DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Joon KWON
STAGE : Montpellier 2014

Principe de l'extremum

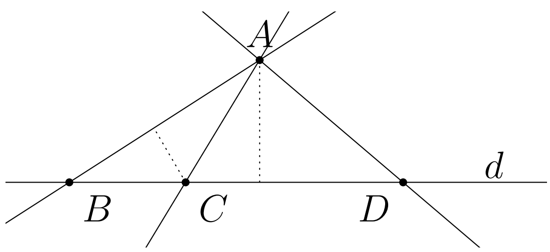
1 Préliminaires

On rappelle qu'un ensemble fini de nombres réels contient toujours un maximum et un minimum ; et qu'un ensemble éventuellement infini d'entiers naturels contient toujours un minimum.

Le principe de l'extremum est une heuristique qui consiste à considérer un objet pour lequel une certaine quantité associée est minimale ou maximale.

Exemple 1. *On se donne n points du plan. On suppose que pour deux points quelconques distincts, il en existe un troisième aligné avec les deux premiers. Montrer que tous les points sont alignés.*

Démonstration. Pour chaque paire de points distincts, traçons la droite passant par ces deux points. Supposons par l'absurde que tous les points ne sont pas alignés. Autrement dit, tous les points ne sont pas sur une même droite. Il existe donc des distances entre les points et les droites qui sont strictement positives. Considérons donc le point et la droite qui ont la plus petite distance strictement positive. Appelons A ce point et d la droite. Par d, il passe par hypothèse au minimum trois points B, C et D, qu'on place comme sur la figure.



On voit alors que la distance de C à la droite (AB) est strictement inférieure à celle entre A et d, ce qui est absurde. Conclusion, tous les points sont alignés. $\square$

2 Exercices

Exercice 1 On se donne des points dans le plan tels que chaque point soit le milieu de deux autres. Montrer que les points sont en nombre infini.

Exercice 2 On affecte une valeur entière positive ou nulle à chaque point à coordonnées entières du plan de sorte que chaque valeur soit la moyenne de ses quatre voisines. Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 3 On considère un ensemble fini de droites parmi lesquelles il n'existe pas deux droites parallèles. On suppose également qu'en tout point d'intersection passe au moins trois droites. Montrer que toutes les droites se croisent en un même point.

Exercice 4 On se donne n points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle de surface inférieure ou égale à 1. Montrer que les n points sont tous dans un triangle de surface $\leqslant 4$.

Exercice 5 On se donne $2n$ points du plan de sorte que trois ne soient jamais alignés. Exactement n de ces points sont des maisons $M = \{M_1, \ldots, M_n\}$ et les n points restants sont des puits $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Montrer qu'il est possible d'associer bijectivement les puits aux maisons de sorte qu'en reliant chaque puits en ligne droite à sa maison, aucune des routes ainsi construites ne se croise.

Exercice 6 On considère un ensemble fini de personnes. Chacune de personnes a au plus trois ennemis. Montrer qu'on peut séparer ces personnes en deux groupes, de sorte que chaque personne ait au plus un ennemi dans son groupe.

Exercice 7 On place les n^2 entiers $1, 2, \ldots, n^2$ dans un tableau $n \times n$ (sans répétition). On dit que deux cases sont voisines si elles ont au moins un point en commun. Prouver qu'il existe deux cases voisines dont la différence des valeurs vaut au moins $n + 1$.

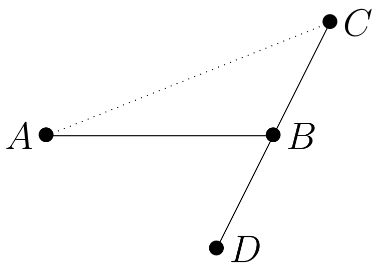
Exercice 8 Dans un tournoi, chaque compétiteur rencontre chaque autre compétiteur exactement une fois. Il n'y a pas de match nul. A l'issue de la compétition, chaque joueur fait une liste qui contient les noms des joueurs qu'il a battus, ainsi que les noms des joueurs qui ont battu les joueurs qu'il a battus. Montrer qu'il existe une liste qui contient les noms de tous les autres joueurs.

