DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaires
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Puissance d'un point

Le groupe des avancés a étudié la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, et chemin faisant quelques propriétés des vecteurs et du produit scalaire ont été mentionnés. Nous renvoyons au cours de Pierre Dehornoy disponible sur le site d'Animath à l'adresse `http://www.animath.fr/IMG/pdf/cour` pour les théorèmes relatifs à la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Voici les différents exercices d'application qui ont été vus en cours.

- Énoncés -

Exercice 1 Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles qui se coupent en A et en B. Soit Δ une droite tangente aux deux cercles en M et en N. Montrer que (AB) coupe le segment $[MN]$ en son milieu.

Exercice 2 Soient $ABCD$ et $CDEF$ deux quadrilatères inscrits dans deux cercles Γ_1, Γ_2. On suppose que parmi les droites (AB), (CD) et (EF) il n'y en a pas deux qui soient parallèles. Alors les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes si, et seulement si, les points A, B, E et F sont cocycliques.

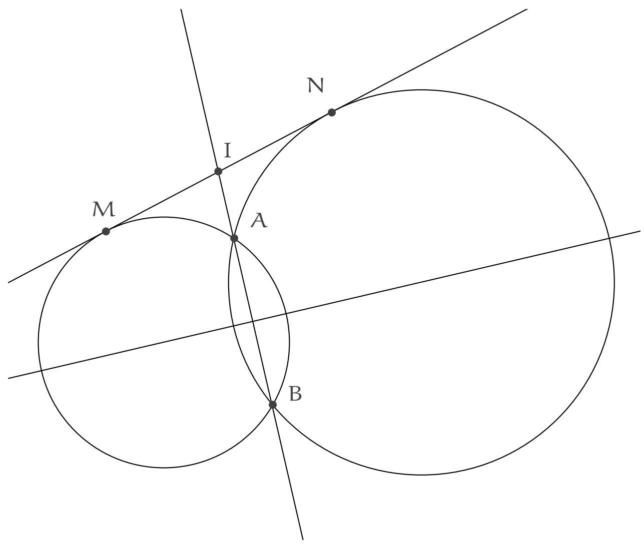
Exercice 3 Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 4 Soit ABC un triangle qui n'est ni rectangle, ni isocèle. Notons respectivement A_1, B_1 et C_1 les projetés orthogonaux de A sur (BC), B sur (CA) et C sur (AB). Notons A_2 le point d'intersection des droites (BC) et (B_1C_1), B_2 celui des droites (AC) et (A_1C_1), C_2 celui des droites (AB) et (A_1B_1). Montrer que les points A_2, B_2, C_2 sont alignés.

Question bonus : montrer que la droite qui passe par A_2, B_2 et C_2 est orthogonale à (OH), où O est le centre du cercle circonscrit de ABC et H son orthocentre.

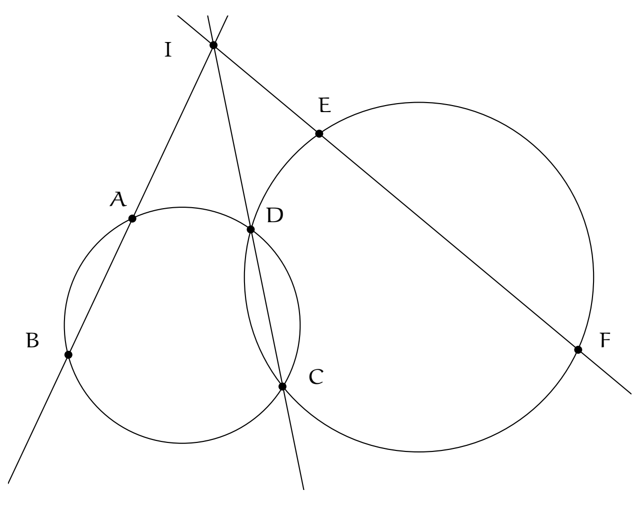
- Corrigés -

Solution de l'exercice 1



La puissance de I par rapport au premier cercle vaut $IM^2 = IA \cdot IB$. La puissance de I par rapport au deuxième cercle vaut $IA \cdot IB = IN^2$. On en déduit que $IM^2 = IN^2$, d'où $IM = IN$.

