DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Grésillon 2011

Stratégies de base : exercices

Exercice 1 15 stagiaires ont attrapé 100 tiques. Prouver qu'au moins deux de ces stagiaires ont attrapé le même nombre de tiques.

Exercice 2 On considère des "mots " écrits avec les lettres x, y, z et t. On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$,

(ii) $xytx$ et $txyt$,

(iii) xy et xt.

Exercice 3 Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 4 À Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

Exercice 5 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu.

(i) Montrer que pour tout réel x il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

(ii) Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel x on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

Exercice 6 Soit α un nombre réel tel que $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 7 Est-il possible de paver avec des triminos 3×1 :

(i) un damier 8×8 ?

(ii) un damier 8×8 auquel manque le coin en haut à gauche ?

Exercice 8 47 personnes voyagent dans un bus avec deux contrôleurs à son bord. Au départ, aucun des voyageurs n'a de billet et chaque passager n'achète un billet qu'après la troisième fois qu'on le lui demande. Les contrôleurs choisissent à tour de rôle un passager sans billet et lui demandent d'en acheter un. Ils procèdent ainsi jusqu'à ce que toutes les personnes aient un titre de transport. Combien de billets le premier contrôleur est-il sûr de vendre ?

Exercice 9 Un groupe de pirates s'est emparé de 128 pièces d'or. Si l'un d'eux possède au moins la moitié des pièces d'or, chaque autre pirate lui vole autant de pièces d'or qu'il a déjà en sa possession. Si deux pirates ont chacun 64 pièces d'or, l'un des ces deux individus vole toutes les pièces de l'autre. On suppose que sept tours de vol ont lieu. Montrer qu'à la fin un pirate obtient la totalité du butin.

Il est conseillé de chercher les deux derniers exercices suivants après un cours d'arithmétique.

Exercice 10 Démontrer que parmi 2008 nombres entiers arbitraires, on peut trouver des nombres dont la somme est divisible par 2008.

Exercice 11 On se donne m cartes, chacune numérotée par un entier entre 1 et m. On suppose que la somme des numéros de n'importe quel sous-ensemble de cartes n'est pas divisible par $m+1$. Montrer que les cartes sont numérotées par le même entier.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Supposons le contraire. Alors les stagiaires ont attrapé au moins $0 + 1 + \cdots + 14 = \frac{14(14+1)}{2} = 105 > 100$ tiques. Contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

(i) Les deux mots sont équivalents : $xxyy \mapsto xyyxy \mapsto xyyyyx$.

(ii) Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de x est un invariant.

(iii) Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de y (ou celle de t) est un invariant.

Solution de l'exercice 3 Si $n < 0$, $2^n < 1 \leqslant n^2$. Pour $n = 0, 1, 2, 4$ on a bien $2^n \geqslant n^2$ (mais pas pour $n = 3$). Montrons maintenant que $2^n \geqslant n^2$ pour $n \geqslant 4$ par récurrence sur n. À cet effet, pour $n \geqslant 1$ entier, soit P_n la proposition suivante :

$$P_n : \qquad \text{« } 2^n \geqslant n^2 \text{ »}$$

- (Initialisation) [1] Pour $n = 4$, on a bien $2^4 \geqslant 4^2$.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 4$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. D'après l'hypothèse de récurrence, $2^n \geqslant n^2$. On a alors $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Ceci provient du fait que :

  $$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geqslant 3^2 - 2 \geqslant 0.$$

  Ainsi, $2^{n+1} \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Cela montre l'étape d'hérédité et conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 4 Notons n le nombre de villes. Pour avoir une intuition de ce qui se passe, il est conseillé de tester différentes configurations pour des petites valeurs de n. Pour $n = 2$, il n'y a un qu'un seul moyen de transport. Pour $n = 3$, soient A, B, C les trois villes. Sans perte de généralité, supposons que $A - B$ est une ligne aérienne. Alors soit C peut être relié à A ou B par une ligne aérienne, auquel cas l'avion convient, soit C est relié à A et B par un canal, auquel cas le bateau convient.

