DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Grésillon 2011

Inégalités : exercices

Exercice 1 Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs.

(a) Montrer que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(b) On suppose en outre que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

c) Toujours dans l'hypothèse où $abc = 1$, montrer que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercice 2 Soient a, b, c trois réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que :

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Exercice 3 Soient a, b, c les trois longueurs des cotés d'un triangle. Démontrer que :

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 4 Soient x, y, z trois nombres réels strictement positifs. En remarquant que si $x > 1$, $x^2 + \frac{y^2+z^2}{x^3} < x^2+y^2+z^2$, montrer que si $xyz \geqslant 1$,

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqslant 0.$$

- Correction -

Solution de l'exercice 1

a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a+b+c}{b+c}-1\right)+\left(\frac{a+b+c}{c+a}-1\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}-1\right)$. Il suffit donc de démontrer que : $(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\leqslant\frac{9}{2}$, ce qui résulte immédiatement de : $(u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\geqslant 9$ (la moyenne harmonique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique), en posant $u=b+c$, $v=c+a, w=a+b$.

b) C'est un cas particulier de l' "inégalité des mauvais élèves", étudiée ce matin. On peut utiliser l'inégalité de Tchebychev : si $a\geqslant b\geqslant c$, $b+c\leqslant c+a\leqslant a+b$, donc : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$ or $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}$ et $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}=1$

c) Il suffit de poser $a=\frac{1}{u}$, $b=\frac{1}{v}$, $c=\frac{1}{w}$, pour se ramener à la question précédente. Cette question est un problème 2 d'Olympiade Internationale (1995).

Solution de l'exercice 2 C'est aussi un problème 2 d'Olympiade Internationale (2000). Deux questions se posent : quel est le signe de chacun des facteurs ? Si le produit est négatif, il est a fortiori inférieur à 1, mais peut-on avoir deux facteurs négatifs ? Et si chaque terme est positif, il faut majorer le produit. Pour cela, posons $A=b-1+\frac{1}{c}$, $B=c-1+\frac{1}{a}$ et $C=a-1+\frac{1}{b}$. Comme, par hypothèse $abc=1$, $\frac{A}{b}=1-\frac{1}{b}+a$ et $aB=\frac{1}{b}-a+1$, donc : $\frac{A}{b}+aB=2$, et de même : $\frac{B}{c}+bC=2$ et $\frac{C}{a}+cA=2$: si deux des termes A, B et C étaient négatifs, l'une de ces trois sommes serait négative, ce qui n'est pas le cas. Dès lors, soit un (et au plus un) des termes A, B et C est négatif auquel cas le produit, négatif, vérifie trivialement l'inégalité. Soit tous trois sont positifs, et l'on a : $\frac{A}{b}\times aB=1-\left(\frac{1}{b}-a\right)^2\leqslant 1$, et de même $\frac{B}{c}\times bC\leqslant 1$, $\frac{C}{a}\times cA\leqslant 1$ d'où, en multipliant ces trois inégalités, $(ABC)^2\leqslant 1$ et comme ABC est supposé positif, $ABC\leqslant 1$. Une autre possibilité est de poser : $a=\frac{v}{w}$, $b=\frac{w}{u}$, $c=\frac{u}{v}$, avec u, v et w strictement positifs, ce qui nous ramène à une inégalité classique : $(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)\leqslant uvw$. Mais la démonstration n'est pas très différente : la somme de deux des termes $-u+v+w$, $u-v+w$, $u+v-w$ étant positive, au plus un seul peut être négatif, et s'ils sont tous trois positifs, on majore chacun des produits : $(-u+v+w)(u-v+w)=w^2-(u-v)^2\leqslant w^2$, $(u-v+w)(u+v-w)\leqslant u^2$ et $(u+v-w)(-u+v+w)\leqslant v^2$. On peut aussi se ramener à l'inégalité de Schur, vraie pour tout n entier naturel : $u^n(u-v)(u-w)+v^n(v-w)(v-u)+w^n(w-u)(w_v)\geqslant 0$, et équivalente à celle ci-dessus dans le cas $n=1$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> C'était le problème 6 de l'Olympiade Internationale de Paris (1983). La technique la plus sûre est la transformation : $a=v+w$, $b=w+u$, $c=u+v$: a, b et c sont les trois cotés d'un triangle si et seulement si u, v et w sont tous trois strictement positifs. En développant proprement (on regroupe les termes sur différentes lignes, classés par exposants) :

