DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Vincent JUGÉ
STAGE : Montpellier 2014

# Inégalités

Avant toute chose, on ne saurait trop conseiller au lecteur quelques références : le cours de Pierre Bornsztein (disponible sur le site d'Animath) ainsi que les polycopiés des différentes années. Il existe évidemment bien d'autres cours que vous découvrirez aussi aisément que moi-même en utilisant votre moteur de recherche préféré.

## 1 Inégalité du réordonnement — Inégalité de Tchebychev

*Mieux vaut gagner à « Qui veut gagner des millions ? » dix fois et au « Jeu des mille francs » une fois que l'inverse.*
La phrase ci-dessus vous semble-t-elle évidente ? Si oui, vous connaissez en fait déjà l'**inégalité du réordonnement** !

**Théorème 1.** Soit $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ des réels, ainsi que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. Alors

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1b_{\sigma(1)}+a_2b_{\sigma(2)}+\ldots+a_nb_{\sigma(n)} \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1.$$

**Démonstration.** Il suffit en fait de montrer que, si $a \geqslant a'$ et $b \geqslant b'$, alors $ab + a'b' \geqslant ab' + a'b$, ce qui découle directement du fait que $ab + a'b' = ab' + a'b + (a - b)(a' - b')$. □

L'inégalité du réordonnement, si simple soit-elle, permet déjà de résoudre bon nombre de problèmes plus ou moins faciles en apparence.
**Exercice 1** Soit $a$ et $b$ deux réels. Montrer que $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

**Exercice 2** Soit $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ une fonction injective, et soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} \geqslant n$.

**Exercice 3** Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels strictement positifs. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$ et identifier les cas d'égalité.

En outre, l'inégalité du réordonnement permet également de démontrer la fameuse **inégalité de Thebychev**.

**Théorème 2.** Soit $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ des réels. Alors

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} +}{n}$$

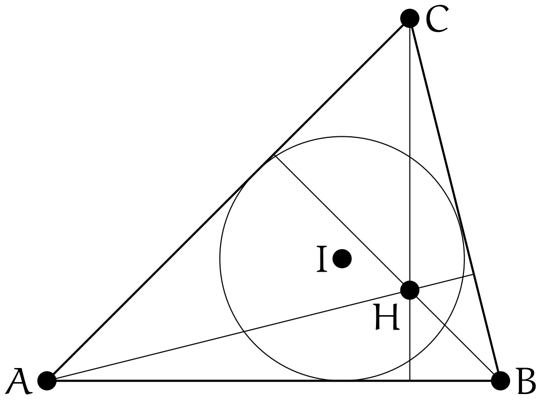
**Démonstration.** Notons $\sigma_i$ la permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\sigma_i(k) \equiv k+i \pmod n$. Alors $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 b_{\sigma_i(1)} + a_2 b_{\sigma_i(2)} + \ldots + a\right.$ donc l'inégalité du réordonnement appliquée successitvement aux permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ indique que

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \geqslant (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \geqslant n(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots$$

$\square$

**Exercice 4** Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels strictement positifs. Montrer que $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$.

**Exercice 5** Soit $ABC$ un triangle acutangle, $H$ son orthocentre et $r$ le rayon de son cercle inscrit. On note $d_A$ (respectivement, $d_B$ et $d_C$) la distance de $H$ à la droite $(BC)$ (respectivement, $(CA)$ et $(AB)$). Montrer que $d_A + d_B + d_C \leqslant 3r$.




## 2 Dérivées (partielles)

*En haut d'un sommet et au fond d'une vallée, si le sol n'est pas trop accidenté, il est souvent plat.*

Cette remarque que tous les alpinistes auront faite est en fait extrêmement puissante, et sert dès lors que l'on cherche à maximiser ou à minimiser des fonctions **dérivables**.

Pour ceux qui n'auraient pas encore découvert la notion de dérivée, voici une brève introduction.

**Définition 3.** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $x$ un nombre réel. La **dérivée** de $f$ en $x$, notée $f'(x)$, est la limite éventuelle $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si cette limite existe, alors on dit que $f$ est **dérivable** en $x$. Si elle existe quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on dit simplement que $f$ est **dérivable**.

En pratique, de nombreuses fonctions sont dérivables, et on pourra s'appuyer sur des formules usuelles, qui seront largement suffisantes la plupart du temps.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Remarque |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $x > 0$ ou $\alpha \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | |
| $a^x$ | $\ln(a)a^x$ | $a > 0$ |
| $\exp(x)$ | $\exp(x)$ | |
| $\ln(\|x\|)$ | $x^{-1}$ | $x \neq 0$ |
| $af(x)$ | $af'(x)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $f(x) + g(x)$ | $f'(x) + g'(x)$ | |
| $f(x)g(x)$ | $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ | |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x))g'(x)$ | |

**Exercice 6** Montrer les quatre dernières formules ci-dessus.

Attention, cependant : toutes les fonctions ne sont pas dérivables en tout point de leur domaine de définition !

**Exercice 7** Montrer que $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point sauf en 0.

En outre, comme annoncé ci-dessus, les dérivées sont un outil extrêmement puissant pour trouver des extrema.

**Théorème 4.** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $x$ un réel en lequel $f$ est extrémale et dérivable. Alors $f'(x) = 0$.

**Démonstration.** Si $f'(x) > 0$, alors par définition d'une limite il existe un $h > 0$ tel que $f(x-h) < f(x) < f(x+h)$. Si $f'(x) < 0$, alors il existe un $h > 0$ tel que $f(x+h) < f(x) < f(x-h)$. Par conséquent, $f'(x) = 0$. $\square$

**Exercice 8** Soit $a$, $b$ et $c$ des réels, avec $a > 0$. Trouver les minima et maxima éventuels de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. En déduire que $f(x) \geqslant 0$ (respectivement, $f(x) > 0$) pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b^2 \leqslant 4ac$ (respectivement, $b^2 < 4ac$).

En outre, la dérivée permet de caractériser les fonctions croissantes.

**Théorème 5.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f$ est croissante si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, et $f$ est décroissante si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

**Démonstration.** Tout d'abord, si $f$ est croissante, alors pour tout $x \in I$ la dérivée $f'(x)$ est une limite de réels positifs, donc $f' \geqslant 0$.

Réciproquement, si $f' \geqslant 0$, il est beaucoup plus difficile de montrer que $f$ est croissante. Soit $X$ un élément de $I$ et soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. En outre, soit $J$ un intervalle maximal de $I \cap [X, +\infty[$ tel que $f(t) \geqslant f(X) - \varepsilon(t - X)$ pour tout $t \in J$. On va montrer que $J = I \cap [X, +\infty[$.

