $M = xA + yB + zC$ (en effet, en prenant $O = A$ comme origine, ceci équivaut à

$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$, ce qui détermine $y$ et $z$ de manière unique, puis le choix de $x$ est imposé par $x = 1 - y - z$).
Les réels $x, y, z$ s'appellent les coordonnées barycentriques (normalisées) de $M$ dans le repère affine $(A, B, C)$.

**Intérêt des coordonnées barycentriques** La plupart des calculs en coordonnées barycentriques sont analogues aux calculs dans les coordonnées cartésiennes. Dans chacun de ces deux cadres, tous les problèmes de géométrie classique peuvent se résoudre par une méthode calculatoire systématique si on dispose d'un temps suffisamment long ou d'un logiciel de calcul formel. Les méthodes analytiques sont souvent impraticables en situation de concours, mais permettent tout de même dans une proportion non négligeable de cas de s'assurer de résoudre un exercice en moins de 30 minutes, ce qui peut être appréciable.
Les coordonnées cartésiennes sont indiquées lorsque l'énoncé du problème fait apparaître un point à l'intersection de deux droites perpendiculaires. Par exemple, si le pied $D$ de la hauteur issue de $A$ d'un triangle $ABC$ joue un rôle important, il peut être indiqué de prendre $D = (0, 0)$, $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$. On a alors $H = (0, h)$ avec $bc = -ah$ (ceci se retrouve par un calcul ou par le fait que le symétrique $H'$ de $H$ par rapport à $(BC)$ se trouve sur le cercle circonscrit et en utilisant la puissance de $D$ par rapport au cercle).
Cependant, en l'absence d'un tel point privilégié, le choix d'un repère cartésien est souvent arbitraire, et il est préférable dans les problèmes de géométrie du triangle d'utiliser les coordonnées barycentriques qui ont l'avantage d'être symétriques par rapport à $(A, B, C)$.
Les coordonnées cartésiennes comme les coordonnées barycentriques permettent aisément de déterminer
– une équation de droite passant par deux points
– l'intersection de deux droites
– l'équation de l'axe radical de deux cercles dont on connaît les équations
– la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.
Par contre, contrairement aux nombres complexes elles traitent mal les angles et les transformations géométriques (rotations, similitudes).
Les coordonnées barycentriques permettent, plus aisément que les coordonnées cartésiennes, de traiter
– l'isotomie
– l'isogonalité
– le cercle inscrit et son centre
– le cercle circonscrit à $ABC$, ou plus généralement les cercles passant par deux

sommets du triangle.

Les calculs faisant intervenir les points $O$ et $H$ sont possibles mais souvent un peu lourds.

**Produit mixte** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan Euclidien, l'aire (orientée) du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est notée $[\vec{u}, \vec{v}]$. Elle est positive si $(\vec{u}, \vec{v})$ est un repère direct, négative sinon. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$ (antisymétrie)
- $[a\vec{u}, \vec{v}] = a[\vec{u}, \vec{v}]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$
- $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}] = [\vec{u}_1, \vec{v}] + [\vec{u}_2, \vec{v}]$ (linéarité par rapport à la première variable)
- $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u} + a\vec{v}, \vec{v}]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (découle de la linéarité par rapport à la première variable et de l'antisymétrie).

et les propriétés analogues par rapport à la seconde variable.

Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe, alors $[\vec{i}, \vec{j}] = -[\vec{j}, \vec{i}] = 1$ et $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = 0$. On en déduit que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\binom{x_1}{y_1}$ et $\binom{x_2}{y_2}$, alors $[\vec{u}, \vec{v}]$ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

<u>Démonstration.</u> $[\vec{u}, \vec{v}] = x_1[\vec{i}, \vec{v}] + y_1[\vec{j}, \vec{v}] = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}]$.

On notera $[ABC]$ l'aire orientée de $ABC$. Elle se calcule par le produit mixte $\frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ ou toute expression obtenue par permutation circulaire.

**Déterminant en dimension 3** Tout ceci se généralise en dimension 3 avec

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2.$$

Le déterminant change de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes. Il est linéaire par rapport à chaque ligne ou chaque colonne.

**Produit vectoriel** Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit leur produit vectoriel par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer que
– ce vecteur est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
– dans tous les cas, il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
Nous n'utiliserons pas explicitement ces propriétés, mais considèrerons seulement le produit vectoriel comme un outil calculatoire.

**Notations de la géométrie du triangle** Si $ABC$ est un triangle, nous désignerons par $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des côtés, par $p = (a + b + c)/2$ le demi-périmètre et par $\alpha, \beta, \gamma$ les angles.
On notera $O, G, H, I, I_a$ le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$ respectivement.
Les *notations de Conway* sont souvent commodes :

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ S_b &= \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2) \\ S_c &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\ S_{ab} &= S_a S_b, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Les identités suivantes sont utiles pour simplifier certaines expressions :

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= a^2 \\ S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a &= S^2 \end{aligned}$$

où $S$ est le <u>double</u> de l'aire du triangle $ABC$. Cette dernière identité se démontre, soit en développant le membre de gauche et en comparant avec la formule de Héron, soit en utilisant l'identité $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$ et le fait que $S_a = S \cot\alpha$.

