DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2013

Exercices sur la chasse aux angles

- Énoncés-

Exercice 1 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. On trace le segment $[PQ]$. On considère une droite d qui le coupe en un point intérieur au segment. On note A, B, C, D dans cet ordre ses 4 points d'intersection de d avec Γ_1 (pour A et C) et Γ_2 (pour B et D).

Prouver que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 2 Soit Γ un cercle, BC une corde de Γ. Soit A le milieu de l'arc BC. Par A on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent le segment $[BC]$ en F et G respectivement.

Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible dans un cercle.

Exercice 3 Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en E. Montrer que :

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

Exercice 4 Soit ABC un triangle rectangle en C. Sur la droite (AC) on place un point D tel que $CD = BC$, C étant situé entre A et D. La perpendiculaire à (AB) passant par D recoupe (BC) en E. Montrer que $AC = CE$.

Exercice 5 Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle de centre O. Les diagonales AC et BD sont perpendiculaires. Montrer que la distance de O à la droite (AD) est égale à la moitié de la longueur du segment $[BC]$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle. Montrer que l'intersection de la bissectrice issue de $\widehat{B}$ et de la médiatrice de $[AC]$ appartient au cercle circonscrit de ABC.

Exercice 7 Soit ABC un triangle aux angles aigus d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.

Exercice 8 On considère deux cercles tangents intérieurement en un point C et une corde $[AB]$ du grand cercle tangente au petit cercle en E. Montrer que la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 9 (Olympiades Balkaniques de Mathématiques 2012, exercice 1) Soient A, B, C trois points d'un cercle Γ de centre O. On suppose que $\widehat{ABC} > 90°$. Soit D l'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AC) passant par C. Soit l la droite passant par D perpendiculaire à (AO). Soit E l'intersection de la droite l avec (AC), et soit F l'intersection de Γ et de de l qui se situe entre D et E.

Prouver que les cercles circonscrits des triangles BFE et CFD sont tangents en F.

Exercice 10 Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles qui se coupent en A et en B. Soit Δ une droite tangente aux deux cercles en M et en N. Montrer que (AB) coupe le segment $[MN]$ en son milieu.

Exercice 11 Soient $ABCD$ et $CDEF$ deux quadrilatères inscrits dans deux cercles Γ_1, Γ_2. On suppose que parmi les droites (AB), (CD) et (EF) il n'y en a pas deux qui soient parallèles. Alors les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes si, et seulement si, les points A, B, E et F sont cocycliques.

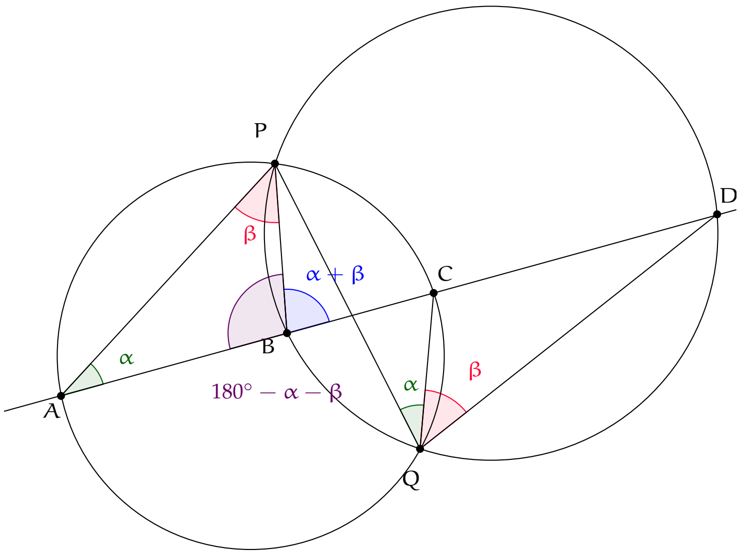
Exercice 12 Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 13 (Olympiades internationales de Mathématiques 2000, Exercice 1) Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles qui se coupent en M et en N. Soit Δ la tangente commune aux deux cercles, qui est plus proche de M que de N. Δ est tangente à Ω_1 en A et à Ω_2 en B. La droite passant par M et parallèle à Δ rencontre Ω_1 en C et Ω_2 en D. Soient E l'intersection des droites (CA) et (BD), P le point d'intersection de droites (AN) et (CD) et Q le point d'intersection des droites (BN) et (CD). Montrer que $EP = EQ$.