En effet, soit $M = \sup J$ : si $M < \sup I$, alors choisissons $y$ dans $J$ et faisons tendre $y$ vers $M$. Puisque l'on a systématiquement $f(y) - f(X) \geqslant \varepsilon(y - X)$, on en déduit que $f(M) - f(X) \geqslant \varepsilon(M - X)$. Ainsi, par maximalité de $J$, on sait que $M \in J$. En outre, notons que $f'(M) \geqslant 0 > \varepsilon$, de sorte qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(M+h) - f(M) \geqslant -\varepsilon h$ dès lors que $0 \leqslant h \leqslant \eta$. On en déduit que $[X, M+\eta] \subseteq J$, ce qui contredit la définition de $M$.

Par conséquent, $M = \sup I$, et si $M \in I$ on en déduit même que $M \in J$ : cela montre bien que $J = I \cap [X, +\infty[$. En particulier, si $t \geqslant X$, alors en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 on constate que $f(t) \geqslant f(X)$. Ce raisonnement fonctionne quels que soient $X$ et $t$ tans $I$ avec $X \leqslant t$, de sorte que $f$ est croissante sur $I$.

On traite ensuite de la même manière le cas des fonctions décroissantes et/ou à dérivée négative. $\square$

Pour en finir avec les fonctions dérivables, voici une notation bien pratique : si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle, $f : I \subseteq \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions, et $\ell$ est un élément de $I$, alors on notera « $f(x) = o_{x \to \ell}(g(x))$ » la relation $\lim_{x \to \ell} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. En particulier, au vu de la définition d'une dérivée, on aura toujours $f(x) = f(\ell) + (x - \ell)f'(\ell) + o_{x \to \ell}(x)$.

De surcroît, puisqu'elle est si efficace sur les fonctions à une variable, pourquoi ne pas utiliser la notion de dérivée sur les fonctions à plusieurs variables ?

**Définition 6.** Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Les **dérivées partielles** de $f$ en $\mathbf{x}$, si elles existent, sont définies comme les limites $\partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)}{h}$. Si chaque dérivée partielle $\partial_{x_i} f$ existe, alors on dit que $f$ est « différentiable » en $\mathbf{x}$.

Autrement dit, $\partial_{x_i} f(\mathbf{x})$ n'est autre que la dérivée de la fonction $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t,$ au point $x_i$. En particulier, on en déduit directement le corrolaire suivant.

**Corollaire 7.** Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un point en lequel $f$ est extrémale et différentiable. Alors $\partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $i \leqslant n$.

Pour calculer une dérivée partielle, il suffit alors de feindre que les coordonnées selon lesquelles on ne dérive pas sont en fait des constantes.

**Exemple 8.** Soit $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^2$. Alors $\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = x_2^2$ et $\partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$.

En outre, cela sert aussi à montrer certains résultats surprenants, par exemple le fait qu'un polynôme à deux variables peut ne prendre que des valeurs positives sans avoir de minimum !
**Exercice 9** Soit $P(X_1, X_2) = X_1^2 + (1 - X_1 X_2)^2$. Montrer que $\inf P(\mathbb{R}^2) = 0$ puis montrer, de deux manières différentes, que $P$ n'admet aucun minimum.

## 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

*J'aime bien la géométrie : c'est la géométrie qui nous a donné l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
Et oui : et ce lien entre géométrie et inégalités, c'est le produit scalaire !

Un produit scalaire, qu'est-ce que c'est ? Dans ce cours, on parlera de produit scalaire sur sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire sur les $n$-uplets de réels. On considérera ci-dessous les $n$-uplets $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$.

**Définition 9.** Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :
- $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ quels que soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ : $\varphi$ est **symétrique** ;
- $\varphi(\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \varphi(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ quels que soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ : $\varphi$ est **linéaire à gauche** (donc à droite, par symétrie) ;
- $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0$ quel que soit $\mathbf{a}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = \ldots = a_n = 0$ : $\varphi$ est **définie positive**.

**Exemple 10.** Les « produits scalaires » $\varphi : (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ que l'on manipule en géométrie sont évidemment des produits scalaires au sens de cette définition.

D'autre part, notons que le « produit » $(a_1, b_1) \mapsto a_1b_1$ est lui aussi un produit scalaire : la vie fait bien les choses ! D'ailleurs, les produits scalaires sont assez nombreux dans la nature, et très faciles à fabriquer, même s'il ne faut pas faire n'importe quoi non plus.

**Exercice 10** Montrer que $\varphi : (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i b_i$ et $\psi : (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}) + (a_1+a_2)(b_1+b_2)$ sont des produits scalaires, mais que $\theta : (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \sum_{i\neq j} a_i b_j$ n'en est pas un.

En outre, le caractère défini positif du produit scalaire est une propriété cruciale, puisqu'il nous permet de dire que le produit scalaire de deux $n$-uplets est toujours plus petit que le produit de leurs normes : c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Théorème 11.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ un produit scalaire, et soit deux $n$-uplets $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Alors $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 \leqslant \varphi(\mathbf{a},\mathbf{a})\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b})$, avec égalité si et seulement si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont proportionnels l'un à l'autre.

**Démonstration.** Soit $\lambda$ un réel, et observons attentivement $\varphi(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b},\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})$ : on trouve

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \varphi(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b},\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}) - \lambda\varphi(\mathbf{b},\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b},\mathbf{a}) - \lambda\varphi(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}, \\ &\leqslant \varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) - \lambda\varphi(\mathbf{b},\mathbf{a}) - \lambda\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \lambda^2\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a},\mathbf{a}) - 2\lambda\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \lambda^2\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit que $(2\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}))^2 \leqslant 4\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a})\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b})$. En outre, $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{a})\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a},\mathbf{b})^2$ si et seulement s'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b},\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}) = 0$, c'est-à-dire tel que $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ : ceci conclut la preuve du théorème. □

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est, historiquement, très utilisée pour résoudre des problèmes d'olympiades plus ou moins classiques.