## 2 Coordonnées barycentriques de points remarquables

Soit $M$ un point du plan. On peut calculer ses coordonnées barycentriques $(x, y, z)$ par la formule

$$x = \frac{|MBC|}{|ABC|}.$$

En effet, $2|MBC| = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}] = [\overrightarrow{BC}, x\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}] = x[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] = 2x|ABC|$.

On écrira $M = (x, y, z)$ ou $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la notation en colonne étant préférable mais nous emploierons plus souvent la notation en ligne pour des raisons typographiques.

Ainsi, on voit que $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Cependant, pour éviter les dénominateurs, on dira que le triplet $(x, y, z)$ forme un système de coordonnées barycentriques d'un point $M$ s'il est proportionnel au triplet des coordonnées barycentriques normalisées, autrement dit si $M$ est le barycentre de $(A, x)$, $(B, y)$ et $(C, z)$. On écrira $M \simeq (x, y, z)$ pour abréger.

Ainsi, $G \simeq (1, 1, 1)$.

Les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit sont faciles à obtenir. On a en effet $|IBC| = \frac{1}{2}ra$, donc

$$I = (\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}) \simeq (a, b, c).$$

De même, on peut montrer que $I_a \simeq (-a, b, c)$.

Passons au centre du cercle circonscrit. On a $|OBC| = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$, donc $O \simeq (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$.

Si on préfère utiliser les longueurs des côtés, on note que $|OBC| = \frac{1}{2}BC.BO.\sin\widehat{CBO} = \frac{1}{2}aR\cos\alpha = \frac{1}{2}aR\frac{S_a}{bc} = a^2 S_a \frac{R}{2abc}$, donc

$$O \simeq (a^2 S_a, b^2 S_b, c^2 S_c).$$

Pour traiter l'orthocentre, notons $D$ le pied de la hauteur issue de $A$. On a $HD = BD\cot\gamma = c\cos\beta\cot\gamma$, donc $|HBC| = \frac{1}{2}ac\cos\beta\cot\gamma = \frac{1}{2}S_b\frac{S_c}{S}$. Il vient

$$H \simeq (S_{bc}, S_{ca}, S_{ab}) \simeq (\frac{1}{S_a}, \frac{1}{S_b}, \frac{1}{S_c}).$$

Comme $\frac{1}{S_a} = \frac{\tan\alpha}{S}$, on a aussi $H \simeq (\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$ du moins si le triangle n'est pas rectangle.

## 3 Vecteurs, droites, intersections

On a vu qu'un triplet $(x, y, z)$ de réels tels que $x + y + z \neq 0$ représente un point $\dfrac{xA + yB + zC}{x + y + z}$.
Un vecteur est représenté par un triplet $(x, y, z)$ tel que $x + y + z = 0$. C'est par définition le vecteur $x\overrightarrow{\Omega A} + y\overrightarrow{\Omega B} + z\overrightarrow{\Omega C}$ (on vérifie aisément que cela ne dépend pas du choix de l'origine $\Omega$).
Si $M = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ alors $M + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$.
Attention : il est important pour ce calcul de prendre des coordonnées normalisées.

Une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur, mais il est souvent commode d'utiliser une équation cartésienne.
Rappelons qu'une fonction $f$ du plan vers $\mathbb{R}$ est dite *affine* si elle conserve les barycentres, c'est-à-dire si pour tous points $M$ et $M'$ et tout réel $\lambda$ on a

$$f((1 - \lambda)M + \lambda M') = (1 - \lambda)f(M) + \lambda f(M').$$

Dans le plan muni d'un repère cartésien, les fonctions de la forme $f(x, y) = ux + vy + w$ sont affines. Donc si $D$ est une droite, il existe une fonction affine $f$ telle que $D$ est l'ensemble des points où $f$ s'annule. Il est facile de montrer que $f$ est unique à une constante multiplicative près, et que réciproquement pour toute fonction affine non nulle $f$, l'ensemble des points où $f$ s'annule est une droite.

En coordonnées barycentriques, il est facile de vérifier que les fonctions de la forme $f(x, y, z) = ux + vy + wz$ sont affines. Réciproquement, si $f$ est affine, alors $f(xA+yB+zC) = xf(A)+yf(B)+zf(C)$ est de la forme précédente avec $u = f(A)$, $v = f(B)$ et $w = f(C)$.

