DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

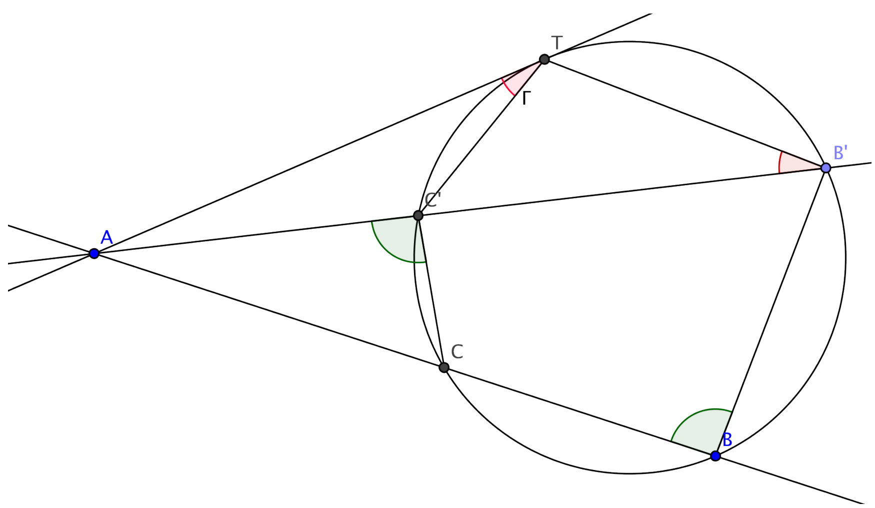
AUTEUR : Ambroise MARIGOT
STAGE : Cachan 2010 (junior)

Puissance d'un point, isométries directes

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Définition et expression

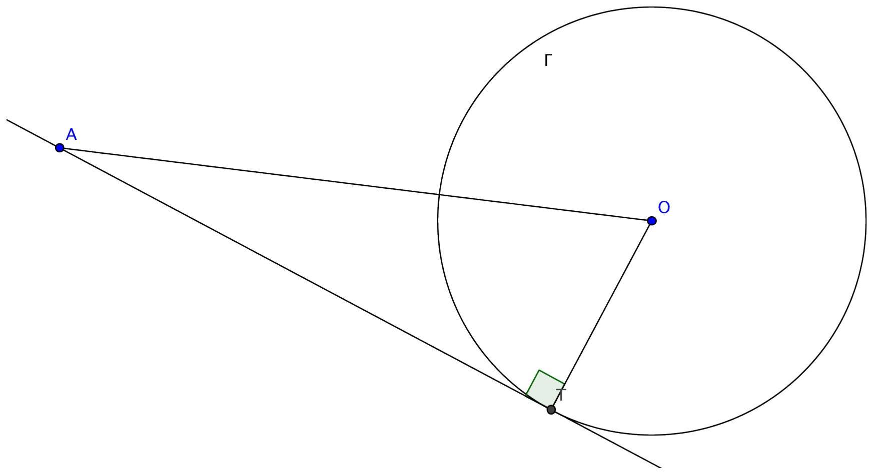
Soit Γ un cercle, A un point et Δ, Δ' deux droites passant par A et coupant Γ en B et C pour Δ, et en B' et C' pour Δ'.



Une chasse aux angles rapide montre que les triangles ABB' et $AC'C$ sont semblables. On a donc $\frac{AB}{AC'} = \frac{AB'}{AC}$, ce qui nous donne $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$. On observe que si B et C sont confondus, *i.e.* si Δ est une tangente à Γ, le résultat est toujours vrai en utilisant le cas tangentiel du théorème de l'angle inscrit. On peut aussi remarquer que B et C sont de part et d'autre de A si et seulement si A est intérieur à Γ, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 1. On appelle puissance du point A par rapport au cercle Γ, et on note $P(A, \Gamma)$ la quantité $AB \cdot AC$, le produit étant algébrique, c'est-à-dire qu'il est négatif si AB et AC ne sont pas dans le même sens.

