DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Cachan 2010 (junior)

Chasse aux angles

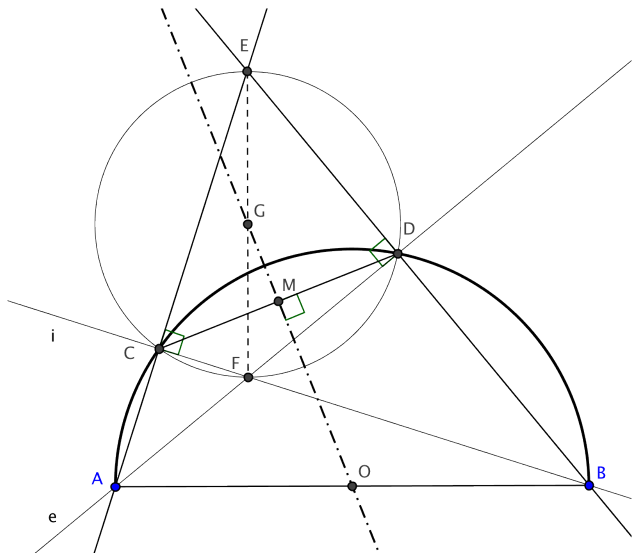
Rappels

La somme des trois angles d'un triangle est égale à $180°$. On peut aussi énoncer ce résultat sous cette forme : si D est sur la droite (AB), avec D et A de part et d'autre de B, $\widehat{DBC} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$.

Si un triangle ABC a deux côtés égaux, $AB = AC$, les deux angles opposés aux côtés égaux sont égaux : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$. Si un triangle ABC a deux angles égaux, $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$, les deux cotés opposés aux angles égaux sont égaux : $AB = AC$. Un tel triangle est dit *isocèle*. Dans un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$, la même droite (l'axe de symétrie du triangle) est en même temps bissectrice intérieure, médiane et hauteur du triangle, donc médiatrice de $[BC]$.

On a $\widehat{ABC} = 90°$ si et seulement si le point B est sur le cercle de diamètre $[AC]$.

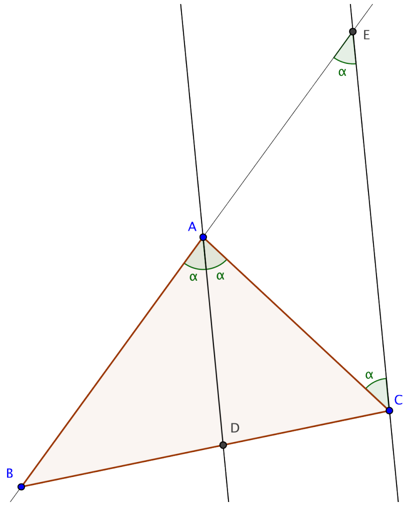
Exercice 1 Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.



<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Une manière simple de montrer que trois points sont alignés consiste à prouver que la droite passant par deux d'entre eux passe par le troisième. Or le milieu du diamètre $[AB]$ est le centre O du demi-cercle contenant également C et D. Comme $OC = OD$, O est sur la médiatrice de $[CD]$, qui passe par le milieu M de $[CD]$, et les trois points sont alignés si et seulement si le milieu N de $[EF]$ est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$, donc si et seulement si $NC = ND$. Or C et D étant sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$, $\widehat{ACB} = 90° = \widehat{ADC}$, tout comme $\widehat{ECF} = 90° = \widehat{EDF}$. Il en résulte que C et D sont également sur le demi-cercle de diamètre $[EF]$, donc de centre M, d'où $NC = ND$: c'est précisément ce qui restait à démontrer.

Bissectrice

Une bissectrice d'un angle $\widehat{BAC}$ est une droite qui partage l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux. C'est également un axe de symétrie transformant l'un des côtés de l'angle (AB) en l'autre (AC). Les points de la bissectrice sont donc à égale distance des deux droites (AB) et (AC). On notera que la notion d'*angle* est très difficile à définir de manière rigoureuse, mais nous n'approfondirons pas cette question. Signalons seulement qu'il existe deux droites perpendiculaires dont tous les points sont à égales distance des deux droites (AB) et (AC), toutes deux sont bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$. Mais dans le triangle ABC, si une bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe le côté opposé (BC) en D, cette bissectrice sera dite *intérieure* si D est intérieur au segment $[BC]$, *extérieure* si D est extérieur au segment $[BC]$.