En résumé, un triplet de réels non tous nuls $(u, v, w)$ détermine une équation de droite

$$ux + vy + wz = 0,$$

ce triplet étant déterminé à un coefficient multiplicatif près. Si $(D)$ est cette droite, on écrira $(D) \simeq (u, v, w)$.

**Proposition 3.1.** La droite passant par $M$ et $N$ est $M \wedge N$.

En effet, le vecteur $(u, v, w)$ obtenu par produit vectoriel de $M$ et $N$ est orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ au triplet représentant $M$, donc si $M = (x, y, z)$ on a $ux + vy + wz$. Autrement dit, la droite représentée par $(u, v, w)$ passe par $M$, et de même elle passe par $N$, donc s'identifie à $(MN)$.

Calculons par exemple l'équation de la droite d'Euler. On calcule

$$G \wedge O \simeq \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}a^2S_a\\b^2S_b\\c^2S_c\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}c^2S_c - b^2S_b\\a^2S_a - c^2S_c\\b^2S_b - a^2S_a\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, un point de coordonnées barycentriques $(x, y, z)$ appartient à la droite d'Euler si et seulement si

$$(c^2S_c - b^2S_b)x + (a^2S_a - c^2S_c)y + (b^2S_b - a^2S_a)z = 0.$$

Remarquons que cette équation étant homogène, on n'a pas besoin de normaliser les coordonnées pour vérifier cette équation.

Par un raisonnement similaire,

**Proposition 3.2.** La droite passant par un point $P \simeq (x, y, z)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \simeq (x', y', z')$ est $(x, y, z) \wedge (x', y', z')$.

**Proposition 3.3.** Le point d'intersection de deux droites sécantes $(D)$ et $(D')$ est $(D) \wedge (D')$.

Pour montrer l'alignement de trois points $M_i \simeq (x_i, y_i, z_i)$, on peut écrire que $M_3$ appartient à la droite déterminée par $M_1 \wedge M_2$. Mais comme $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [u, v, w]$, on obtient que

**Proposition 3.4.** $M_1, M_2, M_3$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On a une condition similaire de concourance de trois droites.

<u>Remarque</u> : D'une manière générale, le déterminant ci-dessus est égal au quotient $\dfrac{|M_1M_2M_3|}{|ABC|}$.

<u>Remarque utile</u> :
1) si $M \simeq (x, y, z)$, alors le point d'intersection de $(AM)$ avec $(BC)$ est $N \simeq (0, y, z)$. En effet, $A$, $M$ et $N$ se trouvent sur la droite d'équation $zY - yZ = 0$.
2) De plus, $N \simeq (0, \overline{NC}, \overline{BN})$.

*Exercice 1.* Utiliser cette remarque pour démontrer le théorème de Ceva.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Si trois céviennes sont concourantes en un point $M = (x, y, z)$, notons $A', B', C'$ leurs pieds. On a $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{z}{y}$ et on a des expressions

analogues obtenues par permutation circulaire. Le produit des trois membres de droite vaut $-1$, donc le produit des trois membres de gauche aussi :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Réciproquement, si les pieds de trois céviennes satisfont l'égalité précédente, soit $M$ l'intersection de $(AA')$ et $(BB')$. D'après la partie directe, la droite $(CM)$ coupe $(AB)$ en un point $C''$ tel que $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$ et il est aisé, en utilisant $\overline{C'A} = \overline{C'B} + \overline{BA}$, d'en déduire que $C' = C''$.

*Exercice 2.* Montrer que si $A'B'C'$ est le triangle de contact du cercle inscrit alors les droites $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes en un point (appelé point de Gergonne) dont on déterminera les coordonnées barycentriques.

*Solution de l'exercice 2* On a $\frac{p-b}{p-c} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}$ et les égalités analogues obtenues par permutation circulaire, donc le théorème de Ceva permet de conclure que les droites sont concourantes. Notons $(x, y, z)$ les coordonnées barycentriques du point de Gergonne. On a $\frac{p-b}{p-c} = \frac{z}{y}$ donc $y(p-b) = z(p-c)$. Par permutation circulaire, on a $x(p-a) = y(p-b) = z(p-c)$, donc $(x, y, z) \simeq (\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}) \simeq ((p-b)(p-c), (p-c)(p-a), (p-a)(p-b))$.

La remarque permet également de définir le conjugué isotomique d'un point $M \simeq (x, y, z)$ n'appartenant pas à la réunion des côtés du triangle par $M' \simeq (yz, zx, xy) \simeq (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$. Il est caractérisé par le fait que les pieds des céviennes passant par $M$ et par $M'$ sont symétriques par rapport aux milieux des côtés correspondants.
Par exemple, si $A''$ est le point de contact du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$ avec la droite $(BC)$, alors les droites $(AA''), (BB'')$ et $(CC'')$ se rencontrent au point conjugué isotomique du point de Gergonne, encore appelé point de Nagel.