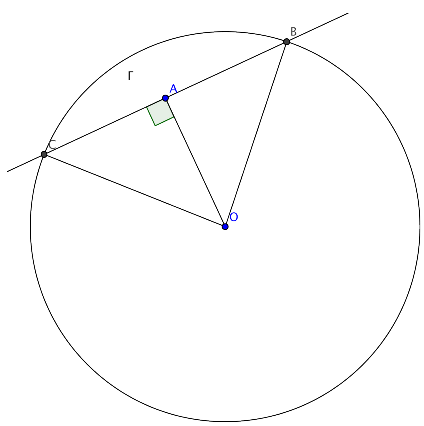
On note maintenant O et r respectivement le centre et le rayon de Γ. Si A est extérieur à Γ, on peut considérer le cas où $B = C$ et on a alors $P(A, \Gamma) = AB \cdot AC = AB^2$.



Or, comme (AB) et (OB) sont orthogonales, on a d'après Pythagore $OA^2 = AB^2 + OB^2 = AB^2 + r^2$, soit $AB^2 = OA^2 - r^2$. On a donc

$$P(A, \Gamma) = OA^2 - r^2. \tag{1}$$

Notons que si A est intérieur au cercle, la formule (1) reste valable, pour la montrer on considère cette fois non pas la tangente menée par A en Γ mais la droite orthogonale à (AO) passant par A, et on a $AB = AC$, ainsi que $r^2 = AB^2 + OA^2$, donc $P(A, \Gamma) = -AB \cdot AC = -AB^2 = OA^2 - r^2$.



Remarquons aussi que si A, B, C ainsi que A, B', C' sont alignés, $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$ est une condition nécessaire, mais aussi suffisante pour que $BCB'C'$ soit inscriptible. En effet, l'intersection du cercle circonscrit à BCB' et de la droite (AB') est un point C^* vérifiant $AB' \cdot AC^* = AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$, donc $C^* = C'$. Retenons deux remarques importantes pour la suite :

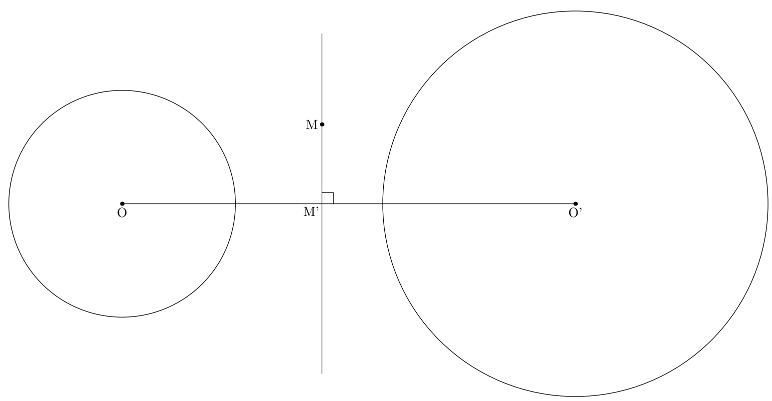
1. $P(A, \Gamma) = 0$ ssi $A \in \Gamma$.
2. Si une tangente à Γ menée depuis A rencontre Γ en T, alors $P(A, \Gamma) = AT^2$.

Axe radical

Soient Γ et Γ' deux cercles non concentriques, de centres respectifs O et O', et de rayons respectifs r et r'. On s'intéresse au lieu géométrique D des points M vérifiant

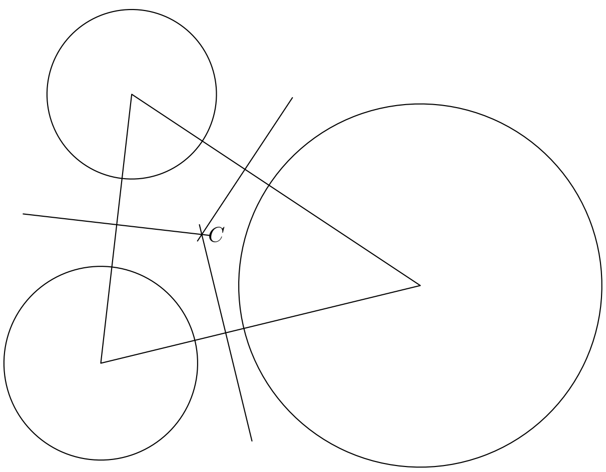
$$P(M, \Gamma) = P(M, \Gamma') \tag{2}$$

Nous allons prouver que D est une droite. La relation (2) se réécrit $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$, soit $MO^2 - MO'^2 = K$, où on a défini $K = r^2 - r'^2$. On définit M' le projeté orthogonal de M sur (OO'). On a d'après Pythagore $M'O^2 = MO^2 - MM'^2$, et $M'O'^2 = MO'^2 - MM'^2$, donc $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = K$, donc $M \in D$ si et seulement si $M' \in D$. D'autre part, comme K est fixé, on peut remarquer qu'il existe un unique point A de (OO') vérifiant $AO^2 - AO'^2 = K$ (exercice), et donc on a finalement : $M \in D$ si et seulement si (MA) est orthogonale à (OO'), *i.e.* D est la droite orthogonale à (OO') passant par A. On l'appelle l'axe radical de Γ et Γ'.



