DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Simon PÉPIN-LEHALLEUR
STAGE : Montpellier 2012

Inégalités : exercices

- Énoncés -

Exercice 1 Soient $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$. Montrer que :

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geqslant \frac{1}{3}$$

Exercice 2 Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ avec $x_1 \dots x_n = 1$. Montrer que

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geqslant \frac{1}{x_1} + \dots \frac{1}{x_n}$$

Exercice 3 Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} \leqslant 1$

Exercice 4 Soient a, b, c les côtés d'un triangle.

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) > (a^4 + b^4 + c^4)$$

(Suggestion : penser à la formule de Héron pour l'aire d'un triangle)

Exercice 5 Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe. On suppose que tous les côtés sont de longueur $\leqslant 1$. Montrer qu'il existe une grande diagonale de longueur $\leqslant 2$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux quadrilatères convexes avec $\mathcal{P}'$ à l'intérieur de $\mathcal{P}$, d (resp. d') la somme des longueurs des diagonales de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$). Montrer que :

$$d' < 2d$$

Exercice 7 Soit ABC un triangle de côtés a, b, c et d'aire A. Montrer :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}A$$

- Corrigé -

Solution de l'exercice 1 Il y a beaucoup de solutions possibles, notamment par convexité.

Solution directe : On écrit $b = 1 - a$, on met au même dénominateur. L'inégalité est équivalente à :

$$3[(1-a)^2(a+1) + a^2(2-a)] \geqslant (2-a)(a+1)$$

On développe et on obtient

$$4a^2 - 4a + 1 = 4(a - 1/2)^2 \geqslant 0$$

Solution par homogénéisation : On commence par faire la simplification (la méthode marche aussi si on ne l'a pas vue !) :

$$\frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} + \frac{1}{a+1} = a - 1 + \frac{1}{a+1}$$

L'inégalité se réecrit :

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geqslant 4/3$$

On réduit au même

$$\frac{a^2}{(a+b)(2b+a)} + \frac{b^2}{(a+b)(2a+b)} \geqslant 1/3$$

On met au même dénominateur, on développe et on obtient

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

et on a gagné.

Solution de l'exercice 2 On multiplie à droite par $x_1 \dots x_n$:

$$x_1^{n-1} + \dots x_n^{n-1} \geqslant \sum_i x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n$$

On reconnait des sommes symétriques :

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{sym} x^{n-1} \geqslant \frac{1}{(n-1)!}\sum_{sym} x_1x_2\dots x_{n-1}$$

et on conclut par Muirhead.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On fait un changement de variable $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, ce qui permet ensuite d'homogénéiser :

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{x^3+z^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz} \geqslant 1$$

On met au même dénominateur, on simplifie :

$$x^6y^3+y^6x^3+x^6z^3+x^3z^6+y^6z^3+y^3z^6 \geqslant 2(x^5y^2z^2+x^2y^5z^2+x^2y^2z^5)$$

soit

$$\sum_{sym} x^6y^3 = \sum_{sym} x^5y^2z^2$$

qui est un cas de l'inégalité de Muirhead.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Il est possible de résoudre cet exercice "simplement" en faisant une transformation de Ravi et en développant le tout : on se ramène à l'inégalité évidente :

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2 > 0$$

Mais la formule de Héron donne une preuve élégante. L'inégalité triangulaire implique :

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0$$

Or ceci se réecrit :

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) &= [(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]\\ &= (a^2+b^2-c^2+2ab)(c^2-a^2-b^2+2ab)\\ &= 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)\end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On ordonne les côtés du triangle ACE, disons $AC \leqslant AE \leqslant CE$. On écrit alors l'inégalité de Ptolémée dans le quadrilatère $ACDE$:

$$AD\cdot CE \leqslant CD\cdot AE + DE\cdot AC \leqslant AE + AC \leqslant 2CE$$

donc $AD < 2$.

Solution de l'exercice 6 Notons A, B, C, D (resp. A', B', C', D') les sommets de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) et P (resp. P') la somme des longueurs des côtés de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$).

Solution pédestre : On va montrer qu'en fait :

$$\frac{P'}{2} < d' < P' < P < 2d < 2P$$

On a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} AC &< AB + BC \\ AC &< CD + AD \\ BD &< AB + AD \\ BD &< BC + CD \end{aligned}$$

En les additionnant, on obtient $2d < 2P$. D'autre part, si O est le point de concours des diagonales, on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} AB &< AO + OB \\ BC &< BO + OC \\ CD &< OC + OD \\ AD &< OA + OD \end{aligned}$$

En les additionnant, on obtient $P < 2d$.

Les inégalités $\frac{P'}{2} < d' < P'$ sont exactement les mêmes appliquées à $\mathcal{P}'$. Il reste donc à démontrer que $P' < P$.

Soit M un point quelconque à l'intérieur de $\mathcal{P}'$. On trace les droites (MA'), (MB'), (MC'), (MD'). Par convexité de $\mathcal{P}'$, elles rencontrent le bord de $\mathcal{P}'$ en A', B', C',D'. On note A'', B'', C'', D'' les premiers points d'intersection avec le bord de $\mathcal{P}$. Alors par inégalité triangulaire : $P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A' < A''B'' + B''C'' + C''D'' < P$.

Solution astucieuse (due à Clément Lézane) : On remarque le fait suivant : tout segment contenu dans le polygone P est de longueur inférieure à sa plus grande diagonale. Ceci se voit en utilisant la convexité de la fonction "distance à un point". On l'applique ensuite aux deux diagonales de P', ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7 Il existe beaucoup de preuves de cette inégalité (dite de Weitzenböck). On renvoie au livre de Engel, Problem solving strategies, chap.7 pour un florilège. Voici celle proposée par Clément Lézane et Lucas Flammant :

On fixe le périmètre $p = a + b + c$. Dans ce cas, le membre de gauche de l'inégalité est minimal quand $a = b = c$, alors que l'aire d'un triangle de périmètre fixé est maximal pour un triangle équilatéral. Ceci conclut.