Exercice 14 Soit ABC un triangle acutangle. On note respectivement D, E, F les pieds des hauteurs sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soit P un point d'intersection de (EF) avec le cercle circonscrit à ABC. Soit Q le point d'intersection des droites (BP) et (DF). Montrer que $AP = AQ$.

- Solutions des exercices-

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On commence par tracer une figure :

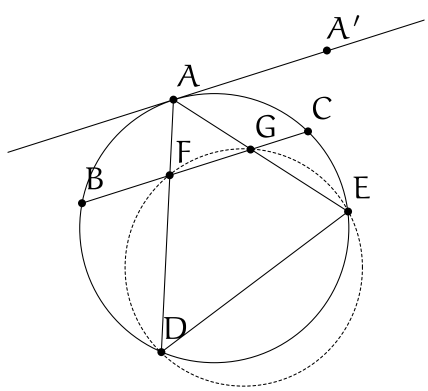


La présence de nombreux points cocycliques nous invite à chasser les angles : posons $\alpha = \widehat{PQC}$ et $\beta = \widehat{CQD}$. Les points P, B, Q, D sont cocycliques. Les angles $\widehat{PBD}$ et $\widehat{PQD}$ interceptent le même arc et sont donc égaux. Ainsi, $PBD = \alpha + \beta$, et donc $\widehat{ABP} = 180° - \alpha - \beta$.

D'autre part, les points P, A, Q, C sont cocycliques. Les angles $\widehat{PAC}$ et $\widehat{PQC}$ interceptent le même arc et sont donc égaux. Ainsi, $\widehat{PAB} = \alpha$.

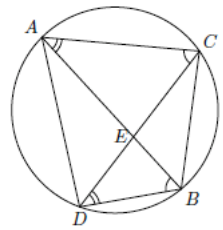
Nous avons de cette manière réussi à trouver deux des trois angles du triangle ABP. L'angle $\widehat{APB}$ vaut donc $180° - (\alpha + 180° - \alpha - \beta) = \beta$. On a bien $\widehat{CQD} = \widehat{APB}$, ce qu'il fallait démontrer.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Considérons la tangente a au cercle en A, et un point



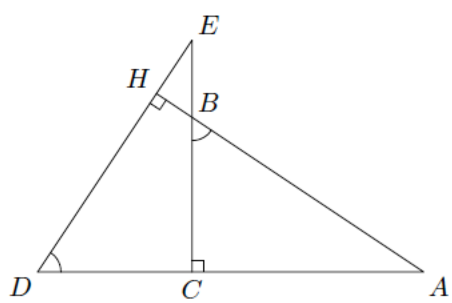
A' de a du même côté de (OA) que C. On a alors $\widehat{EDA} = \widehat{EAA'} = \widehat{EGC}$, la première égalité étant le cas tangent du théorème de l'angle inscrit, et la deuxième provenant du fait que a est parallèle à (BC). Donc $\widehat{EDF} = \widehat{EGC} = 180° - \widehat{EGF}$, ce qui prouve que $EGFD$ est inscriptible.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



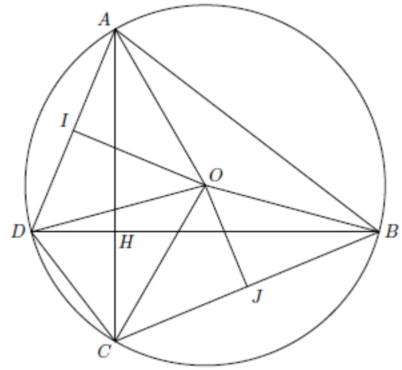
Les triangles EAC et EDB, qui ont les mêmes angles, sont semblables, d'où $\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{ED}$. Par le même raisonnement, les triangles EAD et ECB sont semblables, donc $\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EB}$. En faisant le produit, ED se simplifie, il reste la relation cherchée.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