**Exercice 11** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n+1-k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

**Exercice 12** Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels, et $b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}.$$

**Exercice 13** Soit $x$, $y$ et $z$ des réels positifs ou nuls. Montrer que

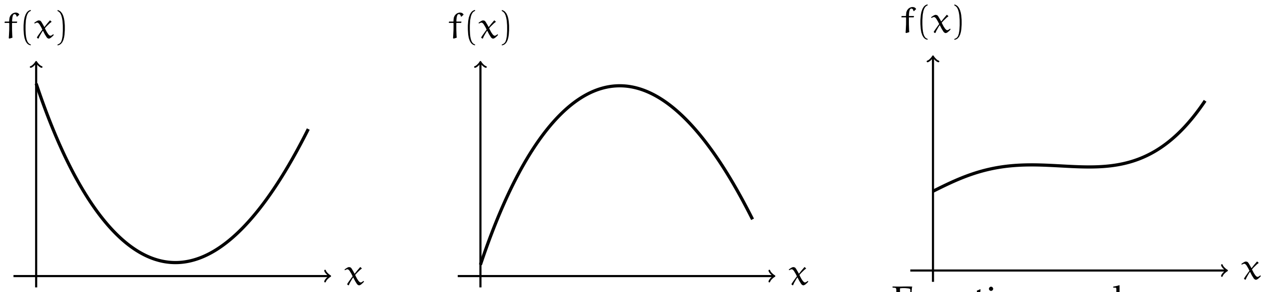
$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx} \leqslant 2(x+y+z).$$

# 4 Convexité

*La géométrie est vraiment géniale : elle nous a aussi donné la convexité !*
En effet, la notion de convexité est avant tout une notion géométrique. Cependant, de manière fort naturelle, elle s'applique également à l'analyse, via le concept de « fonction convexe » !

**Définition 12.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est **convexe** si l'épigraphe de $f$, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x,y) : x \in D, y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

En revanche, on dit que $f$ est **concave** si l'hypographe de $f$, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x,y) : x \in D, y \leqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.




Fonction convexe — Fonction concave — Fonction quelconque

De nombreuses fonctions usuelles sont convexes et/ou concaves.
**Exercice 14** Montrer que les fonctions à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

En outre, il existe une caractérisation simple des fonctions convexes, communément appelée « inégalité de Jensen ».

**Théorème 13.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. Alors il y a équivalence entre

(i) $f$ est convexe ;

(ii) pour tous $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda) y)$ ;

(iii) pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$ ;

(iv) pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

**Démonstration.** Tout d'abord, il est clair que (iii) implique (ii). En outre, (i) implique (iii) : chaque point $P_i$ de coordonnées $\binom{x_i}{f(x_i)}$ appartient à l'épigraphe de $f$, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ est une combinaison convexe des points $P_i$, donc appartient également à l'épigraphe de $f$, ce qui signifie exactement que la relation (iii) est vérifiée.

Montrons ensuite que si (i) est faux, alors (ii) est faux aussi : si $f$ n'est pas convexe, il existe deux points $P_1$ et $P_2$ de coordonnées respectives $\binom{x_1}{y_1}$ et $\binom{x_2}{y_2}$, ainsi qu'un réel $\lambda \in [0,1]$, tels que $\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$ n'appartient pas à l'épigraphe de $f$, c'est-à-dire que $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 < f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$. Or, $y_1 \geqslant f(x_1)$ et $y_2 \geqslant f(x_2)$, de sorte que (ii) est faux. Par contraposée, (ii) implique (i), donc (i), (ii) et (iii) sont équivalents.

Enfin, soit $\lambda \in [0,1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda) z$ : chaque inégalité de (iv) se réécrit sous la forme $f(y) \leqslant (1-\lambda) f(z) + \lambda f(x)$, de sorte que (iv) est équivalent à (ii). □

En outre, si f est dérivable, voire **deux fois** dérivable (c'est-à-dire dérivable et de dérivée elle-même dérivable), on dispose de critères supplémentaires permettant de détecter une fonction convexe.

**Théorème 14.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction (dérivable). Alors il y a équivalence entre

(i) $f$ est convexe ;

(v) toute tangente de $f$ est contenue dans l'hypographe de $f$ ;

(vi) $f'$ est croissante ;

(vii) $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si $f$ est deux fois dérivable).

**Démonstration.** Tout d'abord, quand $f$ est deux fois dérivable, (vi) et (vii) sont équivalents, comme on l'a à moitié montré dans la partie du cours sur les dérivées.

De plus, si $f$ est convexe, alors dans (iv), en faisant tendre $y$ vers $x$ d'une part, et vers $z$ d'autre part, on constate que $f'(x) \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant f'(z)$. Cela montre donc (i) implique (vi).

Puis, si (vi) est vrai, alors la fonction $h : t \mapsto f(t) - f(x) - (t-x) f'(x)$ vérifie $h'(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant x$ et $h'(t) \leqslant 0$ pour $t \leqslant x$. Ainsi, $h$ est décroissante sur

$\{t \in I : t \leqslant x\}$ et croissante sur $\{t \in I : t \geqslant x\}$, donc prend son minimum en $x$. Cela montre que $h \geqslant 0$, ce qui signifie exactement que la tangente à $f$ en $x$ appartient à l'hypographe de $f$, de sorte que (vi) implique (v).

Enfin, si (v) est vrai, soit $x < y < z$ trois éléments de I, puis $\lambda \in [0, 1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. Alors $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y) \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ et $\frac{f(z)-f(x)}{z-x)} = (1-\lambda)\frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lambda\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$, de sorte que (iv) est vrai aussi. □

Ces nouveaux critères sont évidemment très pratiques pour identifier des fonctions convexes ou concaves.

**Exercice 15** Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe.

**Exercice 16** Montrer que $x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.

**Exercice 17** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant f(x) + f(y)$ pour tous les réels $x$ et $y$. Montrer que $f$ est convexe.

En outre, l'étude de fonctions convexes permet de démontrer rapidement des inégalités très importantes.

**Définition 15.** Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs, et $p$ un réel non nul. On appelle **moyenne d'ordre** $p$ de $x_1, \ldots, x_n$ le nombre $N_p = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$, et **moyenne d'ordre** $0$ le nombre $N_0 = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}$.

Les nombres $N_{-1}$, $N_0$, $N_1$ et $N_2$ sont aussi connus sous le nom de moyennes « harmonique », « géométrique », « arithmétique » et « quadratique ».

**Théorème 16.** Soit $p \geqslant q$ deux réels. Alors $N_p \geqslant N_q$.

**Démonstration.** Tout d'abord, si $p = q$, alors le résultat est évident. On suppose maintenant $q > 0$, et on pose $X_i = x_i^q$ ainsi que $r = p/q \geqslant 1$. Alors $N_p \geqslant N_q \Leftrightarrow N_p^p \geqslant N_q^p \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^r \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^r$, ce qui est vrai par convexité de la fonction $t \mapsto t^r$.