# 4 Cercles et puissance d'un point par rapport à un cercle

A partir de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (OA^2 + OB^2 - ||\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}||^2)/2$, on obtient $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{c^2}{2}$.
En développant le produit scalaire (pour $x + y + z = 1$)

$$||x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}||^2 = (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}) \cdot (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}),$$

on trouve

$$\begin{aligned} OM^2 &= (x^2+y^2+z^2)R^2 + xy(2R^2-c^2) + yz(2R^2-a^2) + zx(2R^2-b^2) \\ &= (x+y+z)^2R^2 - (a^2yz+b^2zx+c^2xy) \\ &= R^2 - (a^2yz+b^2zx+c^2xy), \end{aligned}$$

ce qui prouve la

**Proposition 4.1.** La puissance de $M=(x,y,z)$ par rapport au cercle circonscrit est égale à $-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)$.

Si $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont deux cercles différents, la fonction $M \mapsto p_\Gamma(M) - p_{\Gamma'}(M)$ est affine donc de la forme $(x,y,z) \mapsto ux+vy+wz$.

**Proposition 4.2.** Etant donné un cercle, il existe des constantes $u,v,w$ uniques telles que la puissance de $M=(x,y,z)$ par rapport à ce cercle est égale à $-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)+ux+vy+wz$.

Un point appartient au cercle si et seulement sa puissance par rapport au cercle est nulle. Afin de rendre l'équation obtenue homogène, on multiplie la partie affine par $x+y+z$ qui vaut 1. On en déduit

**Théorème 4.3.** Toute équation de cercle est de la forme

$$-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)+(x+y+z)(ux+vy+wz)=0.$$

On remarque qu'il est facile de trouver l'axe radical de deux cercles en soustrayant leurs équations.

*Exercice 3.* Déterminer l'équation du cercle inscrit.

*Solution de l'exercice 3* Notons $D$ le projeté orthogonal de $I$ sur $[BC]$. On a $BD = p-b$ et $DC=p-c$ donc $D \simeq (0, p-c, p-b)$. Les deux autres projetés orthogonaux s'obtiennent de manière analogue.
La condition que le cercle $-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)+(x+y+z)(ux+vy+wz)=0$ passe par $D$ donne

$$(p-c)v+(p-b)w = a(p-b)(p-c) = ((p-b)+(p-c))(p-b)(p-c).$$

On constate que si on pose $u=(p-a)^2$, $v=(p-b)^2$ et $w=(p-c)^2$, alors $D$ satisfait l'équation, et donc $E$ et $F$ aussi par permutation circulaire.

*Exercice 4.* Déterminer l'équation du cercle d'Euler.

*Solution de l'exercice 4* Il suffit d'écrire qu'il passe par $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$, ce qui donne

$$-(a^2yz+b^2zx+c^2xy)+\frac{1}{2}(x+y+z)(S_ax+S_by+S_cz)=0.$$

**Proposition 4.4.** La tangente en $(x_0, y_0, z_0)$ au cercle d'équation $-(a^2yz + b^2zx + c^2xy) + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0$ est la droite d'équation

$$-\frac{1}{2}(a^2(y_0z + yz_0) + b^2(z_0x + zx_0) + c^2(x_0y + xy_0)) + (ux + vy + wz) = 0.$$

Nous ne montrerons pas cette proposition. La raison conceptuelle est que, lorsque $(x, y, z)$ est proche de $(x_0, y_0, z_0)$ sous la contrainte $x + y + z = 1$, $yz$ est proche de $y_0z + yz_0$ à des termes du second ordre près.
Une autre manière de démontrer la proposition est de montrer par un calcul que l'intersection de la droite et du cercle se réduit au point $(x_0, y_0, z_0)$.

# 5 Norme, produit scalaire

Des calculs analogues à ceux de la section précédente montrent que

**Proposition 5.1.** Si $\vec{v} = (x, y, z)$ est un vecteur, alors $||\vec{v}||^2 = -(a^2yz+b^2zx+c^2xy)$.

Le signe moins semble contre-intuitif car une norme est toujours positive, mais il ne faut pas oublier la contraire $x + y + z = 0$ qui force au moins l'une des coordonnées à être négative.
Plus généralement,

**Proposition 5.2.** Si $\vec{v} = (x, y, z)$ est un vecteur, alors

$$\vec{v} \cdot (x'\overrightarrow{OA} + y'\overrightarrow{OB} + z'\overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{2}(a^2(yz' + y'z) + b^2(zx' + z'x) + c^2(xy' + x'y)).$$

En particulier, si $\vec{v'} = (x', y', z')$ est un vecteur, alors

$$\vec{v} \cdot \vec{v'} = -\frac{1}{2}(a^2(yz' + y'z) + b^2(zx' + z'x) + c^2(xy' + x'y)).$$

**Théorème 5.3.** Le conjugué isogonal de la droite $(0, v, w)$ par rapport à l'angle $\widehat{A}$ est $(0, c^2w, b^2v)$.

