DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2012

Exercices sur les polynômes

- Énoncés -

Exercice 1 Trouver tous les couples (n, r), n entier > 0, r réel, tels que $(x+1)^n - r$ soit divisible par $2x^2 + 2x + 1$.

Exercice 2

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation :

$$\left(x^2 - 2mx - 4(m^2+1)\right)\left(x^2 - 4x - 2m(m^2+1)\right) = 0$$

admet-elle exactement trois racines distinctes ?

Exercice 3

Soit a un réel et $P(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$. Trouver toutes les valeurs de a telles que $|P(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 4

a) Déterminer le polynôme Q tel que pour tout réel α, $Q(\cos\alpha) = \cos 3\alpha$.

b) Soient a, b, c trois réels quelconques, $P(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ et M la valeur maximale de $|P(x)|$ sur $[-1, 1]$. Montrer que $M \geqslant 1$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 5

α, β, γ étant les trois racines de $x^3 - x - 1$, calculer : $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$

Exercice 6

Trouver (a, b, c) réels vérifiant :
$a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 35$, $a^3 + b^3 + c^3 = 99$.

- Corrigé -

Solution de l'exercice 1

$2x^2+2x+1$ admettant deux racines distinctes, en l'occurrence deux racines complexes $\frac{-1+i}{2}$ et $\frac{-1-i}{2}$, il faut et il suffit que chacune d'elles soit racine de $(x+1)^n - r$, donc que $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = r = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n$. Or $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ est réel si et seulement si n est multiple de 4, auquel cas, si $n = 4k$, $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{4k} = \left(\frac{1-i}{2}\right)^{4k} = \left(\frac{-1}{4}\right)^k$. Les solutions cherchées sont donc tous les couples : $(4k, \left(\frac{-1}{4}\right)^k)$

Solution de l'exercice 2

Le premier trinôme $x^2-2mx-4(m^2+1)$ admet toujours deux racines réelles distinctes. Il faut donc soit que le second trinôme admette une racine double, soit qu'il admette une racine en commun avec le premier.

Il admet une racine double lorsque $-2m(m^2+1) = 4$, soit $m^3+m+2 = 0$. Ce polynôme admet pour racine évidente $m = -1$, il se factorise donc en : $(m+1)(m^2-m+2)$ et m^2-m+2 n'admet pas de racine réelle. Or pour $m = -1$, la racine double 2 de $x^2-4x-2m(m^2+1$ est aussi racine de $x^2-2mx-4(m^2+1)$, de sorte que l'équation de l'énoncé n'admet que deux racines distinctes (dont une racine triple).

Si $x^2-2mx-4(m^2+1)$ et $x^2-4x-2m(m^2+1)$ admettent une racine commune, celle-ci est racine de la différence : $(4-2m)(x-(m^2+1))$. Soit $m = 2$ auquel cas les deux trinômes sont identiques, égaux à $x^2-4x-20$, et l'équation admet seulement deux racines distinctes (deux racines doubles), soit $x = m^2+1$, auquel cas chacun des trinômes est égal à $(m^2+1)(m^2-2m-3)$ et s'annule à condition que $m = -1$ ou $m = 3$. $m = -1$ est exclu (c'est la racine triple déjà vue), reste $m = 3$ pour lequel l'équation $(x^2-6x-40)(x^2-4x-60)$ a bien trois racines : $-4, -6$ et 10 (racine double). C'est donc l'unique solution de l'exercice.