D'autre part, si $0 > p$, alors $r \leqslant 1$ et $N_p \geqslant N_q \Leftrightarrow N_p^p \leqslant N_q^p \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^r \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^r$, ce qui est vrai par concavité de la fonction $t \mapsto t^r$.

Enfin, si $p \to 0$, utilisons la notation $f(x) = o_{x\to 0}(x)$ introduite plus haut.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\ln(N_p) &= \frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(p\ln(x_i))\right) = \frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+p\ln(x_i)+o_{p\to 0}(p))\right)\\
&= \frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{p}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)+o_{p\to 0}(p)\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)+o_{p\to 0}(p)\right)\\
&= \ln(N_0)+o_{p\to 0}(1),
\end{aligned}
$$

de sorte que $N_0 = \lim_{p\to 0} N_p$, ce qui conclut la preuve, puisque $p \mapsto N_p$ est croissante sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et continue en 0. □

En particulier, on notera plusieurs cas particuliers remarquables, et couramment utilisés :

– l'inégalité arithmético-géométrique : $N_0 \leqslant N_1$ ;
– l'inégalité arithmético-harmonique : $N_{-1} \leqslant N_1$ ;
– l'inégalité arithmético-quadratique : $N_1 \leqslant N_2$.

De sucroît, on peut utiliser une variante des moyennes sus-mentionnées : les moyennes **pondérées**. Le même raisonnement nous donne évidemment les mêmes résultats.

**Définition 17.** Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. En outre, soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs, et $p$ un réel non nul. On appelle **moyenne pondérée d'ordre** $p$ de $x_1, \ldots, x_n$ le nombre $M_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p\right)^{1/p}$, et **moyenne pondérée d'ordre** 0 le nombre $M_0 = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$.

**Théorème 18.** Pour tous $p \geqslant q$, on a $M_p \geqslant M_q$. De plus, $M_0 = \lim_{p\to 0} M_p$.

**Exercice 18** Soit $a$, $b$ et $c$ des réels positifs ou nuls. Montrer que $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9(abc)^2$.

**Exercice 19** Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels tels que $a+b+c+d = 6$ et $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$. Montrer que $36 \leqslant 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leqslant 48$.

## 5 Changement de variable et (dés)homogénéisation

*Les mathématiques se distinguent singulièrement de la physique : on peut gagner des points en écrivant des expressions non homogènes !*

Souvent, on doit traiter des inégalités qui mettent en jeu des réels positifs voire quelconque, ou au contraire qui satisfont déjà une ou plusieurs (in)égalités.

Il est alors tentant de passer d'un cadre à l'autre, et pour ce faire il existe plusieurs outils.

**Le changement de variables** est l'outil numéro 1. Par exemple, si on a une contrainte de la forme $a+b+c+d=0$, on peut toujours poser $d=-a-b-c$, et alors on se retrouve avec uniquement trois variables, sans aucune contrainte additionnelle. De manière générale, on pourra essayer d'exprimer une variable en fonction des autres, de manière à se libérer d'une des égalités qui nous embête. Évidemment, tout a un coût, et ici l'inégalité à montrer risque de devenir violemment plus compliquée et laide qu'elle ne l'était auparavant.

Il existe deux autres changments de variables typiques, parmi tant d'autres qui peuvent s'avérer utiles dans telle ou telle situation :

– la transormation de Ravi : si $a$, $b$ et $c$ sont censés être les côtés d'un triangle, alors il sera souvent opportun de poser $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$ et $z=\frac{a+b-c}{2}$ ; en effet, il s'agit là de trois réels positifs, tels que $a=y+z$, $b=z+x$ et $c=x+y$ ;

– dans le cas d'une contrainte de la forme $x_1 \ldots x_n=1$, on pourra réécrire chaque $x_i$ sous la forme $z_i/z_{i+1}$, en posant $z_1=z_{n+1}$.

**L'homogénéisation** peut s'obtenir à l'aide d'un changement de variables particulier, mais aussi en réutilisant des égalités qui nous sont données dans l'énoncé. Le but est, tant que faire se peut, de réduire le problème à une inégalité du type $P(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0$, où $P$ est un polynôme « homogène » : cela signifie qu'il existe une constante $k$ telle que, pour tout $\lambda>0$, $P(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)=\lambda^k P(x_1,\ldots,x_n)$, et l'on dira alors que $P$ est « homogène de degré $k$ ».

**Exemple 19.** Soit $a$, $b$ et $c$ des réels strictement positifs tels que $abc=a+b+c$ : on souhaite montrer que $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant ab+bc+ca+\sqrt{3}(a+b+c)$. Or, ici, on a des termes de degrés 1 et 2 : on n'a donc pas encore un polynôme homogène.

Cependant, la relation $abc=a+b+c$ nous permet d'identifier deux expressions de degrés respectifs 1 et 3. Ainsi, on sait en fait que $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}=1$, le terme de gauche étant de degré 1. On peut donc réécrire l'inégalité à montrer sous la forme

$$2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca\geqslant\sqrt{3}(a+b+c)\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}=\sqrt{3abc(a+b+c)},$$

ou encore

$$2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca\geqslant 0 \;\text{ et }\; (2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca)^2-3abc(a+b+c)\geqslant 0.$$

Les polynômes $P(a,b,c) = 2(a^2+b^2+c^2) - ab - bc - ca$ et $Q(a,b,c) = P(a,b,c)^2 - 3abc(a+b+c)$ sont bien homogènes, de degrés respectifs 2 et 4.

En outre, cette fois-ci, les signes de $P(a,b,c)$ et de $Q(a,b,c)$ ne dépendent pas du rapport $\frac{abc}{a+b+c}$. Il nous suffit donc de montrer que $P(a,b,c) \geqslant 0$ et que $Q(a,b,c) \geqslant 0$ quels que soient $a$, $b$ et $c$ des réels strictement positifs.