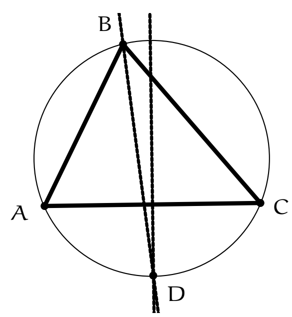
On a $\widehat{CBA} = \widehat{CDE}$, puisque (CB) est perpendiculaire à (CD) et (BA) à (DE). Il en résulte que les triangles CBA et CDE ont leurs angles égaux, ils sont semblables, et même égaux car $CB = CD$ par hypothèse. Cela entraîne $CA = CE$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

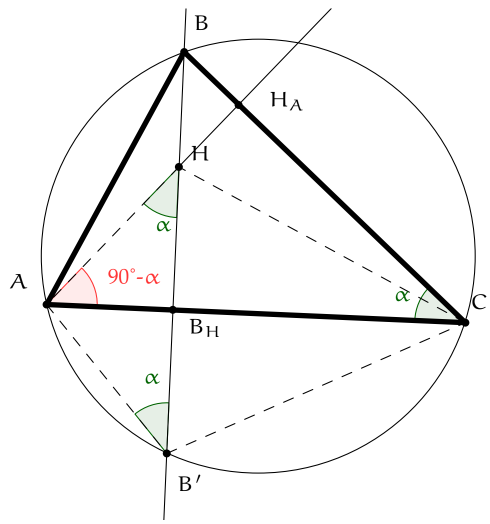


Par la propriété des angles inscrits, on a $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD}$ et donc $\widehat{IOA} = \widehat{ABD}$. De même $\widehat{COJ} = \widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABD}$. On en déduit $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{OJC} = \widehat{OCJ}$ puis que les triangles IOA et JCO sont semblables. Comme on a en outre $OA = OC$, ils sont isométriques et $CJ = IO$, ce qui permet de conclure.

Solution de l'exercice 6 Notons D l'intersection de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{B}$ et du cercle circonscrit de ABC. Il faut et il suffit de montrer que D appartient à la médiatrice de $[AC]$. Comme les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux, ceci implique que les longueurs des arcs AD et DC sont égales, et donc que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.



Solution de l'exercice 7 Notons B_H le pied de la hauteur issue de B, B' son intersection avec le cercle circonscrit à ABC et A_H le pied de la hauteur issue de A (voir figure).



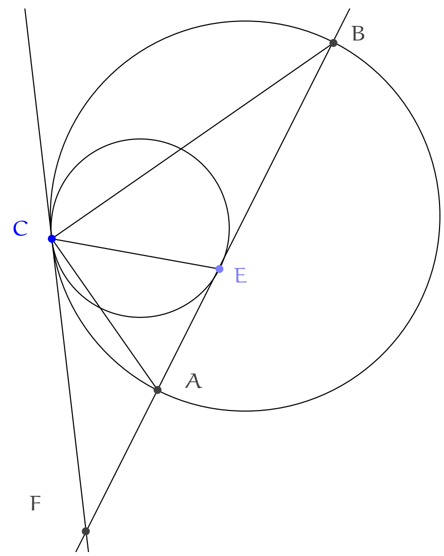
Il suffit de montrer que les angles $\widehat{AB'B_H}$ et $\widehat{AHB_H}$ sont égaux. En effet, dans ce cas, les triangles rectangles HAB_H et B_HAB' auraient trois angles identiques et un angle en commun et seraient donc alors égaux. Ceci implique $B'B_H = B_HH$ et donc que B' est le symétrique de H par rapport au côté (AC).

Montrons donc que $\widehat{AB'B_H} = \widehat{AHB_H}$. Notons $\alpha = \widehat{AB'B_H}$. Comme les angles $\widehat{AB'B_H}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc, ils sont égaux. On en déduit que $\widehat{ACB} = \alpha$, puis $\widehat{H_AAC} = 90^\circ - \alpha$ car AH_AC est rectangle en H_A. Mais alors, puisque AHB_H est rectangle en B_H, $\widehat{AHB_H} = 90^\circ - \widehat{HAB_H} = \alpha$, ce qu'on voulait montrer.

