DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Exercice de géométrie

1 Énoncés

Exercice 1 Soit ABC un triangle. Montrer que l'intersection de la bissectrice issue de $\widehat{B}$ et de la médiatrice de $[AC]$ appartient au cercle circonscrit de ABC.

Exercice 2 Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$. Montrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Exercice 3 Soit ABC un triangle. Sur la droite (AC), on place les deux points E et E' tels que les longueurs AE' , AE, AB soient égales et telles que E' soit du côté de C. Montrer qu'alors :

1. les droites (BE) et (BE') sont respectivement parallèles à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$,
2. le triangle EBE' est un triangle rectangle.

Exercice 4 Soit ABC un triangle aux angles aigus d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.

Exercice 5 On considère deux cercles tangents intérieurement en un point C et une corde $[AB]$ du grand cercle tangente au petit cercle en E. Montrer que la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 6 Soient A_0, B, C trois points non alignés du plan. On note A_1 le centre du cercle inscrit de A_0BC, A_2 celui de A_1BC et ainsi de suite pour construire les points $A_2, A_3, \ldots$. Pour un entier n, calculer le rayon du cercle inscrit de A_nBC.

Exercice 7 Une droite passant par le sommet A d'un triangle équilatéral ABC coupe le côté $[BC]$ en Q et le cercle circonscrit au triangle en P. Montrer que $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1 Notons D l'intersection de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{B}$ et du cercle circonscrit de ABC (voir figure 1. Il faut et il suffit de montrer que D appartient à la médiatrice de $[AC]$. Comme les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux, ceci implique les longueurs des arcs AD et DC sont égales, et donc que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.

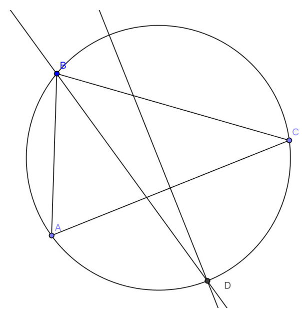

FIGURE 1 – Exercice 1

Solution de l'exercice 2 Superposons les deux triangles de sorte que $A = A'$ et que les points B, A, B' et C, A, C' soient respectivement alignés. comme sur la figure 2.

Les angles ABC et $A'B'C'$ étant égaux, les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles. On en déduit que le résultat par application du théorème de Thalès.

Solution de l'exercice 3 Notons AA_1 et AA_2 respectivement les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{A}$. Les triangles EAB et $E'AB$ sont isocèles, et AA_1 (resp. AA_2) est perpendiculaire à (BE') (resp. à (BE)). Comme (AA_1) et AA_2 sont perpendiculaires, les droites (BE) et (AA_1), respectivement (BE') et (AA_2) sont parallèles.

Solution de l'exercice 4 Notons B_H le pied de la hauteur issue de B et B' son intersection avec le cercle circonscrit à ABC (voir figure 4). Il suffit de montrer que les angles $H\widehat{AB}_H$ et $B_H\widehat{A}B'$ sont égaux. En effet, dans ce cas, les triangles

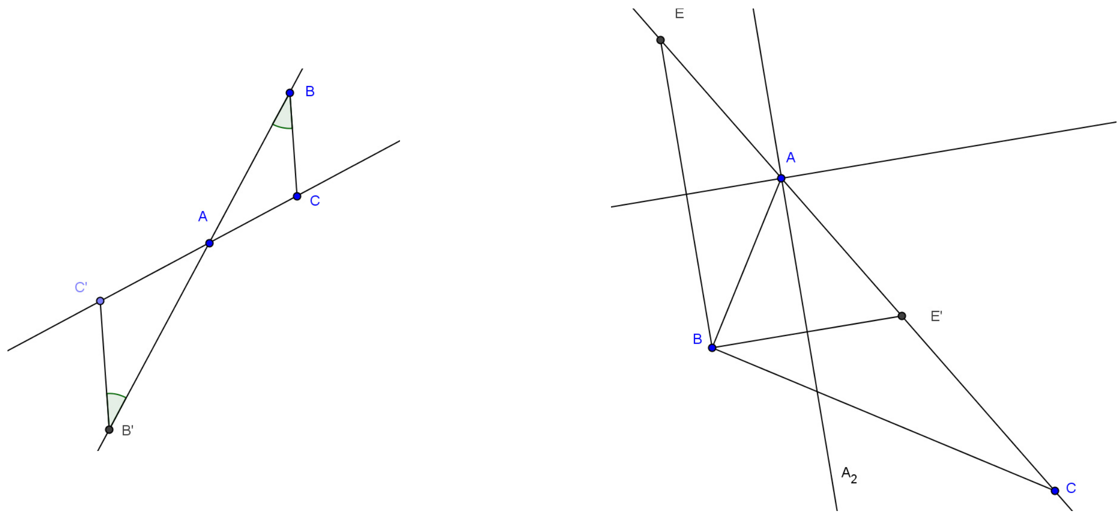

FIGURE 2 – Figures des exercices 2 et 3

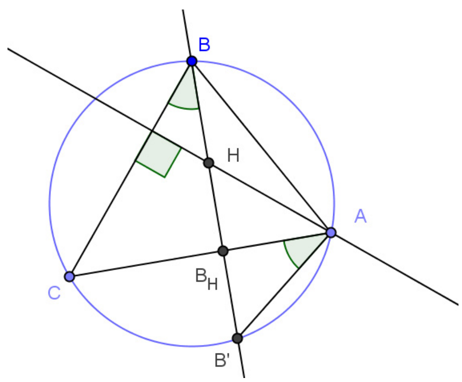

FIGURE 3 – Exercice 4

rectangles HAB_H et B_HAB' auraient trois angles identiques et un angle en commun et seraient alors égaux. Ceci implique $B'B_H = B_HH$ et donc que B' est le symétrique de H par rapport au côté (AC).