Par inégalité du réordonnement, il est déjà clair que $P(a,b,c) \geqslant a^2+b^2+c^2 \geqslant 0$. En outre, en développant $Q(a,b,c)$ de manière brutale mais simple, on obtient

$$Q(a,b,c) = 4\langle 4 \mid 0 \mid 0\rangle + 9\langle 2 \mid 2 \mid 0\rangle - 4\langle 3 \mid 1 \mid 0\rangle - 4\langle 3 \mid 0 \mid 1\rangle - 5\langle 2 \mid 1 \mid 1\rangle,$$

où la notation $\langle x \mid y \mid z\rangle$ désigne le polynôme $a^x b^y c^z + a^y b^z c^x + a^z b^x c^y$. On en déduit donc, en scindant $Q(a,b,c)$ en trois parties sur lesquelles on applique l'inégalité arithmético-géométrique, que

$$\begin{aligned} Q(a,b,c) &= 2\left(\langle 4 \mid 0 \mid 0\rangle + \langle 2 \mid 2 \mid 0\rangle - 2\langle 3 \mid 1 \mid 0\rangle\right) + 2\left(\langle 4 \mid 0 \mid 0\rangle + \langle 2 \mid 0 \mid 2\rangle - 2\langle 3 \mid 0 \right. \\ &\quad \frac{5}{2}\left(\langle 2 \mid 2 \mid 0\rangle + \langle 2 \mid 0 \mid 2\rangle - 2\langle 2 \mid 1 \mid 1\rangle\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Notons que la technique consistant à se ramener à montrer qu'un polynôme homogène est positif ou nul, puis à le découper en des sommes de la forme $\langle x \mid y \mid z\rangle$, et enfin à regrouper ces sommes de manière à pouvoir utiliser l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, est expérimentalement très efficace. Les deux écueils évidents de cette méthode sont cependant qu'il faut déjà réussir se ramener à un polynôme homogène qui sera effectivement positif ou nul, puis qu'il faut trouver un découpage adapté. Cela dit, par définition, un exercice censé être « difficile » ne peut pas avoir de solution systématique « facile ».

La **déshomogénéisation** est le processus contraire : en effet, on pourra parfois préférer passer d'une situation homogène à une situation inhomogène, en se ramenant, sans perte de généralité, à étudier des cas particulier où une quantité (souvent, la somme ou le produit des variables considérées) sera constante, par exemple égale à 1.

**Exemple 20.** Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels strictement positifs : on souhaite montrer que $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3}$. Or, ici, on a uniquement des termes de degré 0 : on a donc une expression homogène, et on peut supposer, sans perte de généralité, que $a+b+c+d = 1$.

On peut donc réécrire l'inégalité à montrer sous la forme

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} + \frac{d}{1-d} \geqslant \frac{4}{3},$$

Or, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1-x}$ est croissante et convexe sur l'intervalle $]0,1[$. Puisque $a+b+c+d=1$, on en déduit que

$$af(a)+bf(b)+cf(c)+df(d) \geqslant f(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant f\left(\frac{(a+b+c+d)^2}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

### 5.1 Quelques exercices supplémentaires

**Exercice 1** Soit $ABC$ un triangle acutangle, de périmètre $p$ et de rayon du cercle inscrit $r$. Montrer que $\tan\left(\widehat{A}\right)+\tan\left(\widehat{B}\right)+\tan\left(\widehat{C}\right) \geqslant \frac{p}{2r}$.

**Exercice 2** Trouver l'ensemble des valeurs prises par la fonction $f : ]0,+\infty[^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,y,z) = \frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$.

**Exercice 3** Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $a^6+b^6+c^6=3$. Montrer que $a^7b^2+b^7c^2+c^7a^2 \leqslant 3$.

**Exercice 4** Soit $ABC$ un triangle acutangle et $I$ le centre du cercle inscrit à $ABC$. Montrer que $3(AI^2+BI^2+CI^2) \geqslant AB^2+BC^2+CA^2$.

### 5.2 Solutions des exercices

*Solution de l'exercice 1* Puisque $a$ et $b$ jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $a \geqslant b$. Alors l'inégalité du réordonnement indique que $a^2+b^2 \geqslant ab+ba = 2ab$.

*Solution de l'exercice 2* Soit $a_i$ le $i$-ème plus petit élément de l'ensemble $\{f(i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et soit $b_i = \frac{1}{i}$. Alors $a_1 < \ldots < a_n$ et $b_1 > \ldots > b_n$ : en particulier, notons que $a_i \geqslant i$. L'inégliaté du réordonnement indique alors que $\sum_{k=1}^n f(k)b_k \geqslant \sum_{k=1}^n a_k b_k \geqslant \sum_{k=1}^n k b_k = \sum_{k=1}^n 1 = n$.

*Solution de l'exercice 3* Puisque $a$, $b$ et $c$ jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$. Alors $a+b \geqslant a+c \geqslant b+c$, donc $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{a+b}$. L'inégalité du réordonnement indique donc que

$$\begin{aligned}2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) &\geqslant \left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}\right) \\ &\geqslant \frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{a+c}+\frac{a+b}{a+b} = 3.\end{aligned}$$

De surcroît, il y a égalité si et seulement s'il y a égalité à chaque application de l'inégalité du réordonnement. Or, si $a > b$, alors $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+c}$ donc $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+$

$\frac{c}{a+b} > \frac{b}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$ ; de même, si $b > c$, alors $\frac{1}{a+c} > \frac{1}{a+b}$ donc $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{b}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$. Ainsi, dès lors que $a > c$, on a

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) &> \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}\right) \\ &> \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{a+c} + \frac{a+b}{a+b} = 3. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2}$, il s'ensuit que $a = b = c$, et alors on a effectivement égalité.

_Solution de l'exercice 4_ Posons $\alpha_1 = \frac{ab}{a+b}$, $\alpha_2 = \frac{bc}{b+c}$, $\alpha_3 = \frac{ca}{c+a}$, $\beta_1 = a + b$, $\beta_2 = b + c$ et $\beta_3 = c + a$. L'inégalité à montrer est équivalente à $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \leqslant 3(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)$.

Puisque $a$, $b$ et $c$ jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$. Il s'ensuit que $\beta_1 \geqslant \beta_3 \geqslant \beta_2$ En outre, $\alpha_1 \geqslant \alpha_3 \Leftrightarrow b(c + a) \geqslant c(a + b) \Leftrightarrow b \geqslant c$, tandis que $\alpha_3 \geqslant \alpha_2 \Leftrightarrow a(b + c) \geqslant b(c + a) \Leftrightarrow a \geqslant b$. Par conséquent, on a bien $\alpha_1 \geqslant \alpha_3 \geqslant \alpha_2$, et alors l'inégalité de Tchebychev montre que $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \leqslant 3(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)$.

_Solution de l'exercice 5_ Puisque $ABC$ est acutangle, on sait que $H$ se situe à l'intérieur de $ABC$. Soit alors $\mathcal{S}$ l'aire de $ABC$. Alors, en posant $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, on note que $(a + b + c)r = 2\mathcal{S} = ad_A + bd_B + cd_C$.

