DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Louis NEBOUT
STAGE : Grésillon 2011

Nombres complexes en géométrie

Ce cours est un résumé rapide de ce qui à été fait au stage, énonçant les résultats importants et donnant quelques éléments de preuve.

- Définition des nombres complexes -

Dès que l'on fait de l'algèbre, on tombe à un moment où à un autre sur des équations algébriques, dont certaines n'ont pas de solution réelles. Les nombres complexes sont nés pour palier ce problème. L'idée derrière la construction des nombres complexes est de plonger $\mathbb{R}$ dans un ensemble plus gros, obtenu en rajoutant à $\mathbb{R}$ une solution de l'équation algébrique $X^2 = -1$, appelée i.

Qu'est-ce que veux dire l'équation $i^2 = -1$? Par exemple, l'équation $(-3)^2 = 9$ signifie qu'en appliquant deux fois la transformation "multiplication par -3" au réel 1 de la droite réelle, on arrive sur 9. Avec ce type de raisonnement, i s'interprète donc comme une transformation de la droite réele telle que, en l'appliquant deux fois à 1, on tombe sur -1. La façon naturelle d'interpréter cela est de plonger la droite réelle dans un plan, et d'interpréter la transformation i comme un quart de tour autour de l'origine. On a donc envie de définir ce plan contenant la droite réelle pour l'ensemble des nombres complexes, et une multiplication complexe s'interprétant en termes de rotation. Cela conduit aux définitions suivantes :

Définition 1. Ensemblistement, on définit $\mathbb{C}$ comme étant égal à $\mathbb{R}^2$. On note le nombre complexe de coordonnées (a, b) sous la forme $a + ib$. On définit les additions et multiplications de complexes de la façon suivante : $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$ et $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$. Cette définition est la seule définition "raisonnable" de la multiplication complexe, c'est à dire la seule qui soit distributive, commutative, compatible avec la multiplication réelle, et telle que $i^2 = -1$. Si $z = a + ib$, a s'appelle la partie réelle de z, notée $\mathfrak{R}(z)$, et b est sa partie imaginaire, notée $\mathfrak{I}(z)$. Un nombre à partie réelle nulle est appelé imaginaire pur. On appelle conjugué de $a + ib$ le complexe $a - ib$, image du premier par une symétrie d'axe l'horizontale. Le conjugué de z est noté $\overline{z}$.

On vérifie que l'on peut diviser des nombres complexes : pour calculer l'inverse $\frac{1}{a+ib}$, on multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée $a - ib$, ce qui donne $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Définition 2. On définit : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Proposition 3. On a : $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$.

Cette proposition confirme notre interprétation des nombres complexes en termes de rotation. Accessoirement, elle contient toute la trigonométrie usuelle, et permet donc de retrouver ses formules rapidement en examinant les parties réelles ou imaginaires.

Définition 4. Tout nombre complexe z possède une écriture polaire sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel positif, et θ est un angle. Attention : cette écriture n'est pas unique, car θ est défini à 2π près. Le nombre r est le module du nombre complexe z, et est noté $|z|$. L'angle θ est appelé argument du nombre z.

Cette écriture nous permet d'interpréter la multiplication complexe en termes géométriques : la multiplication complexe multiplie les distances à l'origine, et additionne les angles par rapport à l'horizontale. En d'autres termes, la multiplication par le complexe $re^{i\theta}$ est la similitude directe de centre 0, de rapport r et d'angle θ.

Proposition 5. On a les égalités suivantes :
- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

- Théorème de D'Alembert-Gauss -

Théorème 6. Tout polynôme à coefficients réels possède une racine dans $\mathbb{C}$.

Ce théorème implique immédiatement que tout polynôme à coefficients réels est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il se factorise complètement comme produit de polynômes de degré 1. Il est aussi vrai si on prend des polynômes à coefficients complexes. Ce théorème extrêmement puissant (il est souvent appelé théorème fondamental de l'algèbre) est la raison pour laquelle les nombres complexes sont si omniprésents en mathématiques.

Corollaire 7. Tout polynôme à coefficients réels se factorise comme produit de polynômes de degré 1 et 2.