Il découle de la définition de l'axe radical que si Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont trois cercles non deux à deux concentriques, alors on a : D_3 *de* Γ_1 *et* Γ_2, D_1 *de* Γ_2 *et* Γ_3, *et* D_2 *de* Γ_3 *et* Γ_1 *sont concourants, parallèles ou confondus.*

En effet, si D_1 et D_2 sont sécants en A, alors $P(A, \Gamma_2) = P(A, \Gamma_3)$ et $P(A, \Gamma_3) = P(A, \Gamma_1)$, donc A a la même puissance par rapport aux trois cercles, donc $A \in D_3$, ce qui prouve l'assertion. De plus, il est facile de voir que comme D_3 est orthogonal à (O_1O_2) et ainsi de suite, les axes radicaux sont concourants si et seulement si les centres des trois cercles ne sont pas alignés. Dans ce cas, on appelle A le centre radical des trois cercles.

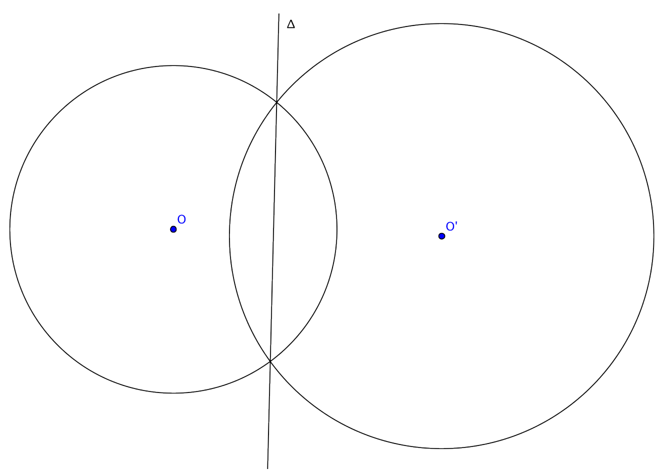


Il est intéressant de voir des constructions géométriques possibles de l'axe radical de deux cercles :

Cas 1 : Γ et Γ' sont sécants en A et B distincts. C'est le cas le plus facile : on a

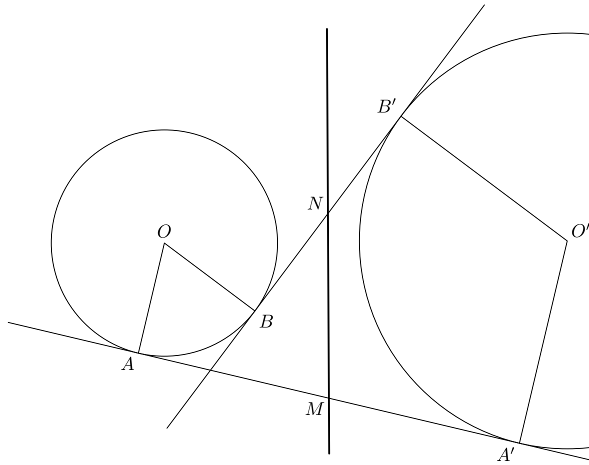
$$P(A,\Gamma) = P(B,\Gamma) = P(A,\Gamma') = P(B,\Gamma') = 0,$$

donc $D = (AB)$.



Cas 2 : Γ et Γ' sont tangents en A. Alors O, O' et A sont alignés, et $P(A,\Gamma) = P(A,\Gamma') = 0$, donc D est la droite orthogonale à (OO') passant par A, *i.e.* D est la tangente commune à Γ et Γ' passant par A.

