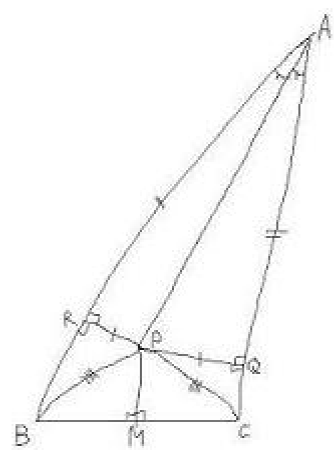
DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Louis NEBOUT
STAGE : Montpellier 2013

# Géométrie

**Théorème 1.** Tout triangle est isocèle.

*Démonstration.* Soit $ABC$ un triangle, supposons par l'absurde qu'il soit non isocèle en $A$. On trace une magnifique figure, sur laquelle $P$ est l'intersection de la bissectrice du sommet $A$ et la médiatrice de $BC$. Soit $Q$ et $R$ les projetés orthogonaux de $P$ sur $AC$ et $AB$ (c'est-à-dire, $Q$ est l'intersection de $AC$ et de la perpendiculaire à $AC$ issue de $P$).



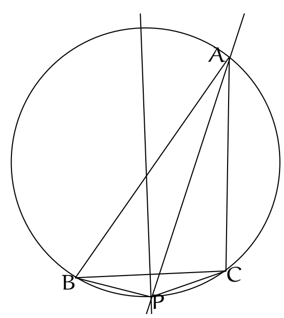

Les triangles $APR$ et $APQ$ ont deux angles communs, donc sont semblables. Comme ils ont $AP$ en commun, ils sont même isométriques, donc $AP = AQ$ et $PR = PQ$. Le point $P$ est sur la médiatrice de $BC$, donc $PC = PC$, puis par théorème de Pythagore, $RB^2 = PB^2 - PR^2 = PC^2 - PQ^2 = QC^2$. Finalement, $AB = AR + RB = AQ + QC = AC$, dont $ABC$ est isocèle en $A$, c'est absurde. Donc $ABC$ est isocèle en $A$. $\square$

Cette théorème est bien entendu totalement faux. Donc la preuve est fausse. Mais ou est l'erreur ? Elle est subtile : elle est dans la dernière ligne, quand on a écrit $AB = AR+RB$ et son symétrique. Sur notre immonde figure à main levée, il semblait que $P$ était à l'intérieur du triangle, et du coup $R$ était sur le segment $AB$. Cela n'a aucune raison d'être vrai si $P$ est a l'extérieur du triangle : le point $B$ peut être situé entre $A$ et $R$, et alors la relation correcte est $AB + BR = AR$. De fait, on a même prouvé, par notre raisonnement, que l'un des points $P$ et $Q$ est en dehors du triangle.

Moralité : ne JAMAIS faire de géométrie sur des mauvaises figures. Il est trop facile de dire des choses fausses, et au contraire on pourrait rater des informations qui seraient visibles sur une meilleure figure (ou, idéalement, plusieurs figures), un alignement par exemple.

**Exercice 1** Soit $ABC$ non isocèle en $A$. Alors la bissectrice du sommet $A$ et la médiatrice de $BC$ s'intersectent en un point que nous nommerons $P$. Où est-il ?

*Solution de l'exercice 1*




On trace plusieurs magnifiques figures, qui nous permettent de conjecturer que $P$ est sur le cercle circonscrit à $ABC$, reste à le montrer, mais on ne sait pas trop comment partir. Que faut-il montrer ? Que trois objets, les deux droites et le cercle, s'intersectent. Pour cela, il suffit de montrer que l'intersection de deux de ces objets appartient au troisième. Appelons donc $P'$ l'intersection du cercle avec la bissectrice (autre que $A$), et montrons qu'il est sur la médiatrice, c'est-à-dire que $P'B = P'C$. L'intérêt de regader $P'$ au lieu de $P$, c'est que l'on dispose ainsi de beaucoup plus d'information sur les angles. Ainsi, par angle inscrit et définition de la bissectrice, $\widehat{P'BC} = \widehat{P'AC} = \widehat{BAP'} = \widehat{BCP'}$. Donc $BCP'$ est isocèle, et on a fini.