En outre, soit $A'$ et $B'$ les pieds respectifs des hauteurs de $ABC$ issues de $A$ et de $B$. Alors les triangles $AA'C$ et $BB'C$ sont semblables, car $\widehat{AA'C} = \widehat{BB'C} = \pi/2$ et $\widehat{A'CA} = \widehat{BCA} = \widehat{BCB'}$. En particulier, on sait que

$$\begin{aligned} a \geqslant b &\Leftrightarrow AA' = \frac{2\mathcal{S}}{a} \leqslant \frac{\mathcal{S}}{2}b = BB' \Leftrightarrow A'C \leqslant B'C \\ &\Leftrightarrow CH^2 - A'H^2 = A'C^2 \leqslant B'C^2 = CH^2 - B'H^2 \Leftrightarrow d_A = A'H \geqslant B'H = d_B. \end{aligned}$$

De même, $b \geqslant c \Leftrightarrow d_B \geqslant d_C$

Or, puisque $a$, $b$ et $c$ jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$, donc que $d_A \geqslant d_B \geqslant d_C$. L'inégalité de Tchebychev montre donc que $(a + b + c)r = ad_A + bd_B + cd_C \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)(d_A + d_B + d_C)$, c'est-à-dire que $d_A + d_B + d_C \leqslant 3r$.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Remarque |
|---|---|---|
| $af(x)$ | $af'(x)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $f(x) + g(x)$ | $f'(x) + g'(x)$ | |
| $f(x)g(x)$ | $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ | |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x))g'(x)$ | |

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Des quatre formules ci-dessus, les deux premières sont évidentes par linéarité de la limite. En outre, si $f$ et $g$ sont dérivables en $x$, alors $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(x)$ et $g(x+h) = g(x) + hg'(x) + o(x)$, donc $f(x+h)g(x+h) = f(x)g(x) + h(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + o(x)$, de sorte que $fg$ est dérivable en $x$, avec $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

De même, si $f$ est dérvable en $g(x)$ et $g$ est dérivable en $x$, alors $f(g(x)+h) = f(g(x)) + hf'(g(x)) + o(x)$ donc $f(g(x+h)) = f(g(x) + hg'(x) + o(h)) = f(g(x)) + hg'(x)f'(g(x)) + o(h)$, de sorte que $f \circ g$ est dérivable en $x$, avec $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Si $t > 0$ et $|h| < t$, alors $\frac{|t+h|-|t|}{h} = 1$, donc $x \mapsto |x|$ est dérivable en $t$, de dérivée 1. De même, si $t < 0$ et $|h| < t$, alors $\frac{|t+h|-|t|}{h} = -1$, donc $x \mapsto |x|$ est dérivable en $t$, de dérivée $-1$.

En revanche, si $t = 0$, alors $\frac{|t+h|-|t|}{h}$ est égal au signe de $h$, donc n'a pas de limite quand $h \to 0$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> $f'(x) = 2ax + b$, donc $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$. Par conséquent, $f$ est minimale en $-\frac{b}{2a}$ et extrémale nulle part ailleurs. En particulier, $\min f(\mathbb{R}) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Tout d'abord, $P(X_1, X_2)$ est une somme de deux carrés, donc $\inf P(\mathbb{R}^2) \geqslant 0$. D'autre part, si $\varepsilon > 0$ est un réel arbitrairement petit, alors $P(\varepsilon^{1/2}, \varepsilon^{-1/2}) = \varepsilon$, de sorte que $\inf P(\mathbb{R}^2)$.

Par conséquent, si $P$ atteint son minimum en un point $(x, y)$, alors on a $0 = \partial_{x_1} P(x,y) = \partial_{x_2} P(x,y)$, c'est-à-dire $0 = 2x - 2y(1-xy) = -2x(1-xy)$. En particulier, si $1 - xy = 0$, on en déduit que $x = 0$, ce qui est absurde. C'est pourquoi $1 - xy \neq 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$. Or, $P(0,0) = 1 > 0 = \inf P(\mathbb{R}^2)$. P n'admet donc pas de minimum.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On vérifie aisément que $\varphi$ et $\psi$ vérifient les propriétés de symétrie et de linéarité. De plus, $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (ia_i)^2 = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, avec égalité si

et seulement si $ia_i = 0$ pour tout $i \leqslant n$, c'est-à-dire $\mathbf{a} = 0$. En outre, $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (a_1 + a_2)^2 \geqslant \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Par conséquent, $\varphi$ et $\psi$ sont définies positives, donc sont des produits scalaires.

Au contraire, si $a_1 = 1$ et $a_2 = \ldots = a_n = 0$, alors $\theta(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ quand bien même $\mathbf{a} \neq 0$, de sorte que $\theta$ n'est pas définie positive, donc n'est pas un produit scalaire.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Posons $a_i = i$ et $b_i = \sqrt{n+1-i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n+1-k} &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_{n+1-k}^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)\sqrt{}}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Posons $\alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ et $\beta_i = \sqrt{b_i}$. Alors l'inégalité de Cauchy-Scharz indique que $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$, d'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Posons $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$, $b_1 = \sqrt{3x+y}$, $b_2 = \sqrt{3y+z}$ et $b_3 = \sqrt{3z+x}$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x^2+xy} + \sqrt{3y^2+yz} + \sqrt{3z^2+zx} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\
&\leqslant \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)} \\
&\leqslant \sqrt{(x+y+z)(4x+4y+4z)} = 2(x+y+z
\end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Tout d'abord, toute fonction affine est manifestement convexe et concave. Réciproquement, si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est convexe et concave à la fois, alors le graphe de $f$, c'est-à-dire $\{(x, f(x)) : x \in I\}$ est l'intersection de deux ensembles convexes que sont l'épigraphe et l'hypographe de $f$, donc est convexe également. Par conséquent, si $x < y$ sont deux éléments de $I$, on sait que $f : t \mapsto f(x) + \frac{t-x}{y-x}(f(y) - f(x))$ sur l'intervalle $[x, y]$. Puisque la restriction de $f$ à tout segment est affine, cela signifie que $f$ elle-même est affine.

*Solution de l'exercice 15* La dérivée seconde de la fonction $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$, qui est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n = 1$ ou si $n$ est pair. Par conséquent, $x \mapsto x^n$ est convexe si et seulement si $n = 1$ ou si $n$ est pair.

