DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Louis NEBOUT
STAGE : Montpellier 2013

Inversions

Le but de cette séance est de vous présenter une transformation géométrique très puissante, et potentiellement utile pour la résolution de problèmes olympiques : l'inversion.

Dans toute cette partie, tous les angles sont orientés et considérés modulo 2π.

- Inversion : définition et action sur les angles -

Soit $\mathcal{E}$ le plan euclidien usuel.

Définition 1. Soit O un point du plan $\mathcal{E}$, et p un réel non nul. On appelle *inversion* de *pôle* O et de *puissance* p la transformation de $\mathcal{E}\backslash\{O\}$ dans lui-même envoyant le point M sur le point M' de (OM) tel que $\overline{OM'} \cdot \overline{OM} = p$. (Autrement dit, M' est le point de (OM) tel que $\overrightarrow{OM'} = \frac{p}{OM^2}\overrightarrow{OM}$). Nous la noterons $I_{O,p}$.

Remarques 2.
– Clairement, $I_{O,p}(I_{O,p}(M)) = M$: l'inversion est une involution. En particulier, elle est bijective.
– Soit r la racine carrée de $|p|$. Notons $\mathcal{C}_{O,r}$ le cercle de centre O et de rayon r. Alors $I_{O,p}$ échange intérieur et extérieur de $\mathcal{C}_{O,r}$, agit comme la symétrie de centre O sur $\mathcal{C}_{O,r}$ si p est négatif, et stabilise $\mathcal{C}_{O,r}$ si p est positif. On appelle souvent I_{O,r^2} l'inversion de cercle $\mathcal{C}_{O,r}$.
– Soit P un point non fixé par $I_{O,p}$. Alors la puissance de O par rapport à un cercle passant par P et P' est p, la puissance de l'inversion considérée.

Proposition 3. Soient P et Q dans $\mathcal{E}\backslash\{O\}$, et P' et Q' leurs images par $I_{O,p}$. Alors OPQ et $OQ'P'$ sont inversement semblables.

Démonstration. Clairement, $\widehat{POQ} = \widehat{P'OQ'}$. De plus, $\frac{OP}{OQ'} = \frac{|p|}{OP'} \cdot \frac{OQ}{|p|} = \frac{OQ}{OP'}$. $\square$

Remarques 4. On en déduit deux propriétés importantes :

– une formule bien pratique sur l'effet de l'inversion sur les distances :

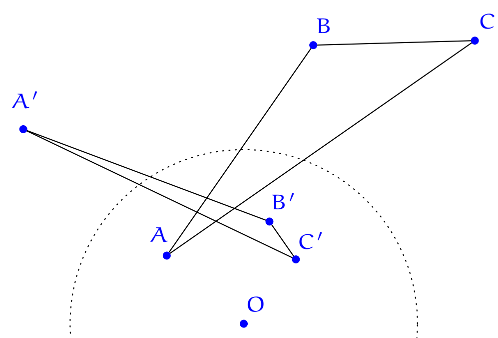
$$P'Q' = \frac{OQ'}{OP} \cdot PQ = \frac{|p|}{OP \cdot OQ} \cdot PQ,$$

– l'effet de l'inversion sur les angles issus du pôle : $\widehat{OPQ} = -\widehat{OQ'P'}$. En particulier, P, P', Q et Q' sont cocycliques.

Cela nous permet de déduire l'effet d'une inversion sur des angles plus généraux :

Proposition 5. Soient A, B et C des points distincts du pôle. On a alors $\widehat{ABC} = \widehat{C'B'A'} + \widehat{A'OC'}$.

Démonstration.



On a

$$\begin{aligned}
\widehat{ABC} &= \widehat{ABO} + \widehat{OBC} \\
&= \widehat{OA'B'} + \widehat{B'C'O} \\
&= 2\pi + \widehat{A'OB'} + \widehat{OB'A'} + \widehat{C'B'O} + \widehat{B'OC'} \\
&= \widehat{C'B'A'} + \widehat{A'OC'}.
\end{aligned}$$

□

Que se passe-t-il si A et C sont très proches de B ? Et bien, par continuité de l'inversion l'angle $\widehat{A'OC'}$ est très petit, et donc $\widehat{C'B'A'}$ est très proche de $\widehat{ABC}$. On dit que l'inversion renverse localement les angles. Voici un autre point de vue : considérons deux courbes suffisamment régulières s'intersectant en B. On les paramètre par deux fonctions ϕ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$ valant B en 0. Quand t est très petit, l'angle $\widehat{\phi(t)B\psi(t)}$ tend vers l'angle entre les tangentes en B des deux courbes, qui par définition est l'angle entre les deux courbes. De même, l'angle $\widehat{\phi(t)'B'\psi(t)'}$ tend vers l'angle entre les images de nos deux courbes par l'inversion. Enfin, l'angle $\widehat{\phi(t)'O\psi(t)'}$ tend vers 0. Nous avons montré que l'inversion inverse les angles entre courbes. Par exemple, les images de deux droites orthogonales par notre inversion seront deux courbes orthogonales.