Montrons donc que $H\widehat{AB}_H = B_H\widehat{AB}'$. Notons $\alpha = H\widehat{AB}_H$. Comme les angles $H\widehat{AB}_H$ et $\widehat{CBB}'$ interceptent le même arc, ils sont égaux. On en déduit que $\widehat{CBB}' = \beta$, puis $\widehat{BCA} = 90^\circ - \beta$ car CBB_H est rectangle en B_H. Mais alors $\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{BCA} = \beta$, ce qu'on voulait montrer.

On démontre de même que les symétriques de H par rapport aux autres côtés appartiennent au cercle circonscrit.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

- (Première solution) Soit F le point d'intersection de la corde (AB) avec la tangente commune. Les triangles FAC et FCB sont semblables et $FC = FE$.

Par suite :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{FE}{FB} = \frac{FA}{FE} = \frac{FE - FA}{FB - FE} = \frac{AE}{EB},$$

et la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

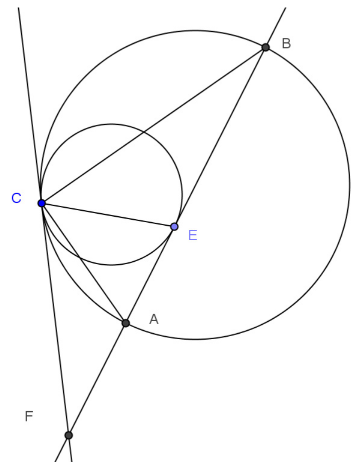

FIGURE 4 – Exercice 5, première solution

- (Deuxième solution, d'après des idées d'élèves) Notons O le centre du

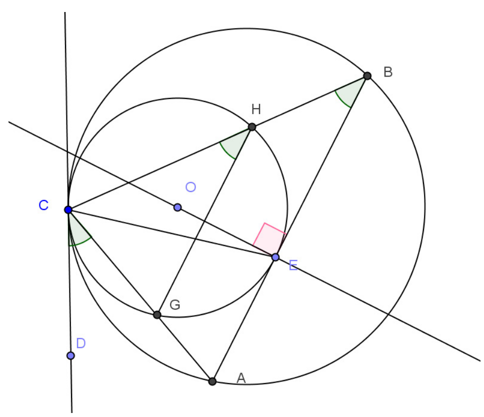

FIGURE 5 – Exercice 5, deuxième solution

petit cercle et soient G, H les points d'intersection de respectivement (CB) et (CA) avec le petit cercle. On introduit le point D comme sur la figure 5. On commence par faire une petite chasse aux angles pour montrer que (AB) et (GH) sont parallèles. On a $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{GHC}$. Donc (AB) et (GH) sont parallèles. Or (OE) et (AB) sont perpendiculaires. Donc (OE) et (GH) sont perpendiculaires. Donc (OE) est la médiatrice de $[GH]$. Donc, d'après le premier exercice, (CE) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Solution de l'exercice 6 Notons r_n le rayon cherché et X_n le point de tangence entre le cercle inscrit de A_nBC et $[BC]$. Remarquons qu'en notant $\beta = \widehat{B}$ et $\gamma = \widehat{C}$, on a $\widehat{A_nBC} = \beta/2^n$ et $\widehat{A_nCB} = \gamma/2^n$. On en déduit que $\widehat{BA_nC} = 180^\circ - (\beta+\gamma)/2^n$.D'après la loi des sinus appliquée dans A_nCB :

$$BA_n = BC\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)}{\sin\left(180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2^n}\right)}.$$

Donc $BA_n = BC\sin(\gamma/2^n)/\sin((\beta+\gamma)/2^n)$. Comme BA_nX_n est rectangle, on en déduit que :

$$r_n = BC\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2^n}\right)}.$$

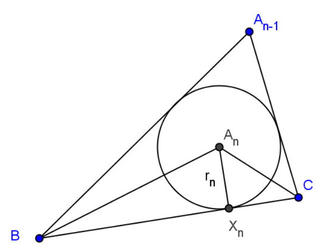

FIGURE 6 – Exercice 6

Solution de l'exercice 7 L'angle $\widehat{BPC}$ valant 120°, on peut prolonger la demi-droite (CP) jusqu'à un point D tel que le triangle BDP soit équilatéral. Alors les droites (AP) et (BD) sont parallèles, et les triangles BCD et QCP sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{BD}{QP} = \frac{CD}{CP} = 1 + \frac{PD}{CP}.$$

En divisant cette égalité par $BD = PB = PD$, on obtient l'égalité demandée.

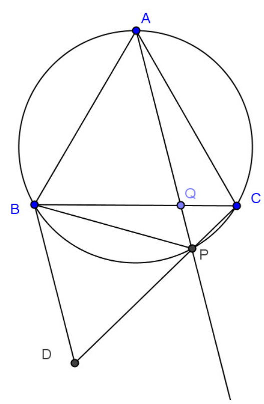

FIGURE 7 – Exercice 7