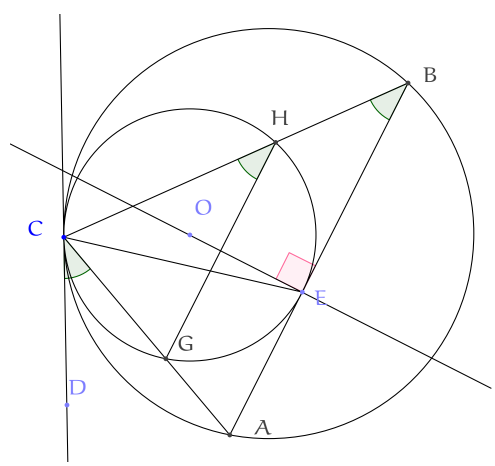
On démontre de même que les symétriques de H par rapport aux autres côtés appartiennent au cercle circonscrit.

Solution de l'exercice 8

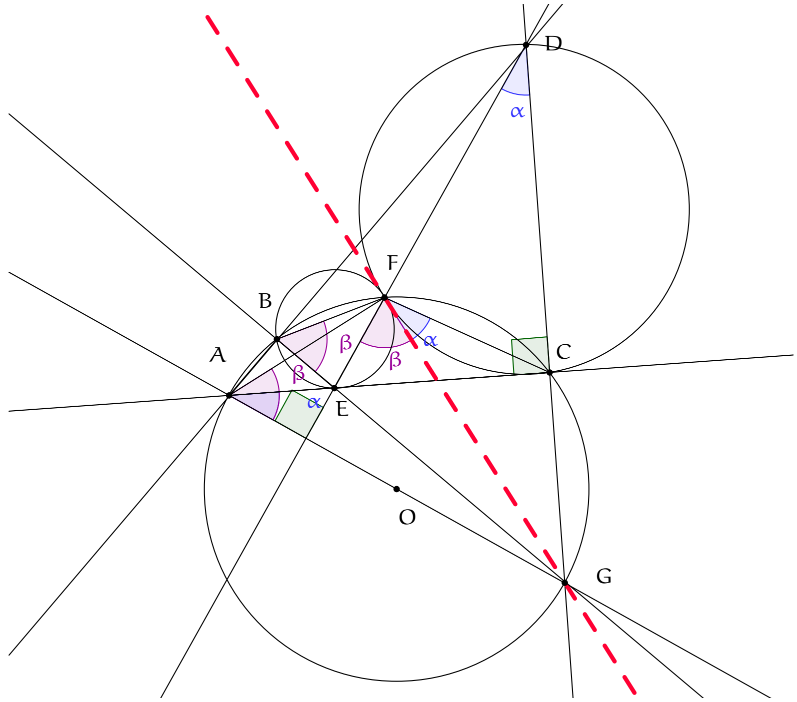
- (Première solution) Soit F le point d'intersection de la corde (AB) avec la tangente commune. Les triangles FAC et FCB sont semblables et $FC = FE$. Par suite :
$$\frac{CA}{CB} = \frac{FE}{FB} = \frac{FA}{FE} = \frac{FE - FA}{FB - FE} = \frac{AE}{EB},$$
et la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.



- (Deuxième solution) Notons O le centre du petit cercle et soient G, H les points d'intersection de respectivement (CB) et (CA) avec le petit cercle. On introduit le point D comme sur la figure. On commence par faire une petite chasse aux angles pour montrer que (AB) et (GH) sont parallèles. On a $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{GHC}$. Donc (AB) et (GH) sont parallèles. Or (OE) et (AB) sont perpendiculaires. Donc (OE) et (GH) sont perpendiculaires. Donc (OE) est la médiatrice de $[GH]$. Donc, d'après le premier exercice, (CE) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.



<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On commence par faire une figure soignée :



Cette figure suggère que les les droites (AO), (BE), la tangente commune cherchée et (DC) vont être concourantes. Notons ainsi G le point diamétralement opposé à A sur Γ.