**Exercice 2** Soit $ABC$ un triangle. En utilisant le théorème de Céva, montrer que les médiantes sont concourantes, que les hauteur sont concourantes, puis que les bissectrices intérieures sont concourantes.

*Solution de l'exercice 2* Notons $a$, $b$ et $c$ les longueurs des segments $BC$, $CA$, $AB$, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles correspondant aux trois sommets.

– Soit M le milieu de BC. Alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -1$, et de même pour les autres côtés, et le théorème de Céva conclut.
– Pour la hauteur, il faut commencer par traiter à part le cas du triangle rectangle. Ensuite, soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors BH vaut $c \cdot \sin(\widehat{B})$ (ou $AH \cdot \tan(\widehat{B})$). Ainsi,

$$\frac{HB}{HC} = \frac{c \cdot \sin(\widehat{B})}{b \cdot \sin(\widehat{C})} = \frac{\tan(\widehat{B})}{\tan(\widehat{C})}.$$

Examinons maintenant le signe de $\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}}$ : c'est + si H est sur [BC] et − sinon, et on vérifie que le nombre de pieds de hauteur non situés sur leur segment de triangle vaut 0 (triangle aigu) ou 2 (triangle obtus). Dans tous les cas, le produit intervenant dans le théorème de Céva vaut $-1$.
– Soit I l'intersection de la bissectrice interne du sommet A avec BC. On applique la loi des sinus dans AIB et AIC :

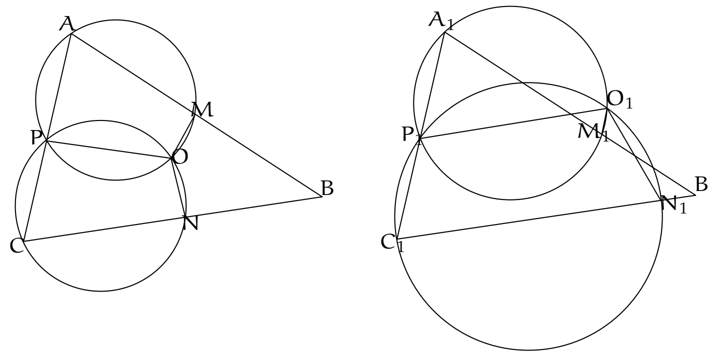
$$IB = \frac{AI \cdot \sin(\widehat{A}/2)}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c \cdot \sin(\widehat{A}/2)}{\sin(\widehat{AIB})}.$$

Or, $\sin(\widehat{AIB}) = \sin(\widehat{AIC})$ (les angles sont supplémentaires). Finalement, $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\sin(\widehat{B})}{\sin(\widehat{C})} = \frac{c}{b}$. Ces relations sont importantes et à retenir. Elles permettent de conclure avec le théorème de Céva.

J'ai ensuite montré que G, H et O sont alignés, et que $GH = 2GO$, en introduisant l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$, et le triangle dont ABC est le triangle de milieux. C'est fait dans un des autres TD, qui montre de plus des propriétés du cercle d'Euler, je vous conseille vivement de le lire.

**Exercice 3** Soit ABC un triangle, soient M, N et P des points respectivement sur les côtés AB, BC et CA du triangle. Montrer que les cercles circonscrits au trois triangles PAM, MBN et NCP sont concourants.

*Solution de l'exercice 3* On doit montrer que trois objets sont concourants, et pour cela la méthode est toujours le même : on introduit un point O appartenant à deux des cercles, disons PAM et MBN, et on cherche à montrer qu'il est sur le troisième. On dispose de plein de cercles, ce qui permet d'utiliser le théorème de l'angle inscrit. On l'applique dans APM : $\widehat{MAP} = 180° - \widehat{POM}$, puis dans CNP : $\widehat{PCN} = 180° - \widehat{NOP}$. Finalement, $\widehat{NOM} = 360° - \widehat{POM} - \widehat{NOP} = \widehat{MAP} + \widehat{PCN} = 180° - \widehat{MBN}$ car la somme des angles de ABC fait 180°. La réciproque du théorème de l'angle inscrit dit que ONBM sont cocycliques, ce qui conclut.