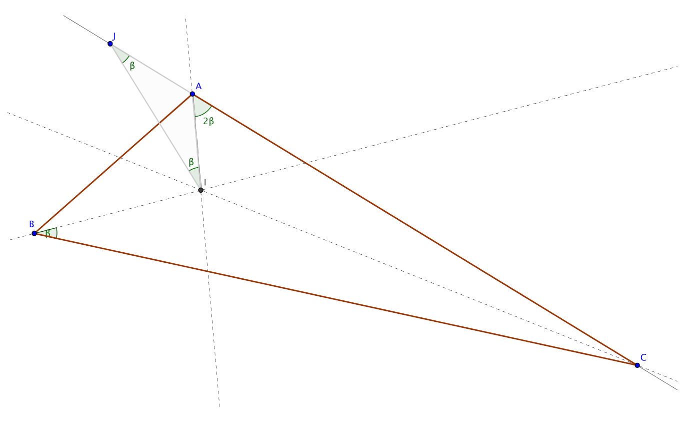


Dans les deux cas, le point D vérifie la même propriété : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Une des démonstrations de ce théorème classique utilise le théorème de Thalès : si la parallèle à (AD) passant par C coupe (AB) en E, le parallélisme entraîne deux égalités d'angles : $\widehat{DAC} = \widehat{ACE}$ d'une part, et $\widehat{BAD} = \widehat{AEC}$. Comme (AD) est bissectrice, tous ces angles sont égaux et le triangle ACE est isocèle : $AC = AE$. Or le théorème de Thalès permet d'affirmer : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$.

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois cotés du triangle, donc centre d'un cercle tangent aux trois côtés, appelé *cercle inscrit* dans le triangle. Les cercles exinscrits sont eux aussi tangents aux trois côtés du triangle, mais leurs centres sont extérieurs au triangle, intersection d'une bissectrice intérieure et deux bissectrices extérieures.

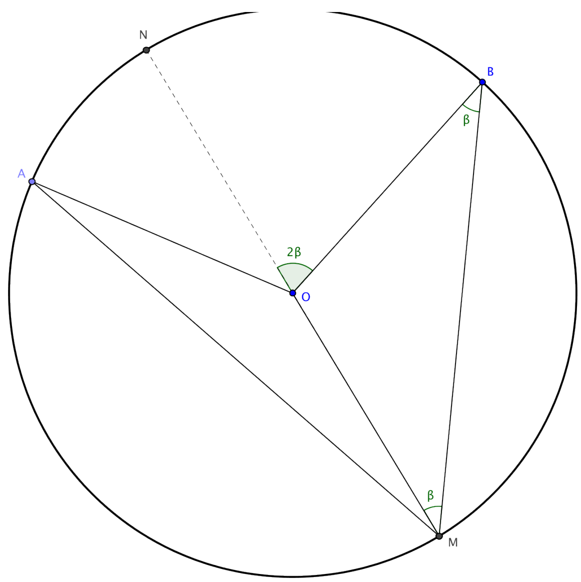
Exercice 2 Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On suppose que $CA + AI = BC$ (relation entre les longueurs). Déterminer la valeur du rapport d'angles : $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On rappelle que I est le point d'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle ABC.