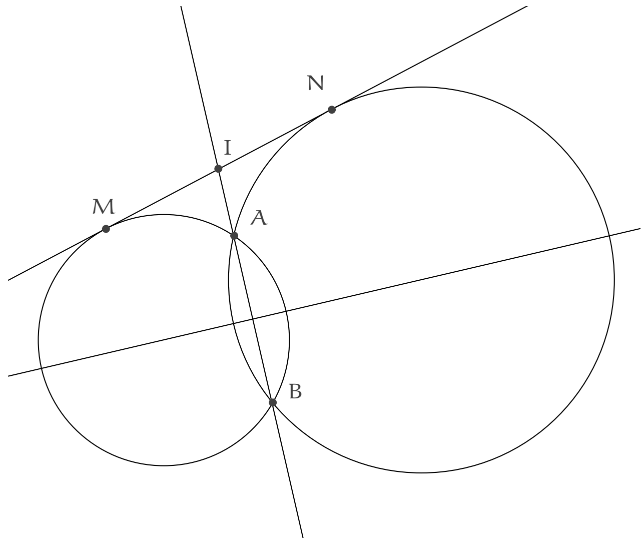
Première étape : (DC) passe par G. En effet, $[AG]$ étant un diamètre de Γ, ACG est rectangle en C, ce qui implique que les droites (DC) et (CG) sont les mêmes.

Deuxième étape : prouvons que (BE) passe par G. Pour cela, on remarque que E est l'orthocentre de ADG car E est l'intersection des deux hauteurs (AC) et (DE). Or ABG est rectangle en B, car $[AG]$ est un diamètre de Γ, ce qui implique que (BG) et (AD) sont perpendiculaires. Donc (BG) est la hauteur issue de G dans ADG, et donc l'orthocentre E appartient à (BG).

Troisième étape : posons $\alpha = \widehat{EDG}$. Pour montrer que (FG) est tangente au cercle circonscrit de FDC, montrons que $\widehat{GFC} = \alpha$. On a $\widehat{DEC} = 90^\circ - \alpha$. Les droites (DE) et (AG) étant perpendiculaires, on en déduit que $\widehat{EAG} = \alpha$. Finalement, par cocyclicité de A,F,C,G, on en déduit que $\widehat{GFC} = \alpha$.

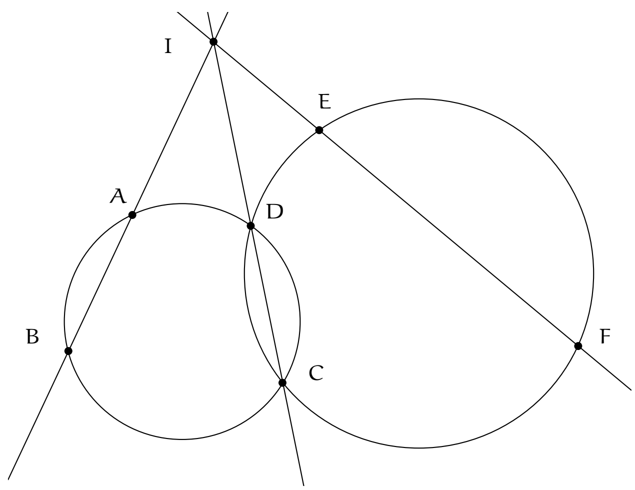
Posons $\beta = \widehat{EBF}$. Pour montrer que (FG) est tangente au cercle circonscrit de BEF, montrons que $\widehat{EFG} = \beta$. Par cocyclicité de A, B, F, G, on a $\widehat{FAG} = \beta$. Puis, en utilisant deux triangles rectangles, il vient $\widehat{AFE} = 90 - \beta$, puis $\widehat{EFG} = \beta$, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 10



La puissance de I par rapport au premier cercle vaut $IM^2 = IA \cdot IB$. La puissance de I par rapport au deuxième cercle vaut $IA \cdot IB = IN^2$. On en déduit que $IM^2 = IN^2$, d'où $IM = IN$.