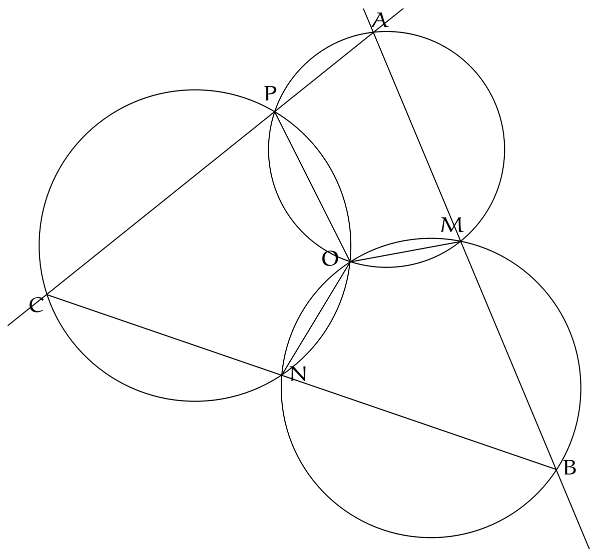

Attention ! Cette preuve ne suffit pas ! Nous avons traité le cas de la figure de gauche : le cas où O est à l'intérieur de $ABC$. Ce n'est pas le seul cas, regardons par exemple la deuxième figure. Le point $O_1$ est situé du même côté que $A$ par rapport à la corde $P_1M_1$. Ainsi, les angles $\widehat{M_1 0_1} P_1$ et $\widehat{M_1 A_1} P_1$ ne sont plus supplémentaires, mais égaux. Il faudrait refaire le raisonnement à part pour traiter ce cas (plus d'autres cas dégénérés, par exemple si O est confondu avec $M_1$, alors l'angle $\widehat{M_1 0_1} P_1$ n'est plus défini). Je laisse ces cas manquants en exercice.

On remarque que les preuves des cas non dégénérés ne ressemblent beaucoup. Ce n'est pas un hasard, et tout devient clair quand on introduit la notion d'angle de droites. Soient $D_1$ et $D_2$ deux droites. Comment définit un angle entre elles ? On pourrait donner un nom aux points, par exemple $B$ l'intersection de $D_1$ et $D_2$, $A$ un point différent de $B$ sur $D_1$, $C$ un point différent de $B$ sur $D_2$, et dire que l'angle entre les droites est l'angle $\widehat{ABC}$, mais cela ne marche pas : le choix de $ABC$ n'est pas canonique, et un autre choix de ces points aurait donné une autre valeur. Par exemple, si on appelle $A'$ le symétrique de $A$ par rapport à $B$, alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'BC}$ ne sont pas égaux, mais supplémentaires. Une solution est de décréter que l'angle entre $D_1$ et $D_2$ est l'ensemble $\{\widehat{ABC}, \widehat{A'BC}\}$. Avec cette définition, le théorème de l'angle inscrit dit que, $ABCD$ est inscriptible si et seulement si l'angle de droites entre $(AC)$ et $(AD)$ est égal à l'angle de droites entre $(BC)$ et $(BD)$, et ce quel que soit la position relative de $A$ et $B$ par rapport à la corde $CD$. Cette version du théorème permettrait de traiter à la fois tous les cas non dégénérés de l'exercice.

La même subtilité est présente dans les deux exercices suivants : pour être complet, il faudrait traiter plusieurs cas, ou bien raisonner en termes d'angles de droites. Je ne le ferai pas dans ce cours.