*Démonstration.* Notons $D$ et $D'$ ces deux droites. Par un argument de continuité, on se ramène au cas où $D$ et $D'$ coupent la droite $(BC)$ et sont distincts de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$.
Soit $M \simeq (0, by, cz)$ le point d'intersection de $D$ avec $(BC)$, alors on vérifie immédiatement que $M' \simeq (0, bz, cy)$ est le point d'intersection de $D'$ avec $(BC)$.
On a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{by+cz}(0, by, cz) - (1, 0, 0) = \frac{1}{by+cz}(-by - cz, by, cz)$.

Le vecteur $\vec{v} = (-by - cz, by, cz)$ est dont un vecteur directeur de $D$. Grâce à la formule de la proposition précédente, on peut calculer sa norme. Tous calculs faits, on obtient

$$||\vec{v}||^2 = bc((b^2 + c^2 - a^2)yz + bc(y^2 + z^2))$$

qui est une expression symétrique en $y$ et $z$.
Comme $M'$ s'obtient à partir de $M$ en permutant $y$ et $z$, on voit que le vecteur $\vec{v'} = (-bz - cy, bz, cy)$ est un vecteur directeur de $D'$ qui est de même norme que $\vec{v}$, donc $\vec{v} + \vec{v'}$ est un vecteur directeur d'une bissectrice de $(D, D')$.
Calculons ce vecteur : $\vec{v} + \vec{v'} = (y + z)(-b - c, b, c) = (y + z)(a + b + c)\overrightarrow{AI}$.
D'autre part, $y + z \neq 0$, sinon $\vec{v} \simeq (-b + c, b, -c)$ serait orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ (calcul) et $M$ serait sur la bissectrice extérieure de $\widehat{A}$. Ceci prouve que $(AI)$ est une bissectrice de $(D, D')$. □

**Théorème 5.4.** Soit $M \simeq (x, y, z)$ un point n'appartenant pas au cercle circonscrit de $ABC$. Alors le point

$$M' \simeq (\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}) \simeq (a^2yz, b^2zx, c^2xy)$$

est le conjugué isogonal de $M$.

*Démonstration.* La droite $(0, z, -y)$ passe par $M$ et a pour conjugué isogonal par rapport à l'angle $\widehat{A}$ la droite $(0, -c^2y, b^2z)$ qui passe par $M'$. En raisonnant de même sur les deux autres angles, la conclusion suit. □

Exemple : le point de Lemoine (le point de rencontre des symédianes, c'est-à-dire le conjugué isogonal de $G$) est $K \simeq (a^2, b^2, c^2)$.
*Exercice 5.* Démontrer que $O$ et $H$ sont conjugués isogonaux l'un de l'autre.

*Solution de l'exercice 5* Ceci découle directement du théorème précédent et des expressions des coordonnées barycentriques de $O$ et $H$. Evidemment, une chasse aux angles est tout aussi rapide pour démontrer la propriété.

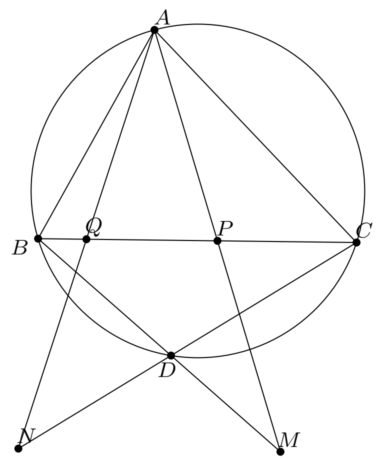
*Exercice 6.* Montrer que la symédiane issue de $A$ (c'est-à-dire le conjugué isogonal de la médiane) passe par l'intersection des tangentes en $B$ et $C$ au cercle circonscrit.

*Solution de l'exercice 6* Les tangentes en $B$ et $C$ ont pour équations respectives $c^2x + a^2z = 0$ et $b^2x + a^2y = 0$. Leur intersection est $\simeq (c^2, 0, a^2) \wedge (b^2, a^2, 0) = (-a^4, a^2b^2, a^2c^2) \simeq (-a^2, b^2, c^2)$, qui appartient bien à la droite d'équation $c^2y - b^2z = 0$ passant par $A$ et $K$.

# 6 Problèmes

Nous allons tenter d'appliquer ces méthodes à des problèmes récents d'OIM ou de shortlist. Evidemment, comme le calcul analytique n'est généralement pas praticable il est recommandé à titre d'entraînement de chercher une méthode synthétique aux exercices proposés, mais comme nous l'avons déjà souligné, il est utile de disposer d'une méthode de secours permettant de garantir l'obtention de 7 points à peu de frais.