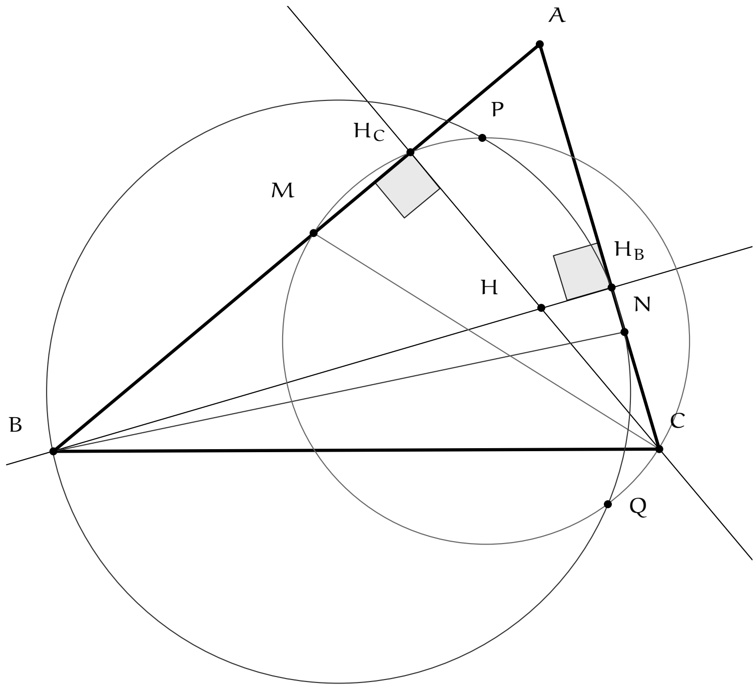
Solution de l'exercice 11



Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes. Alors la puissance de I par rapport au cercle de gauche vaut $IA \cdot IB = ID \cdot IC$. La puissance de I par rapport au cercle de droite vaut $ID \cdot IC = IE \cdot IF$. On en déduit que $IA \cdot IB = IE \cdot IF$, et donc que A, B, F, E sont cocycliques.

Réciproquement, si A, B, F, E sont cocycliques, notons I le point d'intersection des droites (AB) et (EF). La puissance de I par rapport au cercle circonscrit à $ABFE$ vaut $IA \cdot IB = IE \cdot IF$. Donc I a même puissance par rapport aux deux cercles de la figure. I est donc sur leur axe radical, qui est (DC). Les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont donc concourantes en I.