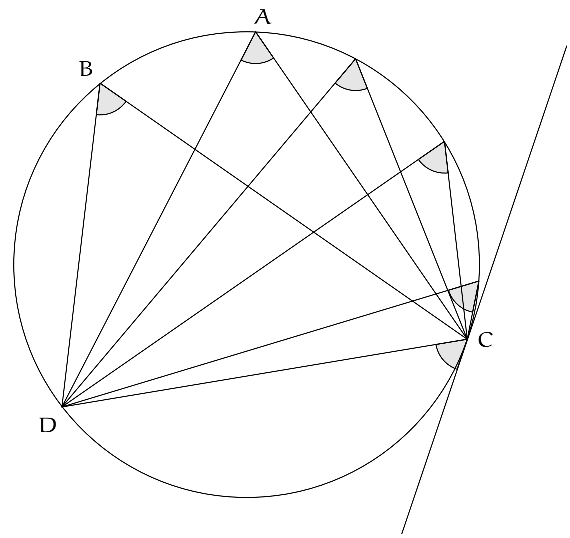
**Exercice 4** On considère trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ distincts s'intersectant au point O. Soient $M$, $N$ et $P$ les intersections autres que $0$ respectivement entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_1$. Soit $A$ un point sur le cercle passant sur $\mathcal{C}_1$ la droite $AP$ intersecte $\mathcal{C}_3$ en un autre point $C$, la droite $AM$ intersecte $\mathcal{C}_3$ en un autre point $B$. Montrer que $B$, $N$ et $C$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 4*




L'angle $\widehat{ONC}$ est supplémentaire à $\widehat{CPO}$, donc égal à $\widehat{OPA}$. Cet angle $\widehat{OPA}$ est supplémentaire à $\widehat{AMO}$, donc égal à $\widehat{OMB}$. Enfin, $\widehat{OMB}$ est supplémentaire à $\widehat{BNO}$ ; On a montré que $\widehat{ONC} + \widehat{BNO} = 180°$, ce qui conclut.

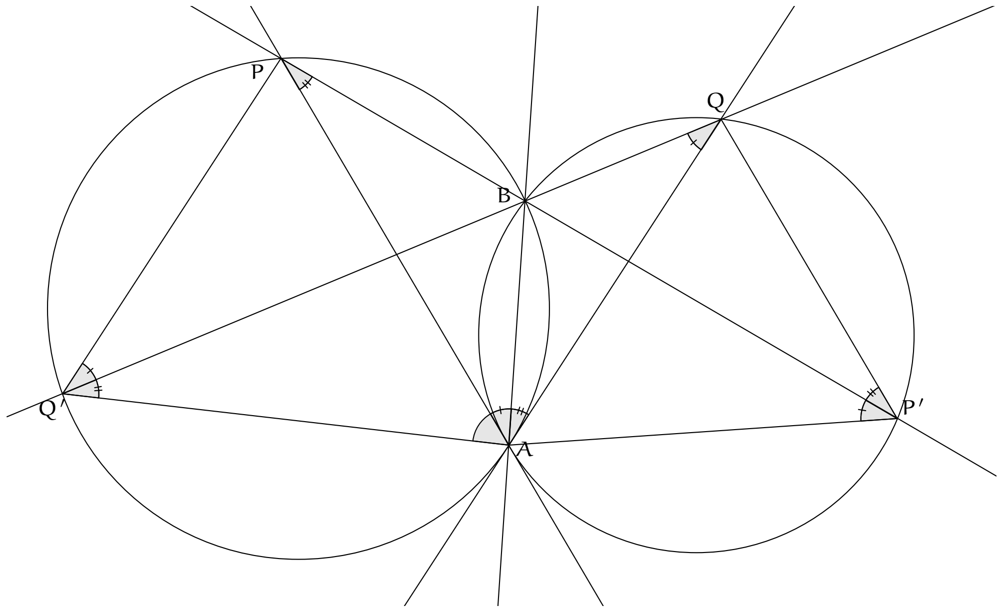
Une remarque avant l'exercice suivant : que se passe-t'il dans le théorème de l'angle inscrit si l'un des point, disons $A$, se rapproche du point $C$ sur le cercle ? Et bien, l'angle $\widehat{DAC}$ est constant, égal à l'angle $\widehat{DBC}$, mais il se rapproche de plus en plus de l'angle entre la corde $CD$ et la tangente au cercle passant par $C$ : cet angle avec la tangente est lui aussi égal à $\widehat{DBC}$.