- Images des droites et des cercles -

Cette section est justement dédiée à l'étude de l'image de certaines courbes par une inversion.

Proposition 6. L'inversion $I_{O,p}$ laisse globalement stable toute droite passant par O.

Proposition 7. L'inversion $I_{O,p}$ envoi un cercle ne passant pas par O sur un autre cercle ne passant pas par O.

Démonstration. On pourrait raisonner en regardant l'effet de l'inversion sur le théorème de l'angle inscrit, mais je préfère donner une preuve inspirée des remarques suivantes :

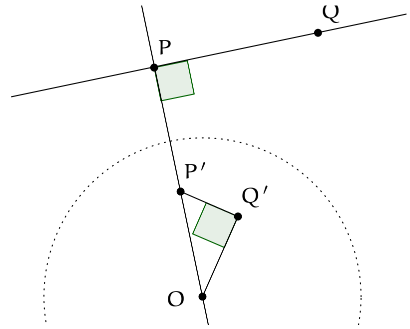
– L'inversion $I_{O,p}$ laisse globalement invariant tout cercle tel que O ait pour puissance p par rapport à ce cercle.
– Notons $h_{O,\lambda}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ. Alors $h_{O,\lambda} \circ I_{O,p} = I_{O,\lambda p}$.

Considérons donc $\mathcal{C}$ un cercle ne passant pas par O. Notons p' la puissance de O par rapport à ce cercle (qui est non nulle). Alors $I_{O,p}(\mathcal{C}) = h_{O,\frac{p}{p'}} \circ I_{O,p'}(\mathcal{C})$ donc $I_{O,p}(\mathcal{C}) = h_{O,\frac{p}{p'}}(\mathcal{C})$ qui est de toute évidence un cercle ne passant pas par O. □

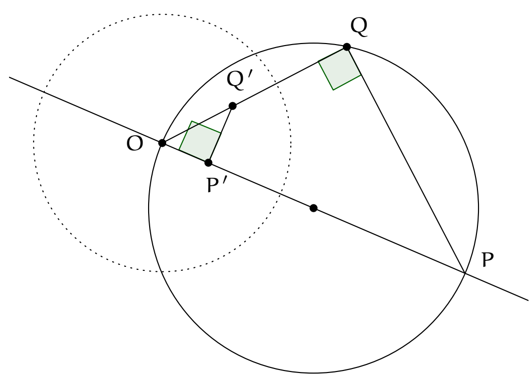
Notons que, par symétrie du problème par rapport à la droite reliant pôle et centre du cercle, le centre du cercle de départ, le centre de son image et le pôle sont alignés, un fait souvent bien utile. Autre fait utile que l'on pourrait déduire de cette preuve : si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles et O un point, il existe une inversion centrée en O envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ si et seulement s'il existe une homothétie centrée en O envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

Proposition 8. L'inversion $I_{O,p}$ envoie une droite ne passant pas par O sur un cercle passant par O et envoie un cercle passant par O sur une droite ne passant pas par O.

Démonstration. Soit D une droite ne passant pas par O. Soit P le projété orthogonal de O sur D. Soit Q sur D. L'angle $\widehat{OPQ}$ est droit, donc l'angle $\widehat{OQ'P'}$ est droit, donc Q' appartient au cercle de diamètre OP'.



Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O, P le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé á O. Soit Q sur $\mathcal{C}$. L'angle $\widehat{OQP}$ est droit, donc l'angle $\widehat{OP'Q'}$ est droit, donc Q' est sur la droite orthogonale à OP' passant par P'.



$\square$

Voici une autre façon de formuler ces résultats. Rajoutons au plan un point à l'infini, que nous appelons ∞. Étendons l'inversion $I_{O,p}$ en une application de $\mathcal{E} \cup \{\infty\}$ dans lui-même, en décretant que le pôle est envoyé à l'infini et que le point à l'infini est envoyé sur le pôle. La nouvelle inversion est elle aussi involutive. Disons enfin que, par convention, les droites sont les cercles passant par le point à l'infini. Alors les résultats de cette partie disent simplement que l'inversion envoie cercles sur cercles.