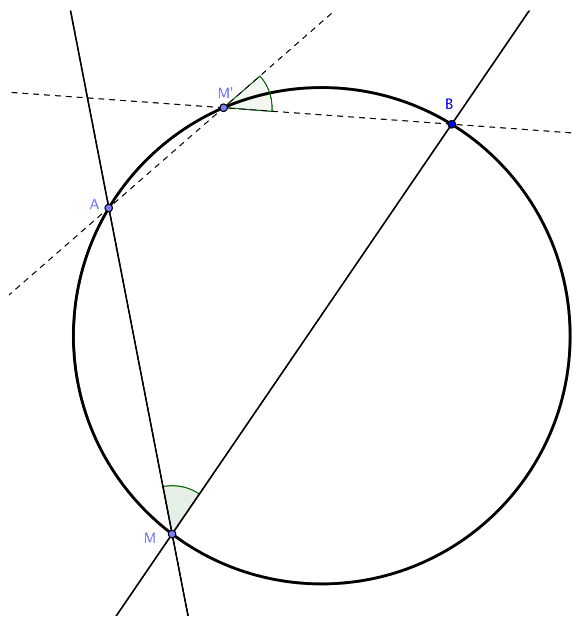
La relation de longueurs $CA + AI = BC$ est difficile à exploiter dans la mesure où CA, AI et BC sont sur trois droites non parallèles ; il faudrait calculer la longueur de ces trois segments, ce qui n'est pas immédiat. En revanche, si l'on prolonge la droite (CA) au delà de A pour y placer un point J tel que $AI = AJ$, on voit apparaître beaucoup de choses : d'abord un triangle isocèle AIJ, qui prouve que $\widehat{AIJ} = \widehat{AJI}$, donc $\widehat{CAI} = 2 \times \widehat{AJI}$, en outre l'égalité de longueurs : $CJ = CA + AJ = CA + AI = CB$. Donc la symétrie par rapport à la bissectrice (CI), qui envoie la droite (CB) sur (CA), envoie plus précisément le point B en J. Il transforme donc l'angle $\widehat{CBI}$, que nous appellerons β, en $\widehat{CJI}$. Il en résulte que $\widehat{CAI} = 2\beta$. Or (AI) et (BI) sont bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBA}$ respectivement, d'où $\widehat{BAC} = 4\beta$ et $\widehat{CBA} = 2\beta$, soit $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$.

Angle inscrit et angle au centre

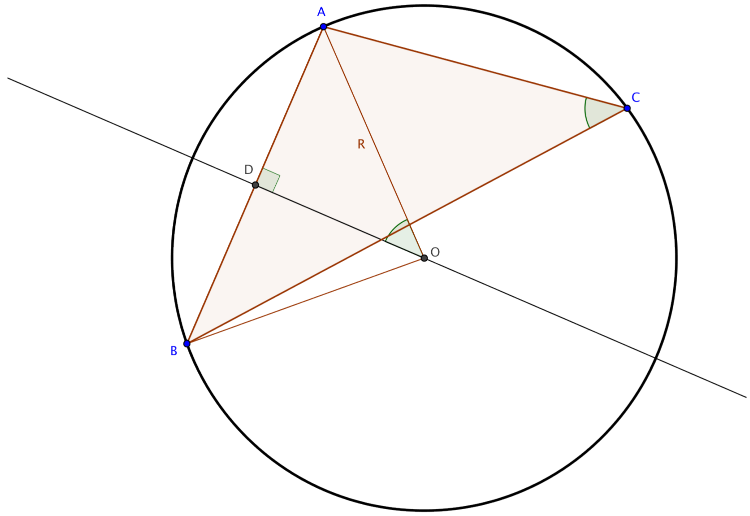


Considérons un cercle de centre O, A, B et M trois points du cercle. La droite (MO) recoupe le cercle en N. Il y aurait en principe trois ou quatre cas de figure à envisager, mais comme il s'agit de démonstrations quasiment identiques d'un résultat classique, nous nous limiterons à un cas. Sur cette figure, les triangles AMO étant isocèle, $\widehat{AON} = 2\widehat{AMO}$ et $\widehat{NOB} = 2\widehat{OMB}$. Il en résulte que $\widehat{AOB} = \widehat{AON} + \widehat{NOB} = 2(\widehat{AMO} + \widehat{OMB}) = 2\widehat{AMB}$. Ce qui peut s'énoncer : l'angle inscrit (en l'occurrence $\widehat{AMB}$) est égal à la moitié de l'angle au centre (en l'occurrence $\widehat{AOB}$). Et comme l'angle au centre est indépendant de M, l'angle inscrit est lui aussi indépendant de M.

Mais manipuler des angles et, plus encore, des « demi-angles », n'est pas si simple que cela. Si M est sur le « petit arc » AB, l'angle au centre à considérer est l'angle rentrant $\widehat{AOB}$. Ce qui explique que si M et M' sont de part et d'autre de la droite (AB), les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AM'B}$ soient non pas égaux mais supplémentaires. Il y a deux manières de contourner cette difficulté : soit en comparant l'angle inscrit non pas à l'angle au centre, mais à l'arc intercepté (si M est sur le petit arc AB, il intercepte le grand arc, et inversement). L'angle inscrit est alors toujours égal à la moitié de l'arc intercepté. Soit en considérant non pas des angles au sens habituel du terme, mais des *angles de droites* : l'angle de droite (AM, BM) est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite (AM) pour la faire coïncider avec (BM). Cet angle est totalement indépendant du point M, dès lors que M est sur le cercle. Si M n'est pas sur le cercle, la droite (AM) recoupe le cercle en P, et on ne peut pas avoir $(AM, BM) = (AP, BP)$. On en déduit le résultat fondamental : *quatre points* A, B, M, M' *sont* cocycliques*, c'est-à-dire appartiennent à un même cercle, si et seulement si les angles de droites* (AM, BM) *et* (AM', BM') *sont égaux.*