Démonstration. Un polynôme à coefficients réels est égal à son conjugué, et donc si P a une racine complexe λ dans sa factorisation sur $\mathbb{C}$, alors $\overline{\lambda}$ est racine de même multiplicité, or le polynôme $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ est à coefficients réels. $\square$

Ce résultat est un exemple de résultat portant uniquement sur des réels, mais impossible à prouver sans faire intervenir les complexes. Je vais en expliquer un autre. Considérons un polynôme de second degré $aX^2 + bX + c = a[(X - b/2a)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$. Quand son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, on sait que ses racines sont réelles et on peut les calculer explicitement en fonction de $\sqrt{\Delta}$. Si Δ est négatif, cette preuve marche aussi en complexe : on écrit les solutions en fonction de $i\sqrt{-\Delta}$ (dont le carré est Δ).

Essayons de faire la même chose avec un polynôme de degré 3 sous forme réduite, $X^3 + pX + q$. Dans le cas où son discriminant $\Delta = q^2 + 4p^3/27$ est négatif, les complexes permettent de s'en sortir. Je n'entrerais pas dans le détail des formules. Par exemple, à propos de l'équation $X^3 - 15x + 4 = 0$, les calculs nous disent qu'elle admet une racine s'écrivant $u + v$, où u et v sont des complexes vérifiant $u^3 = 2+11i$ et $v^3 = 2-11i$. On vérifie que $u = 2+i$ et $v = 2 - i$ conviennent, et donnent la racine 4. On a donc une formule, faisant intervenir des complexes, mais donnant au final un nombre réel. Ce qui est étonnant, c'est qu'en fait ce cas où le discriminant est négatif correspond au cas où le polynôme a trois racines réelles. On peut démontrer que, dans ce cas purement réel, il est impossible de donner des formules générales (dans un sens à préciser) calculant ces racines réelles, et ne faisant pas intervenir les nombres complexes.

Voici deux autres exemples de résultats portant sur les réels, dont la démonstration fait intervenir les complexes.

Exercice 1 Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Solution de l'exercice 1 Soit λ une racine complexe de P. Alors λ^2 est racine, donc $|\lambda| = 1$. De plus, $(\lambda+1)^2$ est racine, donc $|\lambda+1| = 1$. Ainsi, $\lambda = j = e^{2i\pi/3}$, ou bien $\lambda = \bar{j}$. Le polynôme cherché est donc de la forme $P = ((X-j)(X-\bar{j}))^n = (1+X+X^2)^n$. Réciproquement ces polynômes conviennent.

Exercice 2 Calculer $\sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3i}$.

Solution de l'exercice 2 On s'inspire de la preuve $2\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = (1+1)^n + (1-1)^n$, donnée par la formule du binôme :

$$3\sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3i} = (1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

On a utilisé le fait que $1+j+j^2 = 0$. Le résultat cherché est donc $\frac{2^n + 2\cos n\pi/3}{3}$.

On pourrait continuer indéfiniment, tant les nombres complexes sont importants dans tous les domaines des mathématiques. Je vais conclure en donnant mon exemple préféré d'utilisation des nombres complexes : le théorème des nombres premiers. Les démonstrations les plus naturelles de ce théorème difficile font en effet toutes intervenir les nombres complexes :

Théorème 8. La proportion de nombres premier inférieurs à n est équivalente à $\frac{\log n}{n}$.

- Preuve du théorème de D'Alembert-Gauss -

Nous avons vu à quel point il pouvait être utile de prendre les racines d'un polynôme, si utile que nous allons utiliser cette technique pour donner une esquisse de preuve du théorème de D'Alembert-Gauss lui-même. Sans rentrer dans les détails, la construction faite en première partie, consistant à rajouter à un ensemble $\mathbb{R}$ la racine d'une équation algébrique, est en fait parfaitement générale. En partant d'un polynôme P à coefficients réels, cette construction permet de construire un ensemble K contenant $\mathbb{C}$ (possédant lui aussi une addition et une multiplication compatibles avec celle de $\mathbb{C}$) sur lequel le polynôme P est scindé. Cet ensemble est appelé corps de rupture du polynôme P. Nous avons maintenant besoin d'un outil permettant de relier ces racines, appartenant à un ensemble K que l'on contrôle très mal, aux coefficients du polynômes, qui sont réels. Ce lien est fourni par la théorie des polynômes symétriques.