Cela suggère de démontrer que la véracité de la proposition suivante par récurrence [2] sur n :

P_n : « Pour toute configuration de n villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises. »

- (Initialisation) On a déjà vu que P_2 est vérifiée.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 2$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Considérons A une ville quelconque et appliquons la propriété P_n à la configuration des n villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors de deux choses

1. Ne *jamais* oublier cette étape qui, même si sa vérification est triviale ; si elle est omise, cela enlève des points aux Olympiades !

2. il faut toujours connaître la propriété *précise* que l'on veut prouver afin d'éviter les mauvaises surprises (par exemple lors de deux récurrences imbriquées ou autre réjouissances de ce type).

l'une : soit il existe une ligne aérienne reliant A à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit A est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient.

Solution de l'exercice 5

(i) On considère un triangle équilatéral de côté x. Il existe alors deux sommets de ce triangle qui conviennent.

(ii) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on puisse trouver des distances x et y telles que deux points rouges ne soient jamais distants de x et deux points bleus ne soient jamais distants de y.

Il existe alors un point rouge ; notons le A. Considérons ensuite un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC = x$ et $BC = y$. Ainsi, B et C doivent être bleu. Or ces deux points sont distants de y, ce qui est contradictoire. Notre supposition de départ était donc fausse ; ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6 Montrons que la propriété suivante est vérifiée par récurrence sur n :

$$P_n : \qquad « \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} ».$$

- (Initialisation) P_1 est clairement vraie.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Remarquons que :

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right),$$

qui est entier grâce à l'hypothèse de l'énonce et à l'hypothèse de récurrence P_n. Cela conclut.

Solution de l'exercice 7

(i) Une figure pavée entièrement par des triminos 3×1 possède un nombre multiple de 3 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 3. La réponse est donc *non*.

(ii) On colorie la deuxième figure avec 3 couleurs différentes en les alternant de sorte que la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur et de sorte qu'un trimino recouvre nécessairement 3 cases dont les couleurs sont deux à deux différentes. La réponse est encore *non*.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Le premier contrôleur peut vendre tous les billets si, à chaque fois que c'est son tour, il procède de la manière suivante :

- Si une personne a déjà été désignée deux fois, il la choisit.
- Sinon, il choisit une personne qui n'a jamais été choisie.

Il peut toujours procéder de la sorte. En effet, une récurrence permet de voir qu'après chaque tour du deuxième contrôleur, le nombre de personnes choisies un nombre pair de fois est impair, donc non nul.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On montre par récurrence qu'après le i-tour, le butin de chacun des pirates est divisible par 2^i. Comme à l'issue du septième tour il existe un pirate ayant un nombre non nul de pièces d'or, celui-ci en détient la totalité.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Notons $a_1, \ldots, a_{2008}$ les entiers en question et considérons les sommes $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant 2008$). Si l'une d'elles est divisible par 2008, c'est gagné. Sinon, d'après le principe des tiroirs, il existe deux sommes, disons s_i et s_j (avec $i < j$), qui ont le même reste dans la division euclidienne par 2008. Dans ce cas, $s_j - s_i$ convient.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Notons $a_1, \ldots, a_m$ les numéros des cartes en question et considérons les sommes $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$). En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on voit que $s_1, \ldots, s_m$ sont distincts modulo[3] $m + 1$. Mais comme a_2 ne peut être égal à s_q modulo $m + 1$ pour $3 \leqslant q \leqslant m$, cela implique que $a_2 \equiv s_1 \mod m + 1$ ou $a_2 \equiv s_2 \mod m + 1$. Comme $0 < a_1 < m + 1$, on a nécessairement $a_1 = a_2$. On conclut en répétant ce raisonnement.

3. Voir cours d'arithmétique élémentaire.