Cas 3 : Γ et Γ' sont disjoints et extérieurs l'un à l'autre. On considère alors deux tangentes communes Δ et Δ' aux deux cercles. Si Δ rencontre Γ en A et Γ' en A', alors le milieu M de $[AA']$ vérifie $P(M,\Gamma) = MA^2 = MA'^2 = P(M,\Gamma')$, donc $M \in D$. De même, si Δ' rencontre Γ en B et Γ' en B', le milieu N de $[BB']$ appartient à D. Donc $D = (MN)$.

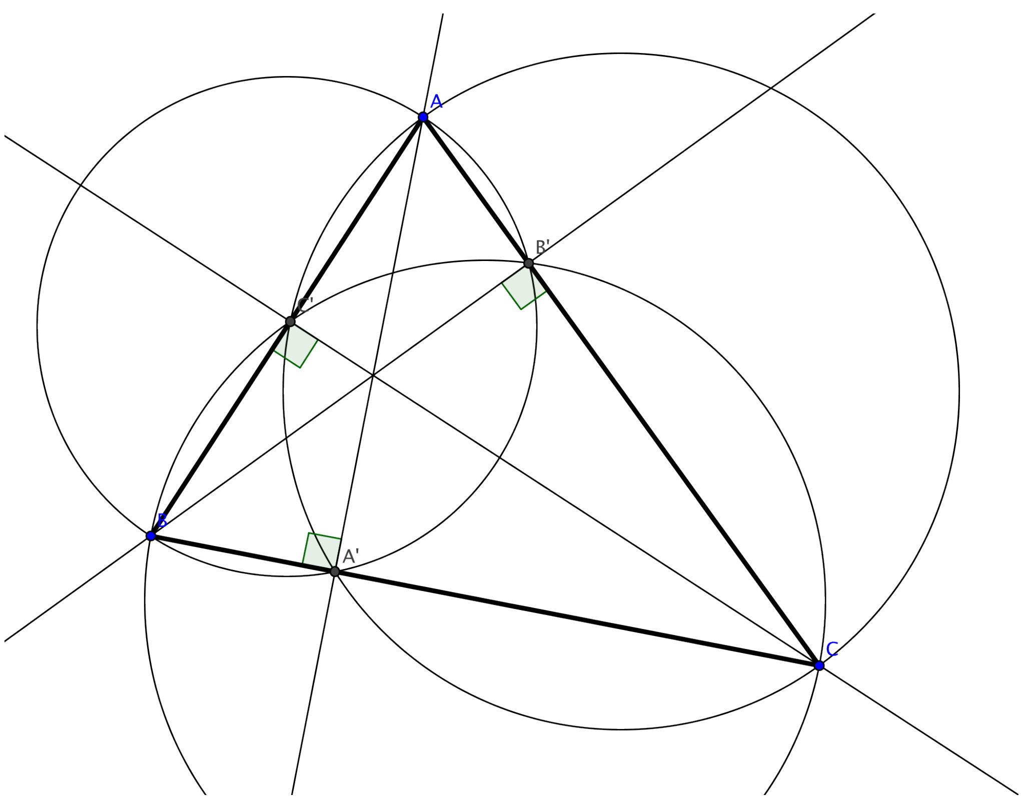


Cas 4 : Γ et Γ′ sont disjoints, et l'un est intérieur à l'autre. Dans ce cas, il n'existe pas de construction géométrique élémentaire de l'axe radical des deux cercles.