- L'inversion en pratique -

Maintenant, nous allons voir comment se servir de l'inversion pour résoudre des problèmes de type olympique. L'idée de base est la suivante :

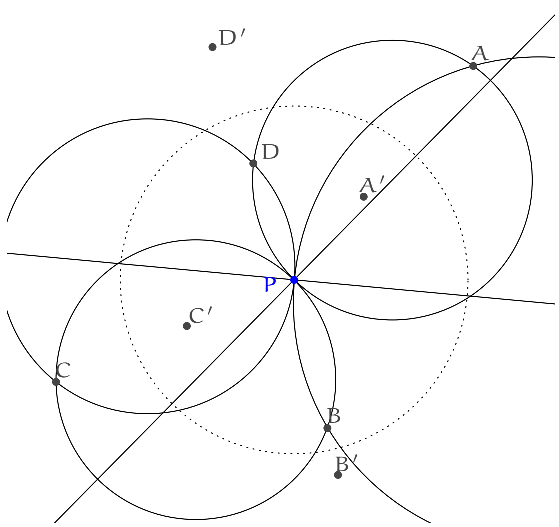
choisir une inversion, puis à l'aide des propriétés des inversions traduire les propriétés de la figure de départ en propriétés de la figure inversée. Si l'inversion est judicieuse, la figure inversée sera facile à étudier, on démontre donc des résultats sur cette figure inversée, puis on applique à nouveau l'inversion pour voir ce que ces résultats nous disent sur la figure de départ. Le point important est bien sûr le choix de l'inversion.

Une des forces de cette technique est qu'elle permet de se débarasser des cercles (en inversant par rapport à un des points du cercle), ce qui permet par exemple de transformer des problémes pénibles de tangences ou d'orthogonalité de cercles en des problèmes plus simples faisant intervenir des droites.

Exercice 1 Soit P un point, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ quatre cercles tels que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ soient extérieurement tangents en P, et que $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ soient extérieurement tangents en P. Supposons que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ s'intersectent en des points A, B, C et D distincts de P. Prouver que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Appliquons une inversion de centre P et de puissance p quelconque. Cette inversion transforme $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ en quatre droites D_1, D_2, D_3 et D_4 passant par P, telles que D_1 et D_3 soient parallèles, et D_2 et D_4 soient parallèles (en effet P, l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, est envoyé à l'infini par l'inversion).



Ainsi, A', B', C' et D' sont les sommets d'un parallélogramme, donc $A'B' = C'D'$ et $B'C' = D'A'$.

Utilisons la formule sur les distances pour revenir aux distances de départ, on obtient

$$\frac{AB}{PA \cdot PB} = \frac{CD}{PC \cdot PD}, \qquad \frac{BC}{PB \cdot PC} = \frac{DA}{PD \cdot PA},$$

d'où le résultat recherché.

Une autre force de l'inversion est la relation $\widehat{OPQ} = -\widehat{OQ'P'}$, qui permet de changer le sommet d'un angle, et permet de simplifier grandement certaines relations faisant intervenir des sommes d'angles. Cette astuce permet notamment de trivialiser les exercices 2 des olympiades 1993 et 1996.

Exercice 2 Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 90°$. Montrer que

$$AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BD^2.$$

Solution de l'exercice 2 Appliquons une inversion de centre D et de puissance p quelconque. Alors

$$\begin{aligned} 90° &= \widehat{DAB} + \widehat{BCD} \\ &= \widehat{A'B'D} + \widehat{DB'C'} \\ &= \widehat{A'B'C'}. \end{aligned}$$

On en déduit que $A'B'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$, donc que

$$\frac{p^2}{DA^2 \cdot DB^2} \cdot AB^2 + \frac{p^2}{DB^2 \cdot DC^2} \cdot BC^2 = \frac{p^2}{DA^2 \cdot DC^2} \cdot AC^2,$$

