DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Invariants, principe des tiroirs : Exercices

- Énoncés -

Exercice 1 On considère des "mots " écrits avec les lettres x, y, z et t. On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$,

(ii) $xytx$ et $txyt$,

(iii) xy et xt.

Exercice 2 15 stagiaires ont mangé 100 gauffres. Prouver qu'au moins deux de ces stagiaires ont mangé le même nombre de gauffres.

Exercice 3 Sur un tableau sont écrits les nombres de 1 jusqu'à 2011. On choisit deux nombres, et, à leur place, on écrit leur différence. On procède de la sorte jusqu'à obtenir un seul nombre. Montrer que celui-ci est forcément pair.

Exercice 4 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu. Montrer que pour tout réel $x > 0$ il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

Exercice 5 On considère un échiquier 8×8, chacune des cases étant blanches ou noire de manière usuelle.

a) On a le droit de changer la couleur des cases constituant une ligne ou une colonne. Peut-on arriver à n'avoir plus qu'une seule case noire ?

b) Même question si on a le droit de changer la couleur des cases constituant n'importe quel carré de taille 2×2.

Exercice 6 29 stagiaires se rencontrent au foyer de Cachan, chacun serrant la main à tous les autres. Montrer qu'à n'importe quel moment de la rencontre, il y a toujours deux stagiaires qui ont serré exactement le même nombre de mains.

Exercice 7

a) Les nombres $1, 2, \ldots, 20$ sont écrits au tableau. On peut effacer deux nombres quelconques a et b et écrire à leur place le nombre $a + b - 1$. Quel nombre sera au tableau après 19 opérations ?

b) Et si l'on remplace deux nombres a et b par $a + b + ab$?

Exercice 8 Est-il possible de paver avec des triminos 3×1 :

(i) un damier 8×8 ?

(ii) un damier 8×8 auquel manque le coin en haut à gauche ?

Exercice 9 On coupe un coin de l'échiquier $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Pour quelles valeurs de n peut-on recouvrir les cases restantes par des dominos 2×1 de telle sorte que la moitié des dominos soient horizontaux ?

- Corrigés -

Solution de l'exercice 1

(i) Les deux mots sont équivalents : $xxyy \mapsto xyyxy \mapsto xyyyyx$.

(ii) Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de x est un invariant.

(iii) Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de y (ou celle de t) est un invariant.

Solution de l'exercice 2 Supposons le contraire. Alors les stagiaires ont mangé au moins $0 + 1 + \cdots + 14 = \frac{14(14+1)}{2} = 105 > 100$ gauffres. Contradiction.

Solution de l'exercice 3 La somme $S = 1 + 2 + \cdots 2011 = 2011 \cdot 2012/2$ est paire. On voit que la parité de la somme de tous nombres écrits au tableau est un invariant. Le nombre restant sera donc forcément pair.

Solution de l'exercice 4 On considère un triangle équilatéral de côté x. Il existe alors deux sommets de ce triangle qui conviennent.

Solution de l'exercice 5

(i) Une figure pavée entièrement par des triminos 3×1 possède un nombre multiple de 3 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 3. La réponse est donc *non*.

(ii) On colorie la deuxième figure avec 3 couleurs différentes en les alternant de sorte que la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur et de sorte qu'un trimino recouvre nécessairement 3 cases dont les couleurs sont deux à deux différentes. La réponse est encore *non*.

Solution de l'exercice 6 Dans les deux cas de figure, on voit que c'est impossible car la parité du nombre de cases noires est un invariant.

Solution de l'exercice 7 À n'importe quel moment, chaque stagiaire a serré un nombre de mains variant entre 0 et 28. Comme il ne peut pas y avoir à la fois quelqu'un ayant serré aucune main et quelqu'un ayant serré toutes les mains, d'après le principe des tiroirs, il y a deux stagiaires qui ont serré exactement le même nombre de mains.

Solution de l'exercice 8

a) Si sur le tableau sont écrits n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors l'expression $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n$ reste constante. Au début elle est égale à $S_{20} = 1 + 2 + \cdots + 20 - 20 = (1 + 20)20/2 - 20 = 190$. Ainsi, si à la fin il reste le nombre r, alors $190 = S_1 = r - 1$, d'où $r = 191$.

b) On vérifie aisément qu'étant donnés n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sur le tableau, l'opération ne change pas le produit $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$. Soit r le nombre qui reste, alors $r + 1 = (1 + 1)(2 + 1) \cdots (20 + 1) = 21!$, d'où $r = 21! - 1$.

Solution de l'exercice 9 Si n est pair, on trouve aisément un recouvrement qui convient. Lorsque n est impair, montrons qu'il est impossible de satisfaire les conditions. On colorie l'échiquier en deux couleurs : on colorie les cases des première, troisième, etc. lignes en bleu et les cases des seconde, quatrième, etc. lignes en rouge. Il y a alors $2n^2 + n$ cases rouges et $2n^2 + 3n$ cases bleues, soit un total de $4n^2 + 4n$ cases. On aura donc besoin de $2n^2 + 2n$ dominos. Il y aura donc $n^2 + n$ dominos horizontaux et autant de verticaux.

Chaque domino vertical recouvre une case de chaque couleur. Une fois les dominos verticaux placés, il reste n^2 cases rouges et $n^2 + n$ cases bleues à recouvrir par des dominos horizontaux. D'après le coloriage, un domino horizontal recouvre des cases de la même couleur. Il faut donc que n soit pair. Autrement dit, lorsque n est impair, il sera impossible de recouvrir l'échiquier suivant les conditions de l'énoncé.