Applications

Exercice 1 Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

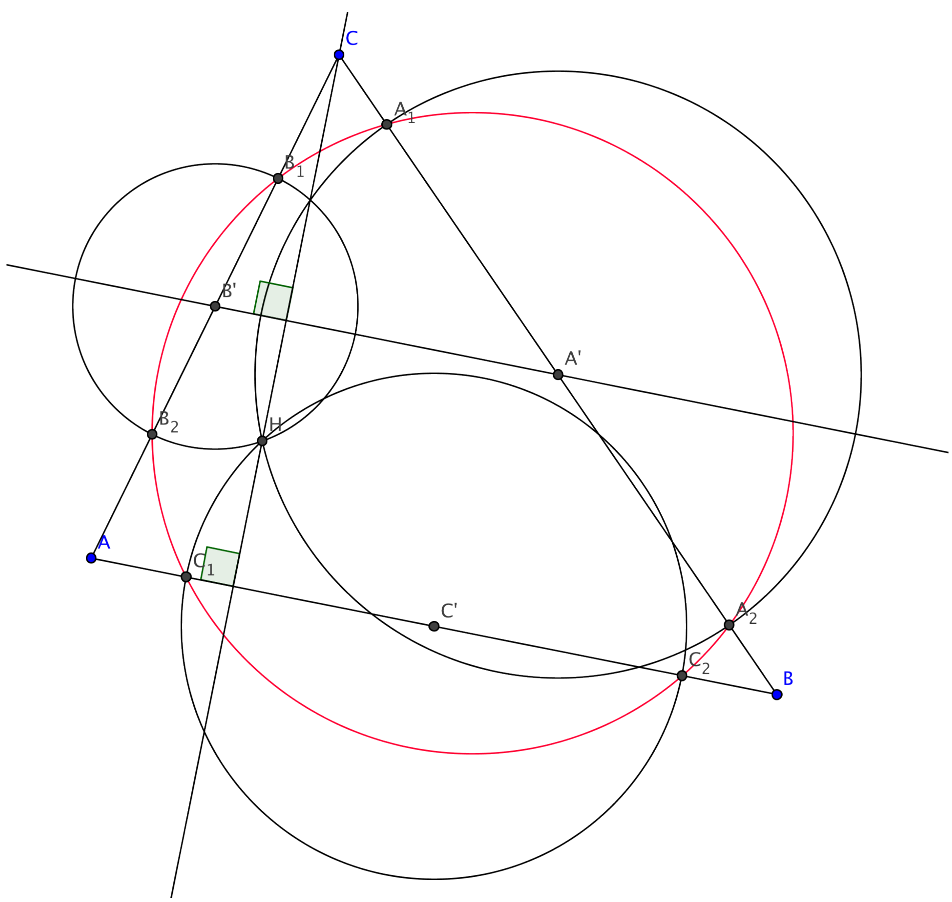
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soit ABC un triangle. On prend $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$ tels que (AA'), (BB') et (CC') soient les hauteurs du triangle ABC.



Le théorème de l'angle inscrit (dans ce cas, de l'équerre) montre que $ABA'B'$, $ACA'C'$ et $BCB'C'$ sont cocycliques, et les axes radicaux de leurs cercles circonscrits deux à deux sont les hauteurs (AA'), (BB') et (CC'), donc ces dernières sont concourantes.

Exercice 2 Soit ABC un triangle, H son orthocentre, et A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note A_1 et A_2 les points de (BC) tels que $A'A_1 = A'A_2 = A'H$. On définit de même B_1, B_2, C_1 et C_2. Montrer que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ est inscriptible.

Solution de l'exercice 2 Montrons que $A_1A_2B_1B_2$ est inscriptible. On nomme Γ_A et Γ_B les cercles de centres respectifs A' et B', et de rayons respectifs $A'H$ et $B'H$. L'axe radical de Γ_A et Γ_B est orthogonal à $(A'B')$, donc à (AB), et passe par H (car H appartient aux deux cercles) : c'est donc la hauteur issue de C. Donc $P(C, \Gamma_A) = P(C, \Gamma_B)$.

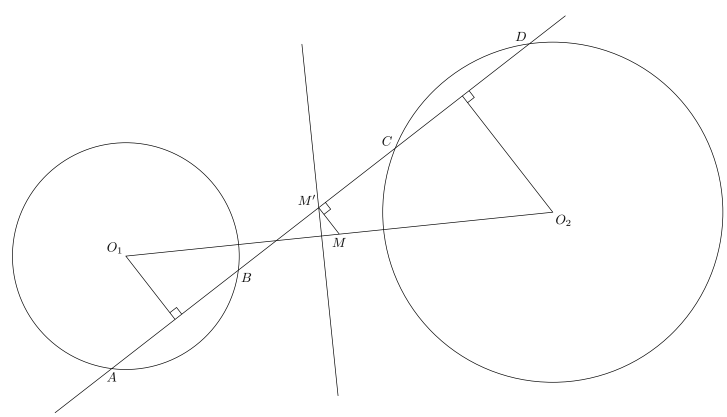


Entre autres, cela implique $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$, *i.e.* $A_1A_2B_1B_2$ inscriptible sur un cercle Γ_1. De même, on montre que $A_1A_2C_1C_2$ est inscriptible sur un cercle Γ_2, ainsi que $C_1C_2B_1B_2$ sur un cercle Γ_3. Cependant, si ces cercles n'étaient pas les mêmes, leurs axes radicaux seraient les côtés du triangle, donc ne seraient ni concourants ni parallèles, ce qui est absurde. Donc $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, et on a le résultat demandé.