*Exercice 7.* (OIM 2014, exercice 4.) Soient $P$ et $Q$ deux points sur le segment $[BC]$ d'un triangle acutangle $ABC$ tels que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Soient $M$ et $N$ les points de $(AP)$ et $(AQ)$ respectivement tels que $P$ est le milieu de $[AM]$ et $Q$ est le milieu de $[AN]$. Montrer que l'intersection de $(BM)$ et de $(CN)$ se situe sur le cercle circonscrit au triangle $ABC$.




Solution de l'exercice 7

Comme $PBA$ est semblable à $ABC$, et que le rapport de similitude est $AB/BC = c/a$, on a $BP = c^2/a$, d'où $PC = a - c^2/a = (a^2 - c^2)/a$. Il vient $P \simeq (0, a^2 - c^2, c^2)$ et de même $Q \simeq (0, b^2, a^2 - b^2)$.
On en déduit que $M = 2P - A = 2\frac{1}{a^2}(0, a^2 - c^2, c^2) - (1, 0, 0) \simeq 2(0, a^2 - c^2, c^2) - (a^2, 0, 0) = (-a^2, 2a^2 - 2c^2, 2c^2)$ et de même $N \simeq (-a^2, 2b^2, 2a^2 - 2b^2)$.

$$\begin{aligned}
(BM) &= (0,1,0) \wedge (-a^2, 2a^2 - 2c^2, 2c^2) \\
&= (2c^2, 0, a^2) \\
(CN) &= (2b^2, a^2, 0) \\
D &\simeq (2c^2, 0, a^2) \wedge (2b^2, a^2, 0) \\
&= (-a^4, 2a^2b^2, 2a^2c^2) \simeq (-a^2, 2b^2, 2c^2).
\end{aligned}$$

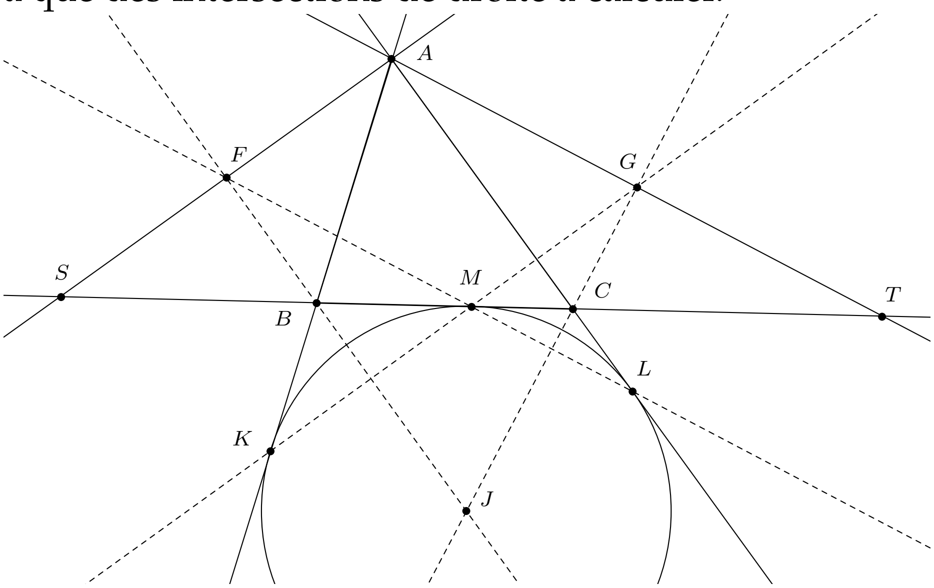
Un calcul immédiat donne que $D$ vérifie l'équation $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ du cercle circonscrit.

Remarque : en prime on voit que $D$ appartient à la symédiane issue de $A$.

Les autres exercices de 2014, ainsi que les exercices de 2013, ne semblent pas adaptés à un traitement par les coordonnées barycentriques.

*Exercice 8.* (OIM 2012, exercice 1.) Soit $J$ le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$ d'un triangle $ABC$. Ce cercle est tangent au côté $(BC)$ en $M$, et aux côtés $(AB)$ et $(AC)$ en $K$ et $L$ respectivement. Les droites $(LM)$ et $(BJ)$ se rencontrent en $F$, et les droites $(KM)$ et $(CJ)$ se rencontrent en $G$. Soit $S$ le point d'intersection de $(AF)$ avec $(BC)$, et $T$ le point d'intersection de $(AG)$ avec $(BC)$. Montrer que $M$ est le milieu de $[ST]$.

*Solution de l'exercice 8* Ici, on s'attend à ce que les coordonnées barycentriques permettent de résoudre rapidement le problème puisque les coordonnées des points de contact du cercle exinscrit ont une expression simple connue, et il n'y a que des intersections de droite à calculer.




