DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Guillaume CONCHON-KERJAN
STAGE : Montpellier 2013

Exercices de stratégies de base

- Énoncé des exercices -

Exercice 1 Au premier jour d'un congrès, n scientifiques se serrent la main. Montrer qu'à n'importe quel moment, le nombre des scientifiques ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un multiple de n à n chiffres et qui s'écrit uniquement avec des 0 et des 1.

Exercice 3 Waldetrade et Zénobie jouent au jeu suivant : sur un 2014-gone régulier, chacune trace tour à tour une diagonale. La dernière à tracer une diagonale qui ne coupe aucune autre diagonale déjà tracée remporte la partie. Qui gagne ?

Exercice 4 Un roi se trouve dans un coin d'un damier $m \times n$. Tour à tour, Anthelme et Brunehaut le déplacent selon la règle des échecs (d'une case, on peut accéder à ses 8 voisines). Le premier qui repasse par une case déjà visitée a perdu. Qui gagne ?

Exercice 5 Sur un cours d'eau circulaire sont disposés n hors-bords, et ils ont au total juste assez de carburant pour faire le tour du cercle. Montrer qu'un certain hors-bord peut réaliser ce tour sans tomber en panne, en prenant le carburant des hors-bords stationnés sur son chemin.

Exercice 6 On place des tours sur un échiquier $n \times n$ de sorte que, si la case (i, j) est libre, alors il y a au moins n tours sur la i-ème ligne et j-ème colonne. Montrer qu'il y a au moins $n^2/2$ tours sur l'échiquier.

Exercice 7 On dispose de 7 longueurs, entre 1 cm et 12 cm. Montrer qu'on peut en trouver trois qui sont les longueurs des côtés d'un triangle non aplati.

Exercice 8 On colorie chaque point du plan en blanc ou en noir. Montrer qu'il existe un triangle équilatéral dont les sommets sont de la même couleur.

Exercice 9 On considère un damier d'échecs 8×8. On choisit un bord de départ et on appelle $zigzag$ un chemin qui rejoint le bord opposé en passant sur exactement 8 cases blanches et aucune noire. Combien y a-t-il de $zigzags$?

Exercice 10 On considère six points du plan, trois d'entre eux n'étant jamais alignés. On colorie en rouge ou en bleu tous les segments reliant entre eux deux des six points. Montrer qu'il existe un triangle monochrome.

Exercice 11 Maintenant, on dispose de n couleurs. Montrer que $3n!$ points suffisent pour être sûr d'avoir un triangle monochrome.

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 Notons $a_1, \cdots, a_n$ les nombres de poignées de mains échangées à un certain moment. Après une poignée de main, deux scientifiques comptent une salutation de plus, donc la somme $a_1 + \cdots + a_n$ est paire. L'énoncé demande de montrer qu'il y a un nombre pair de a_i impairs : mais la somme des a_j pairs est paire, donc par soustraction, la somme des a_i impairs est également paire. Il y a donc un nombre pair de a_i impairs.

Solution de l'exercice 2 Considérons les nombres $1, 11, \cdots, 1\ldots1$ (ce dernier ayant n chiffres 1). Si l'un d'entre eux est multiple de n, on rajoute des 0 derrière jusqu'à ce qu'on ait n chiffres, et on a le multiple cherché.

Sinon, deux d'entre eux, le i-ème et le j-ème avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ ont le même reste dans la division euclidienne par n selon le principe des tiroirs : en effet, le reste 0 étant éliminé (aucun multiple de n), il reste $n-1$ restes pour n entiers. Donc leur différence 1..10..0 avec i zéros et $j-i$ chiffres 1 est multiple de n. De nouveau, on rajoute des 0 derrière jusqu'à ce qu'on ait n chiffres.

Solution de l'exercice 3 Waldetrade l'emporte à coup sûr : elle trace une grande diagonale dans le 2014-gone qui le sépare en deux polygones symétriques par rapport à cette diagonale. Zénobie ne peut tracer de diagonale qui traverse celle tracée par Waldetrade, donc elle en trace une dans un des deux polygones obtenus. Waldetrade n'a plus qu'à tracer la même diagonale dans l'autre polygone. Elle procède ainsi à chaque nouveau tracé de Zénobie jusqu'à ce que cette dernière soit obligée de perdre en traçant une diagonale de trop.

Solution de l'exercice 4 Le résultat dépend de la parité du produit nm.

Si nm est pair, on peut partitionner la grille en dominos de taille 1×2. Le roi se trouve dans un des dominos. Anthelme le bouge dans l'autre partie du domino, dans lequel on n'a désormais plus le droit de retourner. Brunehaut est donc obligée de bouger le roi dans un autre domino, qu'Anthelme complète au coup suivant, et ainsi de suite jusqu'à ce que Brunehaut soit bloquée. Ainsi, Anthelme a une stratégie gagnante.

Si nm est impair, on partitionne de la même manière la grille en laissant une case seule dans un coin : la case où se trouve le roi initialement. Cette fois-ci, Anthelme commence les dominos et Brunehaut les finit : elle a donc une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 5 Tant qu'à faire, autant exposer deux solutions. Les plus courtes étant les meilleures, et le meilleur étant gardé pour la fin, on commence par une récurrence sur n.