Exercice 3 (Tournoi des villes) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles extérieurs l'un à l'autre. On dit qu'une droite d coupant les deux cercles est équitable si les cordes définies par d sur Γ_1 et Γ_2 ont même longueur. On note O_1 et O_2 les centres respectifs de Γ_1 et Γ_2, et M le milieu de $[O_1O_2]$. Montrer que quelles que soient a, b et c trois droites équitables quelconques, le cercle circonscrit du triangle défini par a, b et c passe par M.

Rappel : *Théorème de la droite de Simson. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, et P un point du plan. On appelle P_A, P_B et P_C les projetés orthogonaux de P respectivement sur (BC), (CA) et (AB). Alors P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si $P \in \Gamma$.*

Solution de l'exercice 3 D'après le théorème, il suffit de montrer que les projetés orthogonaux de M sur a, b et c sont alignés sur une droite Δ. Comme on peut fixer a et b (ce qui définit Δ) et faire varier c, on intuite que Δ est indépendante du choix de a, b et c. Il suffit donc de montrer qu'il existe une droite Δ telle que pour toute droite équitable d, le projeté orthogonal de M sur d appartienne à Δ. Nous allons montrer que l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 convient comme choix pour Δ. En effet, soit d une droite équitable, et M' le projeté orthogonal de M sur d. On note O_1' et O_2' les projetés orthogonaux respectifs de O_1 et O_2 sur d.



Si $[AB]$ et $[CD]$ sont les cordes définies par d respectivement sur Γ_1 et Γ_2, on a :

$$M'O_1' = M'O_2'$$
$$O_1'A = O_1'B \text{ (resp. } O_2'C = O_2'D)$$
$$AB = CD$$

De ces égalités, on conclut facilement que $M'A \cdot M'B = M'C \cdot M'D$, donc $M' \in \Delta$.

Isométries directes

On ne travaillera dans cette partie qu'avec des angles orientés. Si on n'a pas orienté deux droites a et b au préalable, l'angle (a, b) sera pris modulo $180°$, c'est-à-dire qu'on considèrera comme identiques un angle α et $\alpha + 180°$.

Composition de deux réflexions

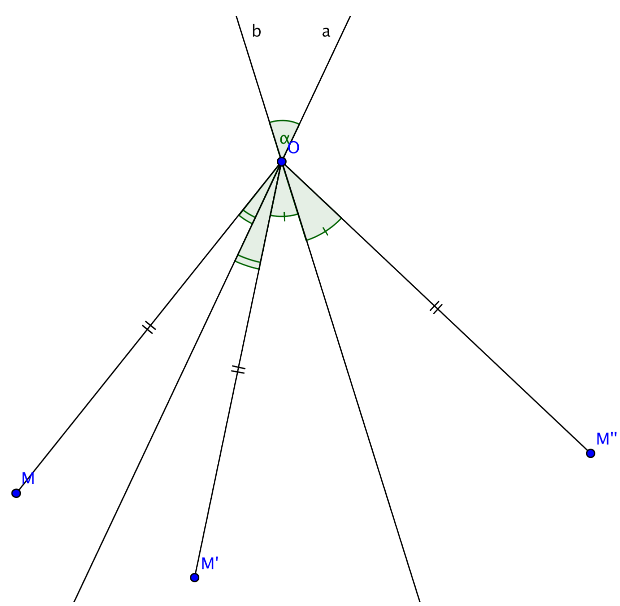
Droites sécantes Soient a et b des droites sécantes en O. On note s_a et s_b les réflexions de droites respectives a et b. On aimerait exprimer simplement la transformation r composée de s_a par s_b (on applique s_a, puis s_b). Pour cela, orientons les droites a et b, prenons un point M du plan, et notons $M' = s_a(M)$, $M'' = s_b(M')$, de telle sorte que $M'' = r(M)$. Puisque $O \in a$ et $O \in b$, on a $OM = OM' = OM''$. Notons que si $\alpha = (a, b)$ (l'angle orienté entre les droites a et b), on a pour tout point A du plan la relation de Chasles pour les angles : $(OA, b) = (OA, a) + (a, b) = (OA, a) + \alpha$. On a alors $(OM', a) = -(OM, a)$, et $(OM'', b) = -(OM', b)$. Or, $(OM', b) = (OM', a) + \alpha$, donc

$$(b, OM'') = -(OM'', b) = (OM', b) = (OM', a) + \alpha = -(OM, a) + \alpha.$$

Donc, en utilisant deux fois la relation de Chasles, on a :

$$(OM, OM'') = (OM, a) + (a, b) + (b, OM'') = (OM, a) + \alpha + (-(OM, a) + \alpha) = 2\alpha.$$

