DOMAINE : Non olympique
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Nicolas SÉGARRA
STAGE : Montpellier 2014

Convergence de suites réelles

I) Rappels et notions de base.

Définition 1. Une suite réelle (à valeurs dans $\mathbb{R}$) est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie infinie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$. Une telle suite est notée : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle est définie sur $\mathbb{N}$) ou simplement (u_n) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
Le nombre u_n (qui dépend de l'indice n) est appelé : terme général de la suite (u_n).

Une suite (u_n) peut être définie par une formule explicite (de la forme : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ou par récurrence (dans ce cas, on donne $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$ où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Exemples de suites : donnés par les élèves.

Définition 2. Soient r et q deux réels.
On appelle suite arithmétique de raison r une suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
On appelle suite géométrique de raison q une suite (v_n) définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$.

On vérifie facilement par récurrence qu'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 a pour terme général : $u_n = u_0 + nr$ et qu'une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0 a pour terme général : $v_n = v_0 \times q^n$.

Définition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :
constante si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
croissante sur $\mathbb{N}$ (resp. strictement croissante sur $\mathbb{N}$) si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$).
décroissante sur $\mathbb{N}$ (resp. strictement décroissante sur $\mathbb{N}$) si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$).
monotone sur $\mathbb{N}$ si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{N}$.
majorée sur $\mathbb{N}$ si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré i.e : s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
minorée sur $\mathbb{N}$ si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré i.e : s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$u_n \geq m$.
bornée sur $\mathbb{N}$ si elle est majorée et minorée.
périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

Remarque. Attention, ces définitions ont été données pour une suite définie sur $\mathbb{N}$ et s'appliquent seulement si la suite (u_n) vérifie une ou plusieurs de ces définitions sur l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier ! Il peut arriver que ce ne soit pas le cas mais par contre on pourra peut-être démontrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang par exemple ou qu'elle est périodique à partir d'un certain rang.

II) Notion de convergence d'une suite réelle.

Définition 4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ (ou tend vers ℓ ou a pour limite ℓ) si : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
On notera : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$.
Montrer, en utilisant la définition 4, que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution de l'exercice 1. Montrons que la suite (u_n) converge vers 1. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $N_\varepsilon = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \geq 1$ (où E désigne la fonction partie entière. La partie entière d'un réel x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x). On a : $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow n \geq \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{n}$ donc $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - 1| \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 1.

Définition 5. Soit (u_n) une suite réelle.
On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si $\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, u_n \geq A$.
On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si $\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, u_n \leq A$.

Exercice 2. Etudier (avec les définitions 4 et 5) la convergence d'une suite arithmétique de raison r (selon les valeurs de r).

Solution de l'exercice 2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{N}$ (on aura les mêmes cas si la suite n'est pas définie sur $\mathbb{N}$ tout entier). Alors, on peut écrire $u_n = u_0 + nr$.
Il est évident que si $r = 0$, la suite (u_n) converge vers u_0 (en effet, on aura pour tout $\varepsilon > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - u_0| \leq \varepsilon$). On va montrer que si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et que si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Supposons dans un premier temps que $r > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$.
Posons $n_0 = E\left(\dfrac{|A - u_0|}{r}\right) + 1 \in \mathbb{N}^*$ (et $r \neq 0$ car $r > 0$). On a : $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq$

$\dfrac{|A-u_0|}{r} \Rightarrow nr \geq |A-u_0| \Rightarrow nr \geq A-u_0 \Rightarrow u_n \geq A$. On a montré que : $\forall\, A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 = E\left(\dfrac{|A-u_0|}{r}\right)+1 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0$, $u_n \geq A$ donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand $r > 0$.

Supposons maintenant que $r < 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$.

Comme précédemment, on pose (en rajoutant une valeur absolue pour r) : $n_0 = E\left(\dfrac{|A-u_0|}{|r|}\right)+1$ et on trouve que $\forall\, n \geq n_0$, $u_n \leq A$ donc la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand $r < 0$.

Propriété 1. Soit (u_n) une suite réelle.
1. Si (u_n) converge alors sa limite est unique.
2. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors elle est bornée (réciproque vraie ?).
3. Si pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathbb{N}$ et si (u_n) converge vers un réel ℓ alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Démonstration.
1. Supposons que la suite (u_n) converge vers deux réels ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. On pose : $\varepsilon = \dfrac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$. Alors (par la définiton 4), à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) seront dans les intervalles : $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ et $[\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon]$ mais ces deux intervalles sont disjoints donc ils ne peuvent pas avoir des éléments en commun. Donc $\ell = \ell'$.
2. La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.
Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \max\{u_0, ..., u_{N_\varepsilon-1}, \ell+\varepsilon\}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \min\{u_0, ..., u_{N_\varepsilon-1}, \ell-\varepsilon\}$ donc (u_n) est bornée.
3. Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'était pas entier, alors, pour ε suffisamment petit, l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ ne contiendrait aucun entier donc aucun des termes de la suite (u_n). Donc ℓ est un entier. Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, alors l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ contient un unique entier : ℓ. Comme à partir d'un certain rang, tous les u_n sont dans cet intervalle et qu'ils sont tous entiers, ils sont tous égaux à ℓ.