Solution de l'exercice 3

Le trinôme atteint son minimum en $x = a$, donc sur l'intervalle qui nous intéresse lorsque $a \in [0,1]$. Hormis ce point, il ne peut être maximum ou minimum qu'aux bornes de l'intervalle, donc en -1 ou 1. Il suffit donc de voir quand chacune des trois valeurs $P(0), P(1)$ et $P(a)$ si $0 \leqslant a \leqslant 1$ est comprise entre -1 et 1. Pour $P(0) = -a^2 - \frac{3}{4}$, c'est lorsque $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. $P(1) = \frac{1}{4} - 2a - a^2$ est inférieur ou égal à 1 lorsque $a \leqslant -\frac{3}{2}$ ou $a \geqslant -\frac{1}{2}$, et supérieur ou égal à -1 lorsque $-\frac{5}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Enfin, pour $0 \leqslant a \leqslant 1$, $P(a) = -2a^2 - \frac{3}{4}$ est toujours < 1 et est $\geqslant -1$ lorsque $|a| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$. A l'intersection de tous ces intervalles se trouve l'intervalle solution : $a \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

Solution de l'exercice 4

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, et $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, donc $Q(x) = 4x^3 - 3x$.

Ce polynôme nous est utile pour la question b). En effet, il vaut 1 lorsque 3α est multiple de 2π, donc lorsque $x = \cos\alpha = 1$ ou $\frac{-1}{2}$, et vaut -1 lorsque 3α est multiple impair de π, donc lorsque $x = \cos\alpha = \frac{1}{2}$ ou -1. Pour toute autre valeur de $x = \cos\alpha \in [-1, 1]$, $Q(x)$ est compris entre -1 et 1. Donc pour $a = 0, b = -3, c = 0, M = 1$.

Si un polynôme $P(x)$ vérifiait pour tout $x \in [-1, 1]$ $|P(x)| < 1$, il vérifierait cette relation en particulier en $-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, d'où $(P-Q)(-1) > 0$, $(P-Q)(\frac{-1}{2} < 0$, $(P-Q)(\frac{1}{2} > 0$ et $(P-Q)(1) < 0$. Il en résulterait que le polynôme $P - Q$ s'annulerait trois fois dans l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui est impossible vu que $P - Q$ est un polynôme du second degré. Donc on ne peut pas avoir $|P(x)| < 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Pour le cas d'égalité : si $M = 1$, $(P-Q)(-1) \geqslant 0$, $(P-Q)(\frac{-1}{2} \leqslant 0$, $(P-Q)(\frac{1}{2} \geqslant 0$ et $(P-Q)(1) \leqslant 0$. Soit le trinôme est identiquement nul, $P = Q$ est effectivement solution, soit il s'annule sur $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et sa deuxième racine est soit $> \frac{1}{2}$ auquel cas $P(-1) < 0$, soit $< \frac{-1}{2}$ auquel cas $P(1) > 0$: contradiction dans les deux cas. Le polynôme Q est donc l'unique cas d'égalité.

Solution de l'exercice 5

Une méthode sûre même si, en l'occurrence, on peut trouver plus rapide, est de chercher l'équation ayant pour racines $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \frac{1-\beta}{1+\beta}, \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ et de calculer la somme des racines de cette dernière équation à partir de ses coefficients. Si x est racine de $x^3 - x - 1$, de quelle équation est racine $y = \frac{1-x}{1+x}$? On remarque que $x = \frac{1-y}{1+y}$ (la fonction est involutive), donc $\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^3 - \left(\frac{1-y}{1+y}\right) - 1 = 0$, soit : $(1-y)^3 - (1-y)(1+y)^2 - (1+y)^3 = 0$. L'équation en y s'écrit donc : $-y^3 + y^2 - 7y - 1$, la somme de ses racines vaut 1.

Solution de l'exercice 6

Il faut se ramener à une équation du troisième degré en utilisant le fait que toute expression symétrique des racines d'une équation peut s'exprimer rationnellement en fonction des polynômes symétriques élémentaires (coefficients de ladite équation du troisième degré). En l'occurrence, $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$, donc $ab + bc + ca = -13$. Et $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b)$ et $(a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b) = (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc$.

D'où : $99 - 3 \times 35 = -((3 \times -13) - 3abc$, d'où : $abc = -15$. a, b et c sont donc les racines de : $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$. Cette équation admet 1 pour racine évidente, elle se factorise en : $(x-1)(x^2 - 2x - 15)$ et admet donc pour autres racines : -3 et 5. Donc (a, b, c) vaut à permutation près : $(1, -3, 5)$.