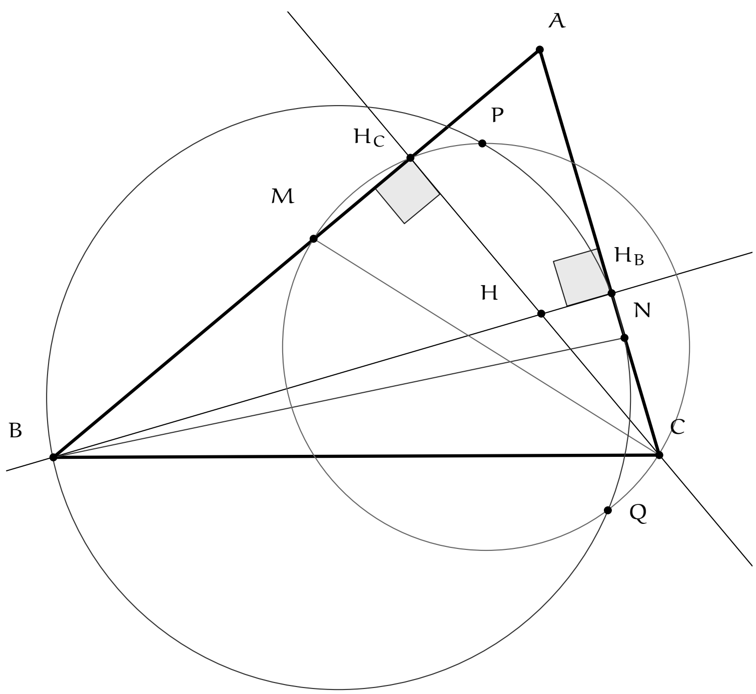
Solution de l'exercice 2



Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes. Alors la puissance de I par rapport au cercle de gauche vaut $IA \cdot IB = ID \cdot IC$. La puissance de I par rapport au cercle de droite vaut $ID \cdot IC = IE \cdot IF$. On en déduit que $IA \cdot IB = IE \cdot IF$, et donc que A, B, F, E sont cocycliques.

Réciproquement, si A, B, F, E sont cocycliques, notons I le point d'intersection des droites (AB) et (EF). La puissance de I par rapport au cercle circonscrit à $ABFE$ vaut $IA \cdot IB = IE \cdot IF$. Donc I a même puissance par rapport aux deux cercles de la figure. I est donc sur leur axe radical, qui est (DC). Les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont donc concourantes en I.

Solution de l'exercice 3

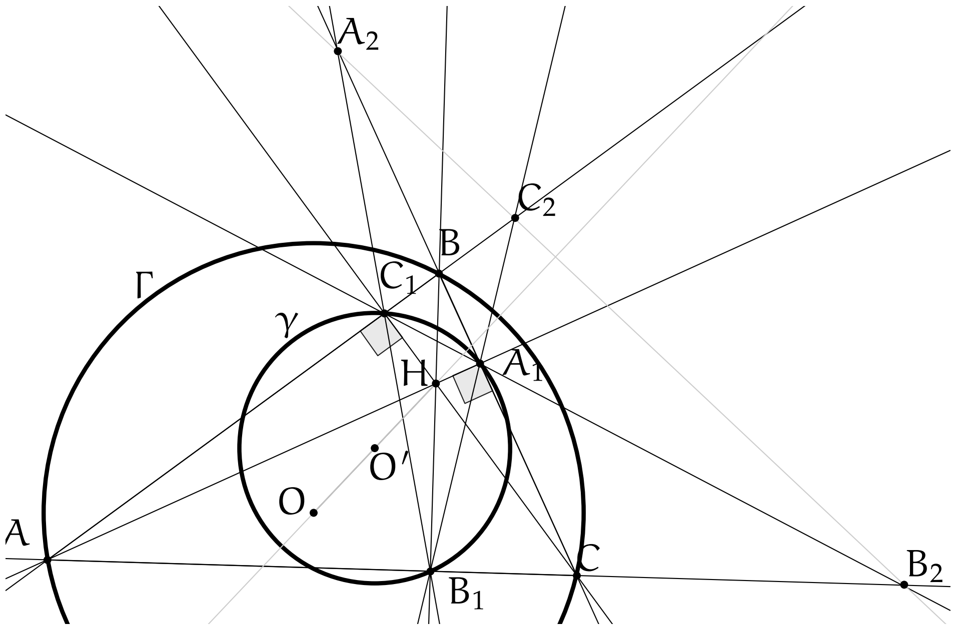


Nous allons montrer que H a la même puissance par rapport aux deux cercles de la figure, ce qui impliquera que H est sur leur axe radical, qui est (PQ).

Pour cela, comme $(BH_B) \perp (AC)$, H_B est sur le cercle de diamètre $[BN]$. La puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BN]$ vaut donc $-HB \cdot HH_B$. De même, la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ vaut $-HC \cdot HH_C$.

Or les points B, H_C, H_B, C sont cocycliques : ces points sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$. On en déduit que $-HB \cdot HH_B = -HH_C \cdot HC$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4



Notons γ le cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$ (qu'on appelle cercle d'Euler de ABC) et Γ le cercle circonscrit à ABC. Nous allons montrer que les points A_2, B_2, C_2 ont même puissance par rapport à γ et Γ, ce qui impliquera qu'ils sont alignés sur l'axe radical de γ et Γ.

La puissance de B_2 par rapport à Γ vaut $B_2C \cdot B_2A$ et la puissance de B_2 par rapport à γ vaut $B_2A_1 \cdot B_2C_1$. Or, comme dans l'exercice précédent, A, C_1, A_1, C sont cocyliques. Donc $B_2A_1 \cdot B_2C_1 = B_2C \cdot B_2A$. Ainsi B_2 est sur l'axe radical de γ et Γ. De la même manière, on montre qu'il en est de même pour C_2 et A_2.

Pour résoudre la question bonus, on sait que l'axe radical de γ et Γ est orthogonal à la droite joignant les centres de γ et Γ. Notons donc O le centre du cercle circonscrit de ABC et O' le centre du cercle circonscrit de $A_1B_1C_1$, de sorte que la droite passant par A_2, B_2, C_2 est orthogonale à (OO'). Il suffit donc de montrer que $H \in (OO')$. D'après les propriétés du cercle d'Euler du triangle ABC, O' est en fait le milieu de $[OH]$ (pour le retrouver, considérer l'homothétie de centre le centre de gravité de ABC et de rapport $-1/2$), ce qui conclut.