Solution de l'exercice 12

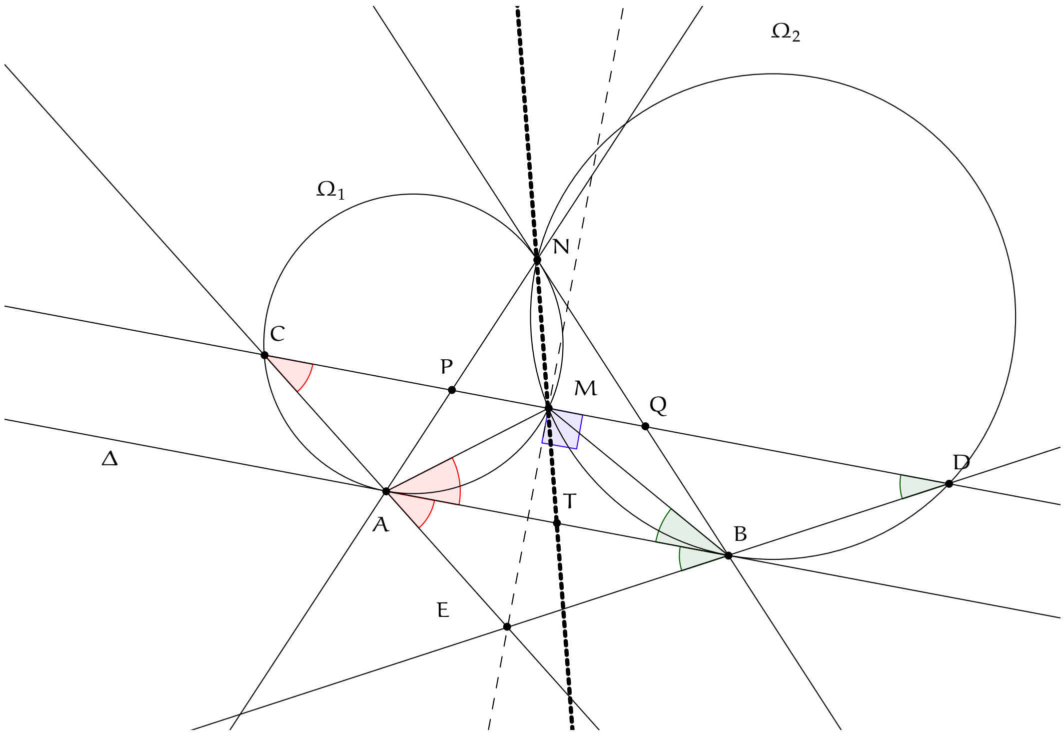


Nous allons montrer que H a la même puissance par rapport aux deux cercles de la figure, ce qui impliquera que H est sur leur axe radical, qui est (PQ).

Pour cela, comme $(BH_B) \perp (AC)$, H_B est sur le cercle de diamètre $[BN]$. La puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BN]$ vaut donc $-HB \cdot HH_B$. De même, la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ vaut $-HC \cdot HH_C$.

Or les points B, H_C, H_B, C sont cocycliques : ces points sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$. On en déduit que $-HB \cdot HH_B = -HH_C \cdot HC$, ce qui conclut.

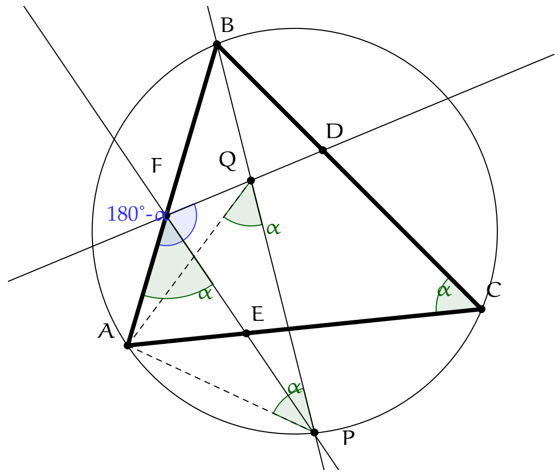
<u>*Solution de l'exercice 13*</u>



Il suffit d'être logique, qualité qui permet de résoudre nombre d'exercices de géométrie : une chasse aux angles s'impose, et montre que $\widehat{ABE} = \widehat{CDE} = \widehat{MBA}$, la dernière égalité étant d'une importance capitale. De même, $\widehat{BAE} = \widehat{MAB}$. Ces égalités impliquent que M et E sont images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la droite (AB). Les droites (ME) et (AB) sont orthogonales, puis les droites (ME) et (PQ) sont orthogonales.

Il faut également savoir reconnaître les situations classiques : ici, en notant T l'intersection des droites (MN) et (AB), il faut savoir que $TA = TB$ (voir exercice 5). Le théorème de Thalès montre alors que M est le milieu de $[PQ]$. En somme, (ME) est la médiatrice de $[PQ]$. E est donc bien équidistant de P et de Q.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>



Posons $\alpha = \widehat{APB}$. Par cocyclicité des points A, B, C, P, on a $\widehat{BCA} = \alpha$. Comme (AD) et (CF) sont des hauteurs, les points A, C, D, F sont cocycliques et donc $\widehat{AFD} = 180° - \alpha$. Donc $\widehat{AFD} + \widehat{APQ} = 180°$, ce qui implique que les points A, P, Q, F sont cocycliques.

On continue la chasse aux angles : $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} = \widehat{BCA} = \alpha$ (pourquoi ?), et donc $\widehat{AQP} = \widehat{AFP} = \widehat{BCA}$. Le triangle APQ est donc isocèle, ce qui implique $AP = AQ$.