**Exercice 5** Soient deux cercle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectant en $A$ et $B$. Soit $P$ (resp. $Q$) l'intersection de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) avec la tangente à $\mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}_1$) passant par $A$. Soit $P'$ (resp. $Q'$) l'intersection autre que $B$ de $PB$ avec $\mathcal{C}_2$ (resp. de $QB$ avec $\mathcal{C}_1$). Montrer que $PP' = QQ'$.

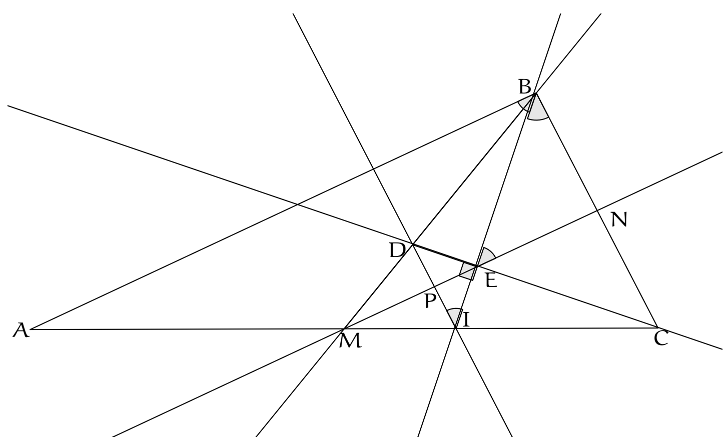
*Solution de l'exercice 5*

Le théorème de l'angle inscrit donne les égalités d'angle indiquées sur la figure. Appelons $\alpha$ l'angle $\widehat{BQ'P}$ (simple tiret sur la figure), $\beta$ l'angle $\widehat{APB}$ (double tiret sur la figure). On remarque notamment que les triangles $PAP'$ et $Q'AQ$ sont semblables (ils ont deux angles égaux). Le résultat à montrer est donc équivalent à prouver que ces triangles sont isométriques, pour le prouver il faut montrer que $AQ' = AP$, donc que $AQ'P$ est isocèle. Introduisons $\gamma$ l'angle $\widehat{PAQ'}$. La somme des angles dans le triangle $Q'AQ$ nous dit que $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180°$. En examinant la somme des angles du triangle $APQ'$, on trouve donc que $\widehat{Q'PA} = \alpha + \beta$, donc $\widehat{Q'PA} = \widehat{AQ'P}$, et on a terminé.




**Exercice 6** Soit $ABC$ un triangle tel que $BA > BC$. Soit $M$ le milieu de $AC$, la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{B}$ coupe $AC$ en $I$. La parallèle à $BC$ passant par $I$ coupe $AM$ en $E$. La parallèle à $BA$ passant par $M$ coupe $AI$ en $D$. Que vaut l'angle $\widehat{EDI}$ ?

*Solution de l'exercice 6*




On fait quelques jolies figures, qui nous permettent de conjecturer que l'angle en question vaut $90°$. On regarde ensuite quelles informations on peut obtenir sur notre figure. On introduit $N$ (resp. $P$) l'intersection de $EM$ avec $BC$ (resp. $DI$). Le théorème de Thalès appliqué dans $ABC$ dit que $BN = NC$. On le réapplique dans $BNM$ et $NMC$ pour obtenir que $DP/BN = MP/MN = IP/NC$, et donc $PD = PI$. Grâce aux angles alternes-internes, opposés et à la définition de la bissectrice, on obtient : $\widehat{PIE} = \widehat{IBC} = \widehat{ABI} = \widehat{BEN} = \widehat{PEI}$ et donc $PEI$ est isocèle et $PE = PD = PI$. Ainsi, $D$ est sur le cercle de diamètre $EI$, donc l'angle cherché vaut $90°$.

Une remarque : l'hypothèse $BA > BC$, donnée pour que $I$ soit « à gauche de $M$ »sur la figure, n'est pas nécessaire, l'exercice marche aussi si $BC > BA$.