Définition 9. Un polynôme en les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ est symétrique s'il est invariant par permutation de ses variables.

Définition 10. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. On définit le k-ème polynôme symétrique élémentaire σ_k en les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ par

$$\sigma_k(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{S \in \{1,\ldots,n\}, |S|=k} \prod_{i \in S} X_i.$$

Proposition 11.

$$\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) X^{n-k}.$$

Cette proposition est presque évidente : il suffit de développer. On peut donc exprimer les coefficients (réels) de notre polynôme P en fonction de ses racines (appartenant à son corps de rupture). On a même mieux :

Théorème 12. Soit Q un polynôme symétrique à coefficients réels à n variables $(X_1, \ldots, X_n)$. Alors il existe un polynôme P à coefficients réels et à n variables tel que :

$$Q(X_1, \ldots, X_n) = P(\sigma_1(X_1, \ldots, X_n)), \ldots, \sigma_n(X_1, \ldots, X_n)).$$

Démonstration. Ce théorème possède une preuve algorithmique simple : on ordonne les monômes de Q par ordre lexicographique (i.e. on associe à chaque monôme la suite des exposants des variables $(X_1, \ldots, X_n)$, et on classe cela avec l'ordre du dictionnaire). On retranche alors à Q un terme en les polynômes symétriques choisi pour tuer le monôme le plus grand, et on itère. $\square$

Ainsi, tout polynôme symétrique en les racines de P (dans le corps de rupture) s'exprime en fonction des coefficients de P (des réels), et est donc réel. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème de D'Alembert-Gauss.

On raisonne par récurrence sur la valuation 2-adique du degré de p. L'initialisation est que tout polynôme de degré impair à une racine : on regarde ses valeurs en $\pm\infty$ (ce qui est un résultat analytique, il est en effet impossible de donner une preuve purement algébrique du théorème de D'Alembert-Gauss).

Montrons le résultat au rang k. On écrit le degré n de P sous la forme $2^k m$, avec m impair, et on note ces racines $(r_1, \ldots, r_n)$, dans K. Soit t un réel, on définit :

$$q_t(z) = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (z - r_i - r_j - t r_i r_j).$$

Les coefficients de ce polynôme sont symétriques en les r_i, donc sont réels d'après la discussion précédente. Comme il est de degré $2^{k-1}m(n-1)$, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : une de ses racines $r_i + r_j + tr_ir_j$ est en fait complexe. Comme ce résultat est vrai pour tout t, et qu'il y a une infinité de nombres réels, on peut même trouver un couple (i, j) et deux réels t et s tels que $r_i + r_j + sr_ir_j$ et $r_i + r_j + tr_ir_j$ soient tous deux complexes. Ainsi, r_ir_j et $r_i + r_j$ sont complexes, et r_i et r_j sont donc les racines du polynôme à coefficients complexe $X^2 - (r_i + r_j)x + r_ir_j$. Par les formules habituelles, ces racines sont complexes, ce qui clôt la récurrence.

- Applications à la géométrie plane -

L'idée de l'utilisation des complexes en géométrie est d'associer à chaque point du plan sa coordonnée complexe (que l'on appelle son affixe), et de faire les calculs sur ces coordonnées. On notera le point en majuscule, et son affixe en minuscule. Cette méthode très puissante a de nombreux avantages par rapport à la géométrie cartésienne classique. Essentiellement :

– on travaille avec une coordonnée au lieu de deux,
– les calculs trigonométriques sont violemment simplifiés par la notation exponentielle,
– on dispose d'une nouvelle opération, la multiplication, possédant de très fortes propriétés géométrique.

Les quelques exemples de résultats suivants sont ainsi des conséquences immédiates de l'interprétation géométrique de la multiplication complexe.

Proposition 13. – $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur
– $AB \parallel CD$ ou $ABCD$ sont alignés $\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a}$ est réel

Plus généralement, l'angle orienté entre les droites AB et CD (dans cet ordre) est l'argument de $\frac{d-c}{b-a}$. L'interprétation de la multiplication en termes de similitudes montre quant-à-elle :

Proposition 14. Les triangles ABC et DEF sont semblables (avec même orientation) si et seulement si
$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{d-f}{e-f}.$$

Enfin, le théorème de l'angle inscrit se réécrit comme :

Proposition 15. Les points $ABCD$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si
$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

Le signe : correspond ici à une division. La quantité utilisée dans cette proposition s'appelle le birapport complexe, et est par ailleurs un élément clé de la géométrie projective complexe.