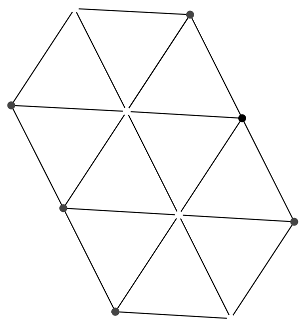
L'initialisation à $n = 1$ est évidente. On suppose le rang $n \geqslant 1$, et on considère $n+1$ hors-bords. Il y en a au moins 1 qui a assez de carburant pour aller au suivant (sinon, ils n'auraient pas assez de carburant à eux tous), et on peut alors remplacer ces deux hors-bords par un seul, positionné à l'endroit où se trouve le premier des deux, ayant la somme de leurs quantités de carburant. On se ramène ainsi au cas où il y a n hors-bords, supposé résolu par hypothèse de récurrence.

Utilisons le principe de l'extremum : on imagine un hors-bord (fictif) avec suffisamment d'essence qui fait le tour en prenant l'essence des n hors-bords sur son chemin. En atteignant un certain hors-bord, sa jauge d'essence sera minimale. Alors ce hors-bord peut réaliser le tour souhaité.

Solution de l'exercice 6 Considérons la ligne ou colonne ayant le moins de tours, mettons une ligne. Elle contient k tours. Si $k \geqslant \frac{n}{2}$, alors sur les n lignes il y a bien au moins $n \times n/2$ tours. Sinon, sur chacune des $n-k$ colonnes dont la case en commun avec la ligne en question est vide, il y a au moins $n-k$ tours. Quant aux k autres colonnes, elles ont chacune au moins k tours (par définition de k). Ce qui fait, au total, au moins $(n-k)^2 + k^2$ tours, soit $n^2/2 + \frac{(n-2k)^2}{2} \geqslant n^2/2$.

Solution de l'exercice 7 Soit $l_1 \leqslant \cdots \leqslant l_7$ les longueurs dont on dispose. Supposons par l'absurde qu'on ne puisse former de triangle avec trois quelconques d'entre elles : par l'inégalité triangulaire, $l_3 \geqslant l_2 + l_1$. Or $l_2, l_1 \geqslant 1$, donc $l_3 \geqslant 2$. De même, $l_4 \geqslant l_3 + l_2 \geqslant 3$, $l_5 \geqslant l_4 + l_3 \geqslant 5$, etc. et on trouve $l_7 \geqslant 13$, or $l_7 \leqslant 12$ d'après l'énoncé, ce qui est une contradiction. Donc on peut bien former un triangle non dégénéré.

Solution de l'exercice 8 Considérons un hexagone régulier tel que son centre soit, mettons, blanc. La figure suivante illustre la seule répartition possible des couleurs aux sommets sans triangle équilatéral monochrome.



On fait de même avec un hexagone régulier de même taille et dont le centre est un sommet blanc de l'hexagone précédent. Alors on a formé un triangle équilatéral aux sommets noirs.

Solution de l'exercice 9 On va compter plus généralement de manière récursive le nombre de chemins distincts (sur des cases blanches !) qui arrivent sur une case blanche donnée. Considérons B une case blanche ; comme les $zigzags$ ne peuvent "revenir en arrière" (sinon il faudrait plus de 8 cases pour traverser l'échiquier), il y a au plus deux cases blanches qui peuvent mener à B. S'il y en a deux, B_1 et B_2, le nombre de chemins arrivant en B est alors la somme des nombres des cases B_1 et B_2. S'il n'y en a qu'une, B_1, alors autant de chemins arrivent en B_1 qu'en B.

Ainsi, le nombre de $zigzags$ sera la somme des 4 nombres de chemins des 4 cases blanches sur le bord d'arrivée. On écrit bien sûr 1 sur les 4 cases du bord de départ, et on remonte ligne par ligne selon le procédé récursif décrit plus haut. On trouve 296 $zigzags$.

Solution de l'exercice 10 Soient A, B, C, D, E, F les six sommets. Depuis A partent au moins trois segments de la même couleur d'après le principe des tiroirs. Sans perte de généralité, les segments $[AB], [AC], [AD]$ sont bleus. Et, si $[BC]$ ou $[CD]$ ou $[DB]$ est bleu, alors ABC ou ACD ou ADB est bleu. Sinon, BCD est rouge, donc il y a bien un triangle monochrome.

Solution de l'exercice 11 On procède par récurrence sur n, en notant $R_3(n)$ le nombre minimal de sommets cherché.

Trouvons d'abord une formule liant $R_3(n+1)$ à $R_3(n)$: partant d'un sommet A quelconque, si on a $(n+1)(R_3(n)-1)+1$ autres sommets, alors il y aura au moins $R_3(n)$ segments ayant A pour extrémité qui seront de la même couleur, disons bleu, d'après le principe des tiroirs. Posons $m = R_3(n)$. Comme dans l'exercice précédent, en notant $B_1, \cdots B_m$ les autres extrémités de ces segments bleus, si $[B_iB_j]$ est bleu alors AB_iB_j est bleu. Sinon, il reste n couleurs pour colorier les segments de $R_3(n)$ sommets, donc il y aura nécessairement un triangle monochrome. On en déduit, en comptant le nombre de sommets de notre graphe :

$$R_3(n+1) \leqslant (n+1)R_3(n) - n + 1$$

Sachant que $R_3(2) = 6 = 3 \times 2!$, on peut montrer par récurrence que $R_3(n) \leqslant 3n!$: en effet, pour l'hérédité, on a bien $R_3(n+1) \leqslant (n+1)R_3(n) \leqslant 3(n+1)!$.

En tenant mieux compte de la correction en $-(n-1)$ qui décroît avec n (ici, on a juste utilisé le fait qu'elle était négative), on peut obtenir des majorations un petit peu plus fines (en améliorant la constante : $e = 2,7182818...$ au lieu de 3).