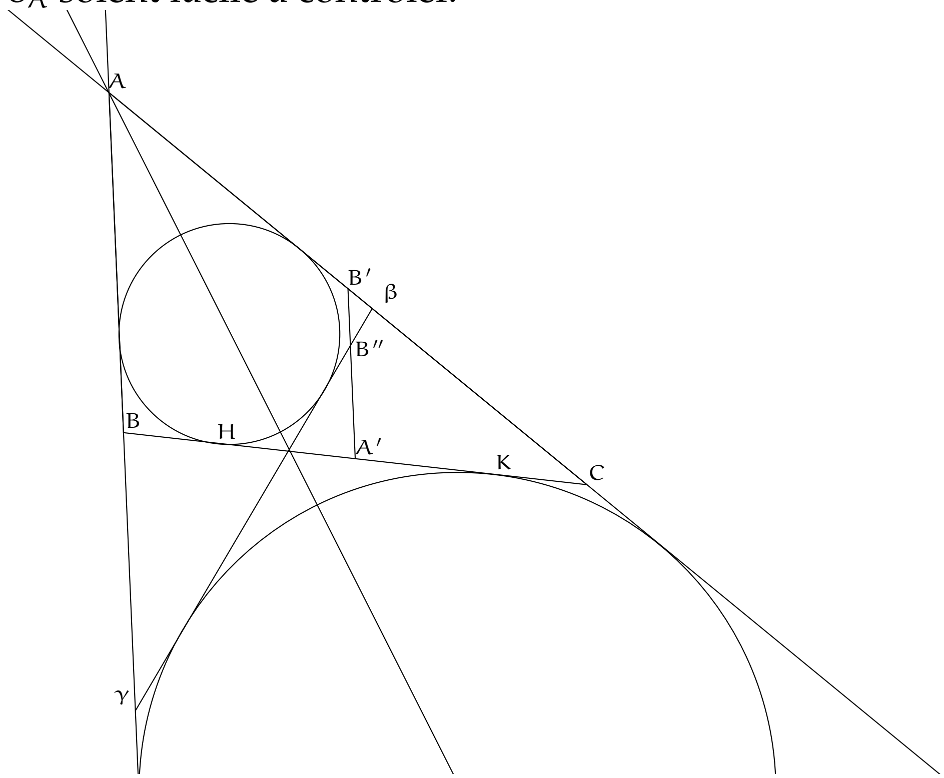
ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 9. Je n'ai pas donné cet exo pendant la séance, traitant à la place l'exo 2 des OIM 1996, pas bien plus difficile. En effet je me suis rendu compte juste avant la séance que mon exercice était un cas particulier de l'exercice 98 de la muraille, et que cette preuve résolvait aussi l'exercice : l'égalité demandée est juste l'inversée de la formule d'Al-Kashi appliquée à $A'B'C'$. Je la laisse donc l'exercice ici comme preuve alternative de cet exo.

Dans ces deux exemples, nous avons considéré la figure de base et son inversée indépendamment. Les cas plus compliqués obligent souvent à étudier les deux figures en même temps. il faut alors faire attention au choix de la puissance, afin que les deux figures se superposent agréablement.

Exercice 3 Prouver le théorème de Feuerbach, qui dit que le cercle d'Euler d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.

Solution de l'exercice 3 Fixons quelques notations. Appelons ABC notre triangle, a, b et c les longueurs de ses côtés, p son demi-périmètre, A', B' et C' les milieux de ses côtés, $\mathcal{C}$ son cercle inscrit, et $\mathcal{C}_A$ le cercle exinscrit opposé au sommet A. Par symétrie, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_A$ sont tangents au cercle d'Euler. Une idée est d'inverser par rapport à un point du cercle d'Euler, probablement A' : montrer qu'une droite est tangente à deux cercles semble plus simple que le problème d'origine. Le problème, c'est qu'une inversion complique le reste de la figure : AB et BC deviennent par exemple des cercles. Ce n'est pas très grave : ce qui est important, c'est que les images des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_A$ soient facile à contrôler.



Regardons donc la puissance de A' par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_A$. Appelons H et K les points de tangence de ces cercles avec BC. Déjà, si $c = b$, la figure est symétrique par rapport à la bissectrice intérieure du sommet A, et il est clair que $A' = H = K$, le théorème est donc vrai. Supposons maintenant que $b > c$. Il est bien connu que $CH = p - c$ et $BK = p - b$, et donc $A'H = A'K = \frac{b-c}{2}$. La puissance de A' par rapport aux deux cercles est donc $(\frac{b-c}{2})^2$, et l'inversion $I_{A',(\frac{b-c}{2})^2}$ les stabilise donc !