On sait que $J \simeq (-a, b, c)$.
Comme $BM = p - c$ et $MC = p - b$, on a $M \simeq (0, p - b, p - c)$.
Comme $CL = p - b$ et $AL = p$, on a $L \simeq (b - p, 0, p)$ et de même $K \simeq (c - p, p, 0)$.
$(BJ) = (0, 1, 0) \wedge (-a, b, c) \simeq (c, 0, a)$.
$(ML) = (0, p - b, p - c) \wedge (b - p, 0, p) \simeq (p, c - p, p - b)$.
$F = (BJ) \wedge (ML) = (\cdots, -c(p - b) + ap, c(c - p))$, donc
$S \simeq (0, -c(p-b)+ap, -c(p-c)) = (0, -c(a+c-p)+pa, -c(p-c)) \simeq (0, a+c, -c)$.
Par symétrie, $T \simeq (0, -b, a + b)$.
Le milieu de $[ST]$ a pour coordonnées $\frac{1}{a}(0, a + c, -c) + \frac{1}{a}(0, -b, a + b) \simeq (0, a + c - b, a + b - c) \simeq M$.

*Exercice 9.* (shortlist G2 de l'OIM 2011.) Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère non cyclique. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant 4$, soit $O_i$ et $r_i$ le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ (où ou a posé $A_{i+4} = A_i$). Prouver que

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

*Solution de l'exercice 9* Il faut montrer que la somme des inverses des puissances de $A_i$ par rapport au cercle $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ est nulle. On prend $A_1A_2A_3$ comme triangle de référence. Comme les cercles passent par au moins deux points du triangle, leurs équations sont faciles à déterminer.

Notons $(x_0, y_0, z_0)$ les coordonnées barycentriques (normalisées) de $A_4$. On sait déjà que la puissance de $A_4$ par rapport à $A_1A_2A_3$ est égale à $-a^2y_0z_0 - b^2z_0x_0 - c^2x_0y_0$, donc

$$\frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = -\frac{1}{a^2y_0z_0 + b^2z_0x_0 + c^2x_0y_0}.$$

Cherchons la puissance par rapport au cercle $A_2A_3A_4$ sous la forme $-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz)$.

Comme elle s'annule en $A_2$ et $A_3$, on a $v = w = 0$. Comme elle s'annule en $A_4$, on a $-a^2y_0z_0 - b^2z_0x_0 - c^2x_0y_0 + ux_0 = 0$.

La puissance de $A_1$ par rapport au cercle $A_2A_3A_4$ est égale à $u$. On a donc

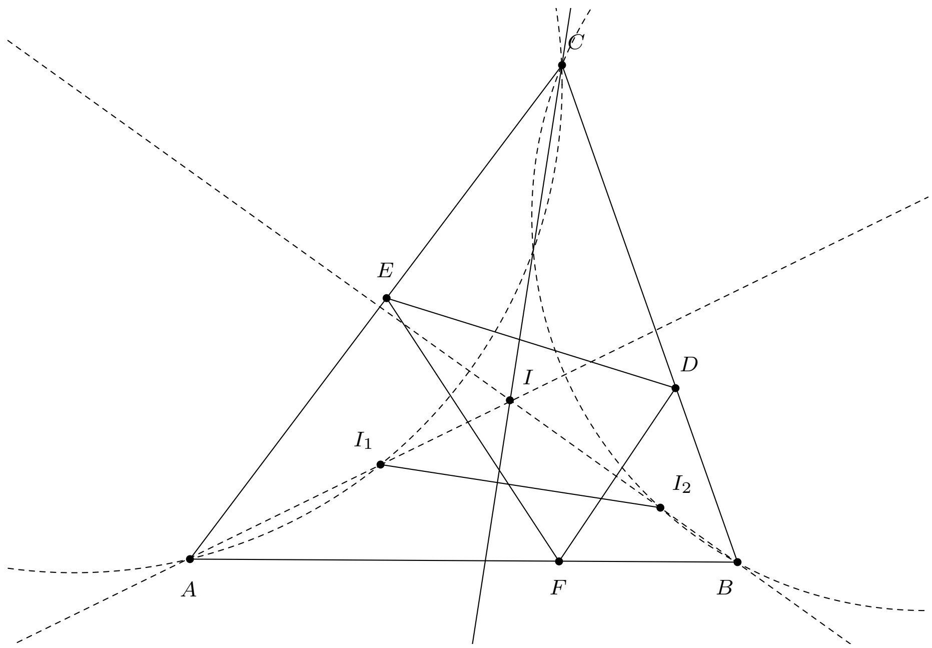
$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} = \frac{1}{u} = \frac{x_0}{a^2y_0z_0 + b^2z_0x_0 + c^2x_0y_0}.$$

Le calcul de $\frac{1}{O_iA_i^2 - r_i^2}$ pour $i = 2, 3$ s'obtient par permutation circulaire, d'où la conclusion.