Théorème 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives : ℓ et ℓ'.
Alors la suite (u_n+v_n) converge vers $\ell+\ell'$ et la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers $\ell \times \ell'$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' respectivement donc il existe N_ε et $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $|u_n-\ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\forall\, n \geq N'_\varepsilon$, $|v_n-\ell'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Dès lors, $\forall\, n \geq \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, $|u_n-\ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n-\ell'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, $\forall\, n \geq \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, $|u_n-\ell|+|v_n-\ell'| \leq \varepsilon$.
Or, par l'inégalité triangulaire, on a : $|u_n-\ell+v_n-\ell'| \leq |u_n-\ell|+|v_n-\ell'|$ ainsi, on a : $\forall\, n \geq \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, $|u_n+v_n-(\ell+\ell')| \leq \varepsilon$ donc la suite (u_n+v_n) converge vers $\ell+\ell'$.

Exercice 3. Démontrer la deuxième partie du théorème 1.

Solution de l'exercice 3. Fixons $\varepsilon > 0$.
La suite (u_n) est convergente donc elle est bornée ainsi, $\exists M > 0$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' respectivement donc il existe N_ε et $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2|\ell'|+1}$ et $\forall\, n \geq N'_\varepsilon$, $|v_n - \ell'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
On écrit : $\forall\, n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, $|u_nv_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n-\ell')+\ell'(u_n-\ell)| \leq |u_n||v_n-\ell'|+|\ell'||u_n-\ell|$ donc $\forall\, n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, $|u_nv_n - \ell\ell'| \leq M\dfrac{\varepsilon}{2M} + |\ell'|\dfrac{\varepsilon}{2|\ell'|+1} \Rightarrow |u_nv_n - \ell\ell'| \leq \varepsilon$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2n+\cos(n)}{n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution de l'exercice 4. On écrit : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2+\dfrac{\cos(n)}{n}}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}}$.

Comme on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1$, on en déduit que la suite (u_n) converge vers 2.

Définition 6. Etant donnée une suite (u_n), nous appellerons borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités, si elles existent : $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. La borne supérieure, si elle existe, de l'ensemble : $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble et sa borne inférieure, si elle existe, est le plus grand des minorants de cet ensemble.

Remarque. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie (resp. une borne inférieure finie).

Théorème 2.
1. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
4. Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration.
1. Soit (u_n) une suite croissante et majorée.
L'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est majoré donc il admet une borne supérieure finie que l'on note ℓ. Comme ℓ est le plus petit des majorants de la suite (u_n), pour tout $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de la suite (u_n) donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{N_\varepsilon} > \ell - \varepsilon$. De plus, la suite (u_n) est croissante donc $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $u_n \geq u_{N_\varepsilon}$.
On a finalement, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de la suite (u_n) vers le réel ℓ.
2. Soit (v_n) une suite croissante et non majorée.
La suite (v_n) est non majorée donc $\forall\, A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $v_{n_0} > A$.
La suite (v_n) est croissante donc $\forall\, n \geq n_0$, $v_n \geq v_{n_0}$ donc $\forall\, n \geq n_0$, $v_n > A$. Ceci prouve que

la suite (v_n) tend vers $+\infty$. Les points 3 et 4 se démontrent en appliquant les points 1 et 2 et sont laissés en exercice.

Définition 7. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
1. (u_n) est croissante.
2. (v_n) est décroissante.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Propriété 2. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. De plus, la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0 donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geq 0$. Donc on a : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. (Leur limite commune n'est autre que le nombre $e = \exp(1)$, on peut d'ailleurs montrer avec nos deux suites que c'est un nombre irrationnel !).

Solution de l'exercice 5. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante (même strictement croissante) sur $\mathbb{N}$. D'autre part, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (même strictement décroissante) sur $\mathbb{N}^*$. Enfin, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Théorème 3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que (v_n) converge vers 0. Si à partir d'un certain rang n_0, $|u_n| \leq |v_n|$ alors (u_n) converge vers 0.

Exercice 6.
1) Démontrer le théorème 3.
2) Enoncer puis démontrer (en utilisant le théorème 3) le théorème des gendarmes.

Solution de l'exercice 6.
1) La suite (v_n) converge vers 0 donc $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $|v_n| \leq \varepsilon$. Comme on a $\forall\, n \geq n_0$, $|u_n| \leq |v_n|$, on en déduit que : $\forall\, n \geq \max(N_\varepsilon, n_0)$, $|u_n| \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.
2) Enonçons le théorème des gendarmes : soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que : (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ et à partir d'un certain rang n_0, on a :

$u_n \leq v_n \leq w_n$ alors (v_n) converge vers ℓ.
Démonstration : On a $\forall\ n \geq n_0$, $-u_n \geq -v_n \geq -w_n$ donc $\forall\ n \geq n_0$, $w_n - u_n \geq w_n - v_n \geq 0$ ainsi, $\forall\ n \geq n_0$, $|w_n - v_n| \leq |w_n - u_n|$ et on déduit la convergence de la suite $(w_n - v_n)$ en utilisant le théorème 3 et enfin, on déduit la convergence de la suite (v_n).