Dernière remarque : soit Δ la tangente au cercle en A. L'angle formé par Δ et la corde $[AB]$ est un cas limite d'angle inscrit interceptant le même arc AB, il est égal aux autres angles inscrits interceptant AB, mais la démonstration peut se faire différemment, en utilisant seulement le fait que le triangle AOB est isocèle et que Δ est perpendiculaire à (AB).

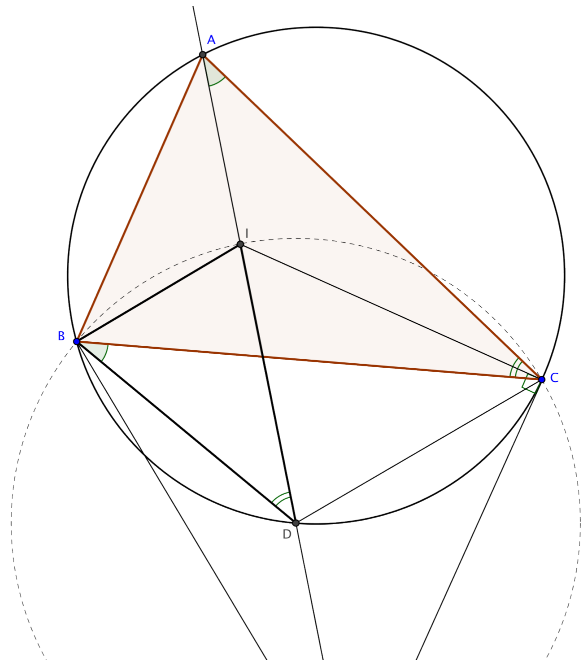


Loi des sinus : Soit A et B deux points d'un cercle de centre O, D le milieu de $[AB]$. Le triangle AOB étant isocèle, (OD) est en même temps médiane, hauteur, médiatrice et bissectrice du triangle. Or si l'on appelle R le rayon du cercle, $OA = R$ donc $AB = 2AD = 2R\sin\widehat{AOD}$. Comme $\widehat{AOD}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$, pour tout point M du cercle, valent tous deux la moitié de $\widehat{AOB}$, $AB = 2R\sin\widehat{AMB}$. En d'autres termes, si ABC est un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit, $BC = 2R\sin\widehat{A}$, $CA = 2R\sin\widehat{B}$, $AB = 2R\sin\widehat{C}$. Ou encore, en posant (notation habituelle) $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}.$$

C'est habituellement sous cette forme que cette relation s'appelle *loi des sinus*.
Exercice 3 Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. La bissectrice (AI) recoupe le cercle circonscrit en D. Montrer que le cercle de centre D passant par I passe par B et C. Ce cercle recoupe (AI) en J. Montrer que J est centre d'un cercle exinscrit.