Il faut maintenant montrer que cette inversion envoie le cercle d'Euler sur une droite tangente aux deux cercles. Il n'y a pas le choix, il faut que cette droite soit le symétrique de BC par rapport à la bissectrice intérieure du sommet A. Introduisons donc β et γ les symétriques de B et C par rapport à cette bissectrice, et montrons que B' est envoyé par l'inversion sur un point de $\beta\gamma$. Appelons B'' l'intersection de $\beta\gamma$ avec $A'B'$. Par théorème de Thalès, on obtient $A'B' = \frac{c}{2}$,

$$B'B'' = A\gamma \cdot \frac{B'\beta}{A\beta} = b \cdot \frac{c - \frac{b}{2}}{c} = b - \frac{b^2}{2c},$$

puis $A'B'' \cdot A'B' = (A'B' - B'B'') \cdot A'B' = (\frac{b-c}{2})^2$. Ainsi, B'' est bien l'image de B' par notre inversion. Par des calculs similaires, C' est envoyé sur l'intersection C'' de $A'C'$ et de $\beta\gamma$. Ainsi, l'image du cercle d'Euler est une droite passant par deux points de $\beta\gamma$, c'est donc $\beta\gamma$, ce qui termine.

Pourquoi cette preuve marche-t'elle ? Car notre centre d'inversion, A', était sur le cercle clé du problème, mais aussi sur l'axe radical des deux autres cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_A$, ce qui nous a permit de conserver ces cercles. C'est une idée à retenir : les axes radicaux sont des candidats particulìerement intéressant pour des centres d'inversion.

Exercice 4 Soient A, B, C, D et E cinq points du plan en position générale (c'est-à-dire tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés, et tels que quatre d'entre eux ne soient jamais cocycliques). On appelle séparateur un cercle passant par trois de ces points, tel qu'un des deux points restant soit situé à l'intérieur du cercle, et l'autre à l'extérieur. Combien y-a-t'il de séparateurs ?

Solution de l'exercice 4 On se rend vite compte que, si l'on essaie de traiter le problème naïvement, on va rapidement se retrouver avec des études de cas parfaitement sordides. On s'arrête donc une minute pour réfléchir à comment simplifier cette étude de cas au maximum. Pour cela, on aimererait bien se débarasser du plus grand nombre de cercles possibles, ce qui incite à inverser à travers un de nos points, disons A. Un autre façon de dire la même chose est de dire que ces questions de séparation seront plus simple avec un point à l'infini, car il sera toujours clair si ce point est séparé ou non des autres.

Dans toute la suite, j'appelerai ABC le cercle passant par les trois points A, B et C, et de même pour les autres cercles. Regardons donc l'effet de notre inversion sur les séparateurs. On vérifie que l'inversion envoie un séparateur passant par A, disons ABC, sur une droite $B'C'$ séparant D' et E' : le segment DE, qui coupe ABC en exactement un point (distinct de A), est envoyé sur un arc de cercle coupant la droite $B'C'$ en exactement un point. Réciproquement, on vérifie de la même façon qu'une telle droite est renvoyée sur un séparateur.

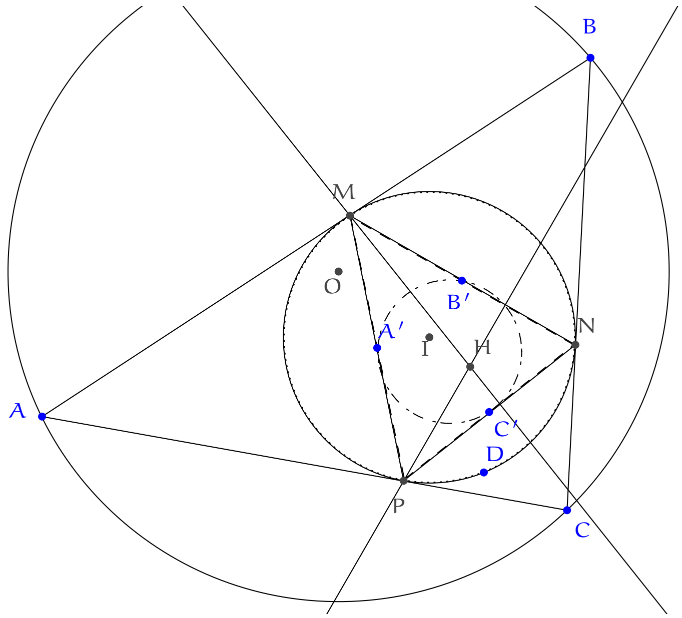
Le deuxième cas est celui des séparateurs ne passant pas par A. Supposons donc que BCD sépare A et E. Le segment AE coupe BCD en exactement un point (distint de A), donc l'image du segment, qui est une demi-droite issue de E, coupe le cercle $B'C'D'$ en exactement un point : E' est donc à l'intérieur de ce cercle (et ce, que E soit intérieur ou extérieur à BCD). Réciproquement, si $B'C'D'$ contient E', on vérifie de même que BCD est un séparateur.