*Solution de l'exercice 16* Le formulaire ci-dessus indique que $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0, +\infty[$, de sorte que exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et que ln est concave sur $]0, +\infty[$.

*Solution de l'exercice 17* Soit $x$ et $y$ deux réels, avec $x < y$, et soit $\lambda$ un élément de l'intervalle $[0, 1]$. Une récurrence immédiate sur $n$ montre que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \{0, \ldots, 2^n\}$, la fonction $f$ vérifie l'inégalité $f\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n-k}{2^n}y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + \frac{2^n-k}{2^n}f(y)$. Or, en prenant $k = \lfloor 2^n\lambda \rfloor$ et en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on remarque que $\frac{k}{2^n} \to \lambda$. Puisque $f$ est continue, il s'ensuit que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, donc que $f$ vérifie l'inégalité de Jensen, c'est-à-dire que $f$ est convexe.

*Solution de l'exercice 18* L'inégalité arithmético-géométrique indique directement que $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$, et que, de même, $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3abc$. Le résultat demandé s'ensuit directement.

*Solution de l'exercice 19* Par l'inégalité de votre choix (par exmeple l'inégalité de Tchebychev, l'inégalité arithmético-quadratique ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on sait que $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2$, de sorte que $3(12 - d^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2 = (6 - d)^2$. Il s'ensuit que $0 \leqslant 3(12 - d^2) - (6 - d)^2 = 4d(3 - d)$, de sorte que $0 \leqslant d \leqslant 3$. Puisque $a$, $b$, $c$ et $d$ jouent des rôles symétriques, il s'ensuit que l'on a même $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 3$.

On cherche maintenant à encadrer la fonction $x \mapsto 4x^3 - x^4$ par des polynômes de degré 2 sur l'intervalle $[0, 3]$. En effet, si l'on obtient un encadrement $Ax^2 + Bx + C \leqslant 4x^3 - x^4 \leqslant Dx^2 + Ex + F$ pour tout $x \in [0, 3]$, alors on aura $12A + 6B + 4C \leqslant 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leqslant 12D + 6E + 4F$.

Dans cette perspective, on pense rapidement à considérer les triplets $(D, E, F) = (4, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$ et $(0, 0, 12)$ : on cherche à avoir un polynôme aussi simple que possible, qui vérifie cependant l'inégalité $12D + 6E + 4F \leqslant 48$. Alors que les deux derniers triplets ne conviennent pas (car $12 \leqslant 24 = 8 \times 3 < 27 = 4 \times 3^3 - 3^4$), le premier convient : en effet, $4x^2 - (4x^3 - x^4) = (x-2)^2x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, 3]$. On a donc prouvé que $4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leqslant 12 \times 4 = 48$.

En revanche, la même technique de recherche de triplets $(A, B, C)$ ne fonctionne pas : il faut donc ruser. On pourrait procéder par une recherche brutale et, après beaucoup de sueur et de chance, on finirait peut-être par gagner.

Cependant, voici une méthode plus naturelle.

Les bornes 48 et 36 que propose l'énoncé ont de bonnes chances d'être optimales. En cherchant parmi les valeurs de $(a, b, c, d)$ entières, on remarque alors que, quand $(a, b, c, d) = (3, 1, 1, 1)$, on a bien $a + b + c + d = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$ et $4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = 36$. Ainsi, le polynôme $P(x) = 4x^3 - x^4 - (Ax^2 + Bx + C)$ doit être nul pour $x = 1$ et $x = 3$. Puisque l'on souhaite avoir $P(x) \geqslant 0$ sur $[0, 3]$, il s'ensuit que $x = 1$ doit être racine double de P. On a alors $0 = P(1) = P'(1) = P(3)$, c'est-à-dire $0 = 3 - (A + B + C) = 11 - (2A + B) = 27 - (9A + B + C)$, et l'on trouve alors $(A, B, C) = (2, 4, -3)$ par simple résolution d'un système linéaire.

On vérifie alors que $2x^2 + 4x - 3 \leqslant 4x^3 - x^4$ sur $[0, 3]$, ce qui conclut l'exercice puisque $2 \times 12 + 4 \times 6 - 3 \times 4 = 36$.

<u>*Solution de l'exercice 20*</u> Soit I le centre du cercle inscrit dans $ABC$, puis $A'$, $B'$ et $C'$ les projetés orthogonaux de I sur les droites $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$. En outre, notons $u = AB' = AC'$, $v = BC' = BA'$ et $w = CA' = CB'$, ainsi que $\alpha = \frac{\widehat{A}}{2}$, $\beta = \frac{\widehat{B}}{2}$ et $\gamma = \frac{\widehat{C}}{2}$. Alors $r = u \tan(\alpha) = v \tan(\beta) = w \tan(\gamma)$ et $u + v + w = \frac{a+b+c}{2} = \frac{p}{2}$. Pour alléger les notations, on écrira dorénavant $T_x$ au lieu de $\tan(x)$. L'inégalité à montrer est donc équivalente à

$$T_{2\alpha} + T_{2\beta} + T_{2\gamma} \geqslant \frac{1}{T_\alpha} + \frac{1}{T_\beta} + \frac{1}{T_\gamma}.$$

En vertu de la formule $T_{x+y} = \frac{T_x + T_y}{1 - T_x T_y}$, on trouve que $T_{x+y+z} = \frac{T_x + T_y + T_z - T_x T_y T_z}{1 - T_x T_y - T_y T_z - T_z T_x}$. En particulier, on sait que $T_{\alpha+\beta+\gamma} = T_{\pi/2} = \infty$ et que $T_{2(\alpha+\beta+\gamma)} = T_\pi = 0$, donc $T_\alpha T_\beta + T_\beta T_\gamma + T_\gamma T_\alpha = 1$ et $T_{2\alpha} + T_{2\beta} + T_{2\gamma} = T_{2\alpha} T_{2\beta} T_{2\gamma}$. L'inégalité à montrer devient donc

$$(T_\alpha T_\beta T_\gamma)(T_{2\alpha} T_{2\beta} T_{2\gamma}) \geqslant T_\alpha T_\beta + T_\beta T_\gamma + T_\gamma T_\alpha = 1.$$

Or, notons que $T_\alpha T_{2\alpha} = \frac{2T_\alpha^2}{1 - T_\alpha^2} = \frac{2\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$. Puisque $ABC$ est acutangle, on sait que $\cos(\widehat{A})$, $\cos(\widehat{B})$ et $\cos(\widehat{C})$ sont strictement positifs : il suffit donc de montrer que $\Delta \geqslant 0$, où

$$\Delta = (1 - \cos(\widehat{A}))(1 - \cos(\widehat{B}))(1 - \cos(\widehat{C})) - \cos(\widehat{A}) \cos(\widehat{B}) \cos(\widehat{C}).$$