*Exercice 10.* (shortlist G3 de l'OIM 2013.) Dans un triangle acutangle $ABC$, les points $D, E$ et $F$ sont les pieds des hauteurs issues de $A, B, C$ respectivement. Les centres des cercles inscrits à $AEF$ et $BDF$ sont $I_1$ et $I_2$ respectivement ; les centres des cercles circonscrits à $ACI_1$ et $BCI_2$ sont $O_1$ et $O_2$ respectivement. Montrer que $(I_1I_2)$ et $(O_1O_2)$ sont parallèles.

*Solution de l'exercice 10* On se dit qu'une solution calculatoire doit être praticable car le triangle $AEF$ étant semblable à $ABC$, les coordonnées des $I_1$ sont faciles à obtenir. Comme le cercle $ACI_1$ passe par deux sommets, son équation a une forme simple. Enfin, la conclusion de l'énoncé est équivalente au fait que $\overrightarrow{I_1I_2}$ est orthogonal à l'axe radical des deux cercles, dont l'équation est facile à calculer.

On commence par faire un dessin faisant apparaître l'axe radical :




On constate graphiquement que l'axe radical et les droites $(AI_1)$ et $(BI_2)$ sont concourants. Evidemment, $(AI_1)$ et $(BI_2)$ se coupent en $I$ puisque ce sont les bissectrices des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$. On est donc ramenés à montrer que
1) $(CI)$ est perpendiculaire à $(I_1I_2)$
2) $I$ appartient à l'axe radical des deux cercles.

On commence par calculer les coordonnées de $I_1$.
Comme $H \simeq (\frac{1}{S_a}, \frac{1}{S_b}, \frac{1}{S_c})$, on a $E \simeq (\frac{1}{S_a}, 0, \frac{1}{S_c}) \simeq (S_c, 0, S_a)$. Compte tenu de $S_c + S_a = b^2$, on en déduit que

$$E = \frac{1}{b^2}(S_c, 0, S_a)$$

et de même $F = \frac{1}{c^2}(S_b, S_a, 0)$.
Comme $AEF$ et $ABC$ sont semblables, il vient

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a+b+c}(aA + bE + cF) \\ &= \frac{1}{a}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{b(a+b+c)}\begin{pmatrix}S_c\\0\\S_a\end{pmatrix} + \frac{1}{c(a+b+c)}\begin{pmatrix}S_b\\S_a\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{a}{abc(a+b+c)}\begin{pmatrix}abc + cS_c + bS_b\\ bS_a\\ cS_a\end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'expression de $I_2$ s'obtient en échangeant $a$ et $b$ et en échangeant les coordonnées $x$ et $y$ :

$$I_2 = \frac{b}{abc(a+b+c)} \begin{pmatrix} aS_b \\ abc + aS_a + cS_c \\ cS_b \end{pmatrix}$$

On calcule $I_2 - I_1$ et on factorise :

$$I_2 - I_1 = \frac{1}{abc(a+b+c)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}ac(a+b+c)(a+b-c) \\ \frac{1}{2}bc(a+b+c)(a+b-c) \\ \frac{1}{2}c(a-b)(a+b+c)(a+b-c) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -a \\ b \\ a-b \end{pmatrix}.$$

Comme $I_a - C \simeq (-a,b,c) - (0,0,-a+b+c) = (-a,b,a-b)$, la droite $(I_1I_2)$ est parallèle à la bissectrice extérieure donc est perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{C}$.

Il reste à montrer le point 2). Comme le cercle $ACI_1$ passe par $A$ et $C$, son équation est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + \mu(x+y+z)y = 0.$$

Le fait qu'il passe par $I_1$ donne, après simplification, la condition

$$\mu(a+b+c)b = a^2S_a + (b+c)(abc + bS_b + cS_c).$$

De même, le cercle $ABI_2$ a pour équation $-a^2yz - b^2zx - c^2xy + \lambda(x+y+z)x = 0$ avec

$$\lambda(a+b+c)a = b^2S_b + (a+c)(abc + aS_a + cS_c).$$

L'axe radical a pour équation $\lambda x - \mu y = 0$. Le fait que $I$ appartienne à cet axe s'écrit $\lambda a = \mu b$. Compte tenu des équations précédentes, ceci équivaut à

$$a^2S_a + (b+c)(abc + bS_b + cS_c) = b^2S_b + (a+c)(abc + aS_a + cS_c),$$

ce qui se vérifie immédiatement en développant le membre de gauche et en vérifiant qu'il est invariant par l'échange de $a$ et $b$.

Remarque : les calculs sont un peu longs dans cet exercice, mais faisables en un temps raisonnable moyennant une analyse géométrique rudimentaire.