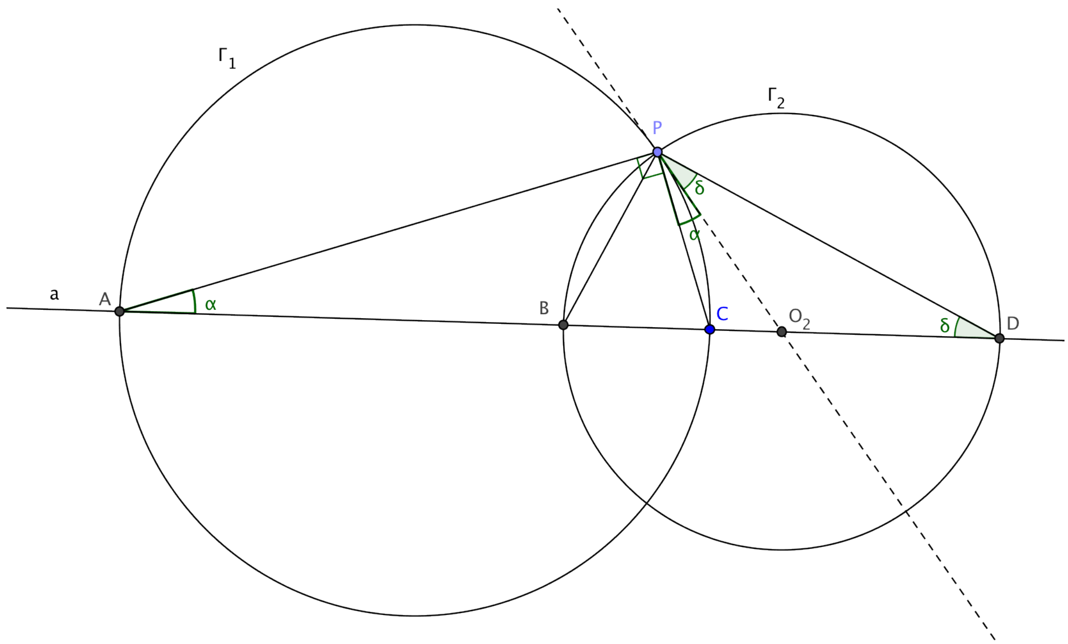
Solution de l'exercice 3 Rappelons que I est l'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle. Il suffit de démontrer que les triangles DBI et DCI sont isocèles, en prouvant qu'ils ont chacun deux angles égaux.



On a $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$, or $\widehat{IBC}$ est la moitié de l'angle $\widehat{B}$, en appelant $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les trois angles du triangle ABC. L'angle inscrit $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$, d'où $\widehat{IBD} = \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$, alors que $\widehat{BDI} = \widehat{BDA} = \widehat{BCA} = \widehat{C}$. Dès lors, comme $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, le troisième angle $\widehat{BID}$ vaut lui aussi $\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$, ce qui prouve bien que DBI est isocèle. On démontrerait pareillement que DCI est lui aussi isocèle, donc le cercle de centre D passant par I passe aussi par B et C.

Pour la seconde question, comme les angles $\widehat{IBJ}$ et $\widehat{ICJ}$ interceptent chacun un demi-cercle (en d'autres termes : $[IJ]$ est diamètre d'un cercle passant par B et C), ce sont deux angles droits. (BJ), perpendiculaire à (BI), est bissectrice extérieure de $\widehat{B}$, tout comme (CJ) est bissectrice extérieure de $\widehat{C}$. Donc J, intersection d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures, est centre d'un cercle exinscrit.

Exercice 4 Soient A, B, C et D quatre points distincts, alignés dans cet ordre, sur une droite Δ, Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ et P un de leurs points d'intersection. On suppose que la tangente en P à Γ_1 passe par le centre O_2 de Γ_2. Montrer que (PB) et (PD) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{APC}$.



<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Appelons α et δ les angles $\widehat{CAP}$ et $\widehat{PDB}$. Comme $[AC]$ est un diamètre de Γ_1, et $[BD]$ un diamètre de Γ_2, $\widehat{APC}$ et $\widehat{BPD}$ sont droits. Il en résulte que $\widehat{PCA} = 90^\circ - \alpha$ et $\widehat{DBP} = 90^\circ - \delta$, donc que $\widehat{BPC} = \alpha + \delta$. Par ailleurs, O_2 étant le centre du cercle Γ_2, le triangle O_2PD est isocèle, donc $\widehat{O_2PD} = \delta$. Mais comme (PO_2) est tangente à Γ_1, $\widehat{CPO_2}$ est un angle inscrit de Γ_1 interceptant le même arc PC que $\widehat{CAP}$, donc $\widehat{CPO_2} = \alpha$. On en déduit que $\widehat{CPD} = \alpha + \delta = \widehat{BPC}$. (PC) est donc bissectrice de $\widehat{BPD}$. N'oublions pas que $\widehat{BPD}$ est droit, d'où $\widehat{BPD} = 45^\circ$; $\widehat{APC}$ est lui aussi droit, donc $\widehat{APB}$ est lui aussi égal à 45°, ce qui implique que (PB) bissectrice de $\widehat{APC}$. Quant à (PD), elle est perpendiculaire à (PB), ce qui prouve qu'elle est elle aussi bissectrice de $\widehat{APC}$, car les deux bissectrices d'un angle sont perpendiculaires.