$$a^2b(a-b)=(v+w)^2(w+u)(v-u)=\left(v^2+2vw+w^2\right)\left(vw+uv-wu-u^2\right)$$

$$=v^3w+uv^3+vw^3-w^3u$$

$$-wuv^2+2uv^2w-2uvw^2-2u^2w+uvw^2$$

$$-u^2v^2+2v^2w^2-w^2u^2$$

$$=\left(v^3w-w^3u+uv^3+vw^3\right)+uvw\,(v-w-2u)+\left(-u^2v^2+2v^2w^2-w^2u^2\right)$$

Les autres termes $b^2c(b-c)$ et $c^2a(c-a)$ s'obtiennent sans refaire le calcul, par permutation circulaire sur u, v, w. La somme vaut donc : $2\left(uv^3+vw^3+wu^3\right)-2uvw(u+v+w)$ et prouver que cette somme est positive ou nulle revient à démontrer, après simplification par uvw :

$$\frac{v^2}{w}+\frac{w^2}{u}+\frac{u^2}{v}\geqslant u+v+w$$

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité du réordonnement : si $u^2\geqslant v^2\geqslant w^2$, $\frac{1}{u}\leqslant\frac{1}{v}\leqslant\frac{1}{w}$ donc $\frac{u^2}{u}+\frac{v^2}{v}+\frac{w^2}{w}\leqslant\frac{u^2}{v}+\frac{v^2}{w}+\frac{w^2}{u}$, et si $u^2\geqslant w^2\geqslant v^2$ (ce cas n'est pas identique au précédent), $\frac{1}{u}\leqslant\frac{1}{w}\leqslant\frac{1}{v}$ donc $\frac{u^2}{u}+\frac{w^2}{w}+\frac{v^2}{v}\leqslant\frac{u^2}{v}+\frac{w^2}{u}+\frac{v^2}{w}$.

D'après l'inégalité du réordonnement, le seul cas d'égalité (qui n'était pas demandé aux Olympiades Internationales) est $u=v=w$, donc $a=b=c$ (triangle équilatéral).

On remarquera enfin que, si a, b, c ne sont pas les longueurs des côtés d'un triangle, il se peut que l'inégalité soit quand même vérifiée, par exemple pour le triplet $(1,6,4)$, mais il y a des valeurs pour lesquelles elle n'est pas vérifiée, par exemple le triplet $(1,4,6)$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> La relation signalée, évidente, suggère la solution particulièrement élégante proposée par Iurie Boreico et primée par un prix spécial du jury au cours de l'Olympiade Internationale 2005. Dans tous les cas,

$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geqslant \frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{y^2+z^2}{x^3}} \geqslant \frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}$ car si $x \geqslant 1$, le dénominateur $x^2 + \frac{y^2+z^2}{x^3} \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ et le numérateur $x^2 - \frac{1}{x} \geqslant 0$, alors que si $x \leqslant 1$, $x^2 + \frac{y^2+z^2}{x^3} \geqslant x^2 + y^2 + z^2$ mais $x^2 - \frac{1}{x} \leqslant 0$. La somme cherchée est donc majorée par : $\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}{x^2+y^2+z^2}$, or comme $xyz \geqslant 1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant yz + zx + xy \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ (car $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 \geqslant 0$). Mais il existe d'autres manières de casser l'asymétrie des dénominateurs. Notamment l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\left(x^5 + y^2 + z^2)\right) \left(\frac{1}{x} + y^2 + z^2\right) \leqslant \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$ suffit à démontrer que $A \leqslant B$ en posant : $A = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}$ et $B = \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2}$. Or on cherche à prouver que $3 - A \geqslant 0$ et, dans B, on majore le $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ comme précédemment.