Puisque $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$, on sait que $\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A} + \widehat{B}) = \sin(\widehat{A}) \sin(\widehat{B}) -$

$\cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B})$, de sorte que

$$\begin{aligned} 1 &= (1-\cos(\widehat{A})^2)(1-\cos(\widehat{B})^2) + \cos(\widehat{A})^2 + \cos(\widehat{B})^2 - \cos(\widehat{A})^2\cos(\widehat{B})^2 \\ &= \sin(\widehat{A})^2\sin(\widehat{B})^2 + \cos(\widehat{A})^2 + \cos(\widehat{B})^2 - \cos(\widehat{A})^2\cos(\widehat{B})^2 \\ &= (\cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{C}))^2 + \cos(\widehat{A})^2 + \cos(\widehat{B})^2 - \cos(\widehat{A})^2\cos(\widehat{B})^2 \\ &= \cos(\widehat{A})^2 + \cos(\widehat{B})^2 + \cos(\widehat{C})^2 + 2\cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B})\cos(\widehat{C}). \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $S_1 = \cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{C})$ et $S_2 = \cos(\widehat{A})^2 + \cos(\widehat{B})^2 + \cos(\widehat{C})^2$, on peut vérifier que $\Delta = S_1^2 + S_2 - 2S_1$. Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $S_2 \geqslant \frac{S_1^2}{3}$. Il s'ensuit que $\Delta \geqslant \frac{2}{3}S_1(2S_1 - 3)$. De surcroît, puisque $\cos''(x) = -\cos(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, auquel appartiennent les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle acutangle $ABC$, l'inégalité de Jensen indique que $S_1 \geqslant 3\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{3}\right) = 3\cos(\pi/3) = \frac{3}{2}$. Cela indique que $\Delta \geqslant 0$, ce qui conclut l'exercice.

<u>*Solution de l'exercice 21*</u> Tout d'abord, notons que $f$ ne prend que des valeurs strictement positives. En outre, si $\varepsilon \to 0$, alors

$$f(\varepsilon^{-1}, \varepsilon^2, 1) = \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-1/2}}{\sqrt{(\varepsilon^{-1} + \varepsilon^2)(\varepsilon^2 + 1)(1 + \varepsilon^{-1})}} \sim \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon^{1/2} \to 0,$$

de sorte que $\inf f\left(]0, +\infty[^3\right) = 0$.

D'autre part, on sait que $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$, que $\sqrt{yz} \leqslant \frac{y+z}{2}$ et que $\sqrt{zx} \leqslant \frac{z+x}{2}$. C'est pourquoi

$$\begin{aligned} \left(x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x}\right)^2 &= (x^2y + y^2z + z^2x) + 2(xy\sqrt{yz} + yz\sqrt{zx} + zx\sqrt{xy}) \\ &\leqslant (x^2y + y^2z + z^2x) + 2\left(xy\frac{y+z}{2} + yz\frac{z+x}{2} + zx\frac{x+y}{2}\right) \\ &\leqslant (x+y)(y+z)(z+x) + xyz \\ &\leqslant (x+y)(y+z)(z+x) + \frac{x+y}{2}\frac{y+z}{2}\frac{z+x}{2} = \frac{9}{8}(x+y)(y+z \end{aligned}$$

de sorte que $f(x, y, z) \leqslant \frac{3}{2\sqrt{2}}$, avec égalité si $x = y = z = 1$.

On en déduit donc que $f\left(]0, +\infty[^3\right) = \left]0, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$.

<u>*Solution de l'exercice 22*</u> L'inégalité est équivalente à l'inégalité homogène $P(a, b, c) \geqslant 0$, où $P(a, b, c) = (a^6 + b^6 + c^6)^3 - 3(a^7b^2 + b^7c^2 + c^7a^2)^2$.

Or, $P(a, b, c) = \langle 18 \mid 0 \mid 0\rangle + 3\langle 12 \mid 6 \mid 0\rangle + 3\langle 12 \mid 0 \mid 6\rangle + 2\langle 6 \mid 6 \mid 6\rangle - 3\langle 14 \mid 4 \mid 0\rangle - 6\langle 9 \mid 2 \mid 7\rangle$. En outre, par inégalité arithmético-géométrique, on a

$\langle 18 \mid 0 \mid 0\rangle + 2\langle 12 \mid 6 \mid 0\rangle \geqslant 3\langle 14 \mid 4 \mid 0\rangle$ et $\langle 6 \mid 0 \mid 12\rangle + 3\langle 12 \mid 0 \mid 6\rangle + 2\langle 6 \mid 6 \mid 6\rangle \geqslant 6\langle 9 \mid 2 \mid 7\rangle$, de sorte que

$$\begin{aligned} P(a,b,c) &= (\langle 18 \mid 0 \mid 0\rangle + 2\langle 12 \mid 6 \mid 0\rangle - 3\langle 14 \mid 4 \mid 0\rangle) + \\ &\quad (\langle 6 \mid 0 \mid 12\rangle + 3\langle 12 \mid 0 \mid 6\rangle + 2\langle 6 \mid 6 \mid 6\rangle - 6\langle 9 \mid 2 \mid 7\rangle) \geqslant 0. \end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 23*</u> Reprenons les notations de l'exercice 20, et posons $\mathcal{D} = 3(AI^2 + BI^2 + CI^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Par théorème de Pythagore, on sait que $AI^2 + BI^2 + CI^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 3r^2$. En outre, $2(u+v+w)r = (a+b+c)r = 2\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est l'aire du triangle $ABC$. Par formule de Héron, on sait que $\mathcal{S} = \sqrt{uvw(u+v+w)}$, d'où l'on déduit que $r^2 = \frac{uvw}{u+v+w}$, donc que

$$\mathcal{D} = 3\left(u^2 + v^2 + w^2 + 3\frac{uvw}{u+v+w}\right) - (u+v)^2 - (v+w)^2 - (w+u)^2.$$

Après deux heures de calcul, on simplifie cette égalité en

$$(u+v+w)\mathcal{D} = (u-v)^2(u+v-w) + (u-w)(v-w).$$

Puisque $u$, $v$ et $w$ jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $u \geqslant v \geqslant w > 0$, ce qui conclut.