On s'est donc ramené au problème suivant : on considère quatre points du plan en position générale, on cherche à compter le nombre de droites séparant deux de ces points, ainsi que le nombre de cercles passant par 3 points contenant le 4-ième. Il y a deux cas à traiter. Cas 1 : si un des points, disons D, est à l'intérieur du triangle ABC, alors il y a trois telles droites, AD, BD et CD, et un tel cercle, ABC (c'est le seul par un argument d'angle). Cas 2 : si les points sont les sommets d'un quadrilatère convexe. Alors il y a deux droites qui conviennent, les diagonales, et deux cercles : il y a forcément deux sommets, disons A' et C', tels que la somme des angles en ces deux sommets soit supérieure stricte à $180°$ (car les points sont non cocycliques), et par un argument d'angle les seuls cercles fonctionnant sont $A'B'D'$ et $C'B'D'$.

Bonus ! Un exercice non fait en cours, mais déjà tapé avant la séance, donc je le laisse ici.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, M, N et P les points de tangence du cercle inscrit avec les segments AB, BC et CA. Montrer que le centre du cercle circonscrit de ABC, le centre du cercle inscrit de ABC, et l'orthocentre de MNP sont alignés.

Solution de l'exercice 5



Soit I et O les centres des cercle inscrit, et circonscrits à ABC. On remarque que $IPAM$, $IMBN$ et $INCP$ sont cocycliques, ce qui incite à se demander l'effet d'une inversion de cercle le cercle inscrit à ABC. Elle stabilise M, N et P et envoie A sur un point A' de la droite PM, et de plus IA est orthogonal au cercle passant par $IPAM$ (c'est un diamètre), donc IA' doit être orthogonal à l'image du cercle par l'inversion : la droite PM. Ainsi, comme $IM = IP$, A' est le milieu de PM, et $A'B'C'$ est le triangle des milieux de de PMN. Ce type de configuration sert souvent, et est à retenir, pour pouvoir les repérer rapidement.

Le cercle circonscrit à ABC est donc envoyé sur le cercle d'Euler de MNP. Or on a dit dans le cours que si une inversion envoie un cercle sur un autre, les centres de ces deux cercles sont aligés avec le pôle de l'inversion. Ainsi, O est sur la droite reliant I (le centre du cercle circonscrit à MNP) avec le centre du cercle d'Euler de MNP. Il est bien connu que cette droite est le droite d'Euler de MNP, qui contient en particulier l'orthocentre de MNP, ce qui conclut la preuve.

- Complément : inversion et géométrie projective complexe -

Cette partie n'a aucun intérêt pour la résolution de problèmes olympiques, et peut confortablement être sautée. Elle est destinée aux élèves connaissant un peu de géométrie projective complexe, qui ont certainement remarqué les nombreuses points communs entre inversions et transformations projectives, et aimeraient savoir de quoi il retourne.

Les transformations projectives de la droite complexe sont les homographies, et admettent une écriture de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Comment s'écrit une inversion en complexe ? On voit facilement que l'inversion $I_{O,p}$ admet l'écriture

$$z \mapsto o + \frac{p}{\bar{z} - \bar{o}} = \frac{o\bar{z} + p - o\bar{o}}{\bar{z} - \bar{o}},$$

où o désigne l'affixe du pôle O. Ainsi, une inversion est « presque » une homographie, plus précisément c'est la composition d'une homographie et de la symétrie axiale $z \mapsto \bar{z}$.

Ainsi, une inversion est, à peu de choses près, un cas particulier de transformation projective, et n'a donc que peu d'intérêt sur le plan théorique. Elle a par contre un réel intérêt pratique : l'inversion a été construite de façon à vérifier des propriétés géométriques agréables que n'ont pas les transformations projectives générales, et elles méritent donc d'être étudiées à part. Je pense en particulier à la dualité cercles passant par le pôle, droites ne passant pas par le pôle (qui est une propriété des involutions), fort confortable.

Les inversions sont tout de même des transformations très riches, on pourrait notamment montrer que toute transformation projective (et même toute transformation de $\mathcal{E} \cup \{\infty\}$ envoyant cercles sur cercles) s'écrit comme produit de réflexions et d'inversions. Ainsi, les inversions sont suffisamment riches pour récupérer toute la géométrie projective.