Donc M'' est l'unique point du plan qui vérifie $OM = OM''$ et $(OM, OM'') = 2\alpha$. Cela montre que r est la rotation de centre O et d'angle 2α.



Remarque 1 : Si l'orientation de a et b avait été choisie différemment, on aurait pu se retrouver avec un angle $(a, b) = \beta$ différent de α. Heureusement, on aurait alors eu $\beta = \alpha + 180°$, et donc $2\beta = 2\alpha$ (on raisonne en matière d'angles). Donc la définition de r n'est pas modifiée par le choix d'orientation de a et de b, ce dont on pouvait se douter...

Remarque 2 : En appliquant le raisonnement inverse, on peut toujours décomposer une rotation de centre O et d'angle θ en la composée de deux réflexions de droites a et b passant par O et formant un angle $\frac{\theta}{2}$ entre elles. Comme ceci est suffisant, si d est une droite fixée passant par O, on peut de plus faire en sorte que $a = d$, ou bien que $b = d$ dans la décomposition. Cela nous donne un corollaire qui sera important par la suite, pour exprimer la composée de deux réflexions : *Soit* r *une rotation de centre* O *et d'angle* θ, *et* d *une droite passant par* O. *Alors il existe deux uniques droites* a *et* b *passant par* O *telles que* r *soit la composition de* r_a *par* r_d, *et aussi la composition de* r_d *par* r_b. *Ces droites vérifient* $(a, d) = (d, b) = \frac{\theta}{2}$.

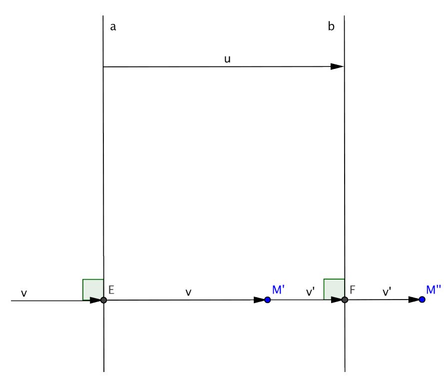
Droites parallèles Si a et b sont parallèles, on peut aussi exprimer la composée t de s_a par s_b. Soit $\overrightarrow{u}$ l'unique vecteur orthogonal à a et b tel que la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ envoie a sur b. Soit M un point du plan, $M' = s_a(M)$, et $M'' = s_b(M')$, de telle sorte que $M'' = t(M)$. On note de plus A et B les projetés orthogonaux de M respectivement sur a et b. On a alors $\overrightarrow{M'A} = -\overrightarrow{MA}$, et $\overrightarrow{M''B} = -\overrightarrow{M'B}$. Or, $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{u}$, donc

$$\overrightarrow{BM''} = -\overrightarrow{M''B} = \overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{u}.$$

Donc

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM''} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}.$$

Cela montre que t est la translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$.



Composition de deux rotations

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer « simplement » la composée r de deux rotations r_A et r_B, de centres respectifs A et B, et d'angles respectifs α et β. Notons Δ la droite (AB). Le corollaire ci-dessus montre que si a est la droite passant par A et vérifiant $(a, \Delta) = \frac{\alpha}{2}$, et b la droite passant par B et vérifiant $(\Delta, b) = \frac{\beta}{2}$, alors r_A est la composée de s_a par s_Δ, et r_B est la composée de s_Δ par s_b. La composition de r_A par r_B est donc la composée (dans cet ordre) de s_a, s_Δ, s_Δ et s_b. Or, la composée de s_Δ par s_Δ est l'identité, et donc r est la composée de s_a par s_b. C'est donc la rotation de centre C point d'intersection de a et b, et d'angle $\gamma = \alpha + \beta$.