Exercice 3 Soient quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. On appelle A_1 et B_1 les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, A_2 et B_2 les points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, A_3 et B_3 les points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, et A_4 et B_4 les points d'intersection de $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$. (On suppose bien sur que tous ces points existent.) Montrer que si A_1, B_1, C_1 et D_1 sont cocycliques ou alignés alors A_2, B_2, C_2 et D_2 sont cocycliques ou alignés.

Solution de l'exercice 3 Les cocyclicités des quatre quadruplets $A_1B_1A_2B_2$, $A_2B_2A_3B_3$, $A_3B_3A_4B_4$ et $A_4B_4A_1B_1$ nous disent que quatre birapports sont réels. En multipliant ou en divisant ces quatre birapports de façon convenable (plus précisément en multipliant le premier et le troisième, puis en divisant par le second et le quatrième), on montre que le produit

$$\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}\frac{a_3-a_4}{a_4-a_1}\frac{b_2-b_1}{b_3-b_2}\frac{b_4-b_3}{b_1-b_4}$$

est réel. Par hypothèse, le terme $\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}\frac{a_3-a_4}{a_4-a_1}$ est réel, donc le terme $\frac{b_2-b_1}{b_3-b_2}\frac{b_4-b_3}{b_1-b_4}$ est aussi réel, ce qui conclut.

Exercice 4 Soit $ABCDEF$ un hexagone, tel que l'on ait $\widehat{B}+\widehat{D}+\widehat{F}=2\pi$, et $AB.CD.EF = BC.DE.FA$. Montrer que $BC.AE.FD = CA.EF.DB$.

Solution de l'exercice 4 On écrit $\frac{c-b}{a-b}=\frac{|c-b|}{|a-b|}e^{i\widehat{B}}$, puis les même relations pour $\widehat{D}$ et $\widehat{F}$. En multipliant, et en utilisant la relation sur les angles pour simplifier les exponentielles, et la relation sur les longueurs pour simplifier les modules, on trouve que :

$$(c-b)(e-d)(a-f)=(a-b)(c-d)(e-f).$$

Cette relation nous donne immédiatement que $(c-b)(e-a)(d-f)=(a-c)(f-e)(b-d)$, ce qui termine en prenant le module.

Tous les résultats utilisés pour l'instant étaient essentiellement des résultats vectoriels (faisant intervenir des différences d'affixes). Pour la plupart des exercices, il est par contre nécessaire de choisir une origine et de calculer explicitement sur les coordonnées. Dans ces cas, l'élément clé est le choix de l'origine et du cercle unité. La formule de multiplication des exponentielles complexes simplifie en effet grandement les calculs sur le cercle unité. Il est pertinent de choisir pour cercle unité un cercle important de la figure, de préférence un cercle circonscrit (pour avoir un maximum de points sur ce cercle), ou a la rigueur un cercle inscrit. Pour des formules plus précises, et des exercices thématiques, je recommande de jeter un coup d'œil au cours "Complex numbers in geometry", disponible sur le site www.imomath.com, dans la rubrique "olympiad training material".

Exercice 5 Soit $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un heptagone régulier, montrer que

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On place 0 au centre de l'hexagone, et A_0 en 1. On pose $\omega = e^{i\pi/7}$, on appelle A_1' (resp. A_2') l'image de A_1 (resp. A_2) par la rotation de centre 1 et d'angle $2\pi/7$ (resp. $\pi/7$). Les quatre points A_0, A_1', A_2' et A_3 sont alignés, donc la formule à prouver est équivalente à :

$$\frac{1}{a_1' - 1} = \frac{1}{a_2' - 1} + \frac{1}{a_3 - 1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{\omega(\omega^4 - 1)} + \frac{1}{\omega^6}.$$

En développant et en utilisant $\omega^7 = -1$ pour simplifier, on prouve que cette équation est vérifiée.