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+2}$.
Montrer que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Solution de l'exercice 7. On a : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n-1}{n+2} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{n+2}$ ainsi, par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) tend vers 1.

Théorème 4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
1. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
La démonstration de ce théorème est quasiment immédiate donc elle est laissée en exercice.

III) Exercices d'entraînement.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $c_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + ... + u_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
Le nombre c_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n). La suite (c_n) est appelée : "suite des moyennes de Cesaro" de (u_n).
Montrer que si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors la suite (c_n) converge aussi vers ℓ.

Solution de l'exercice 8. La suite (u_n) converge vers ℓ donc $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On a $\forall\ n \geq N_\varepsilon$, $|c_n - \ell| = \left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon}|u_k - \ell| + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=N_\varepsilon+1}^{n}|u_k - \ell| \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon}|u_k - \ell| + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\varepsilon$ et $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\varepsilon = \dfrac{(n-N_\varepsilon)\varepsilon}{n}$ d'où : $|c_n - \ell| \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon}|u_k - \ell| + \dfrac{(n-N_\varepsilon)\varepsilon}{n} \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon}|u_k - \ell| + \varepsilon$. Or, $\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon}|u_k - \ell|$ ne dépend pas de n donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geq N$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon}|u_k - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\forall\ n \geq \max(N_\varepsilon, N)$, $|c_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. Donc la suite (c_n) converge vers ℓ.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2}$.
Montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Solution de l'exercice 9. L'astuce dans ce genre d'exercice (très ouvert !) est de calculer les premiers termes de la suite (u_n) pour conjecturer son sens de variation. Ensuite, selon le sens

de variation conjecturé, on pourra essayer de minorer ou de majorer la suite (u_n) ! On commence par montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
Pour $n = 0$, c'est clair ! Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n \geq 2$. Alors : $u_n - 2 \geq 0 \Rightarrow u_n + 2(n+1)^2 - 2 \geq 2(n+1)^2 \Rightarrow u_{n+1} \geq 2$, ce qui achève la récurrence. Ensuite, on montre que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$, en effet : on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n-1} = \dfrac{(n^2-1)(2-u_{n-1})}{n^2} \leq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge. Enfin, comme (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ et $u_0 = 3$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n-1} \leq 3 \Rightarrow u_n \leq \dfrac{1+2n^2}{n^2}$. On a finalement : $2 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2} + 2$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on conclut que la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 10. On donne la définition suivante : soient I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que la fonction f est continue en a si : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall\, x \in I$, $|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Démontrer le théorème suivant : soient (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers un réel ℓ et f une fonction (définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles) continue en ℓ. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Solution de l'exercice 10. Fixons $\varepsilon > 0$. La continuité de la fonction f en ℓ donne : $\exists \eta > 0$, $\forall\, x \in I$, $|x - \ell| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| \leq \varepsilon$. De plus, la suite (u_n) converge vers ℓ donc $\exists N_\eta \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_\eta$, $|u_n - \ell| \leq \eta$. On obtient alors : $\forall\, n \geq N_\eta$, $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \varepsilon$ donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Exercice 11. On donne la définition suivante : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle suite extraite ou sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Solution de l'exercice 11. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ. On peut alors écrire : $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de la suite (u_n). On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ (se montre facilement par récurrence) donc $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $\varphi(n) \geq n \geq N_\varepsilon$ ainsi, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| = |v_n - \ell| \leq \varepsilon$. Donc la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

Exercice 12. Démontrer la propriété suivante : soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, (u_n) une suite d'éléments de I définie par récurrence par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et convergeant vers un réel ℓ. Si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.

Solution de l'exercice 12. La suite (u_n) converge vers ℓ et la fonction f est continue en ℓ donc d'après l'exercice 9, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. De plus, d'après l'exercice 10, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Ainsi, par la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ et par unicité de la limite, on a : $\ell = f(\ell)$.

Exercice 13. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$.
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution de l'exercice 13. Après les calculs de u_1 et u_2, on conjecture que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est minorée par 0.
Montrer que (u_n) est minorée par 0 est une récurrence immédiate. Pour montrer que (u_n) est décroissante, on calcule : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n - 1}{u_n^2+1}$. On remarque que le trinôme : $-x^2 + x - 1$ est strictement négatif pour tout réel x car son discriminant est strictement négatif. Ainsi, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ (et même strictement décroissante sur $\mathbb{N}$!). La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers un réel ℓ.
Pour trouver ℓ, on peut remarquer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Cette fonction est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. On peut alors appliquer la propriété de l'exercice 11 et on en déduit que ℓ est un point fixe de f i.e : $f(\ell) = \ell$. On a : $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell}{\ell^2+1} = \ell \Leftrightarrow \ell = \ell(\ell^2+1)$ (ces équivalences logiques ont un sens car $\ell^2+1 \neq 0$).
On obtient finalement : $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell^3 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.
Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.