Exercice 9 On considère un ensemble fini de personnes E. Deux personnes dans E ayant le même nombre d'amis n'ont aucun ami commun dans E. Montrer qu'il existe une personne dans E qui possède exactement un ami dans E.

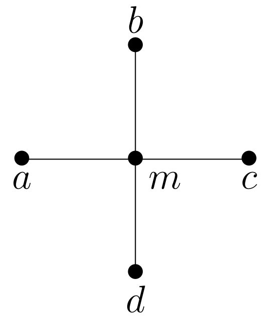
Exercice 10 On a placé n voitures identiques sur une piste circulaire. Elles ont juste assez d'essence à elles toutes pour faire un tour complet. Montrer qu'une des voitures peut réaliser ce tour complet en prenant l'essence des voitures qu'elle rencontre.

3 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1 On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de points. On considère un couple de points (A, B) tel que la distance AB soit maximale. B est par hypothèse le milieu de deux points qu'on nommera C et D. On a alors $AC > AB$ ou $AD > AB$, ce qui contredit la maximalité de AB. Conclusion, les points sont bien en nombre infini.



Solution de l'exercice 2 Les valeurs étant des entiers naturels, on peut considérer m la plus petite de ces valeurs. On se place un point ayant cette valeur. On note a, b, c et d les valeurs de ses voisins.



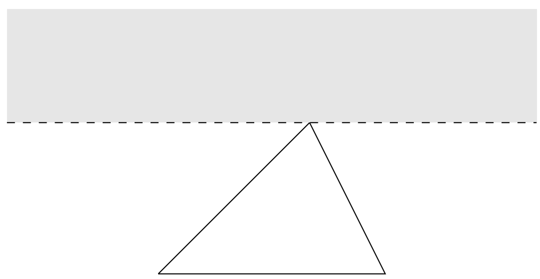
On a par hypothèse $m = (a + b + c + d)/4$, et m étant la valeur minimale, elle est inférieure ou égale aux quatre autres. Si l'une des quatre valeurs, disons a, est strictement supérieure à m, on a :

$$m = \frac{a+b+c+d}{4} > \frac{m+b+c+d}{4} \geqslant \frac{m+m+m+m}{4} = m,$$

et donc $m > m$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $m = a = b = c = d$. En chacun des voisins peut s'appliquer ce même raisonnement, et on prouve de proche en proche que les valeurs sont égales à m en tout point.

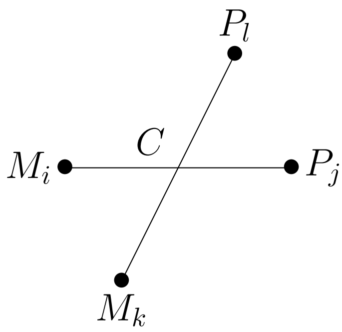
<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Il s'agit d'une variante de l'exercice donné en exemple. On s'appuiera sur la même figure. On suppose par l'absurde que toutes les droites ne se croisent pas en un même point. Il existe alors des points d'intersection à distance strictement positive d'une droite. On considère la plus petite de ces valeurs, en notant A le point d'intersection et d la droite concernés. Par hypothèse, il passe en A trois droites non parallèles à d. Elles croisent donc d en trois points B, C et D. Deux de ces points, disons B et C, se trouvent du même côté du projeté orthogonal de A sur d. La distance de C à la droite passant par A et B est alors strictement inférieure à la distance entre A et d, ce qui contredit la minimalité de cette dernière. Conclusion, toutes les droites se croisent en un même point.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On considère trois points A, B, C formant un triangle d'aire maximale. On trace la droite parallèle à un des côtés et passant par le troisème point.

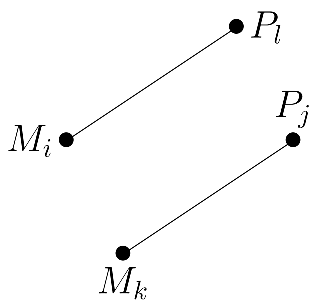


On sait qu'il n'y a pas de point dans la zone grise. En effet, un tel point formerait avec les deux points du bas du triangle un triangle d'aire plus grande que le premier (ils auraient la même base, et une plus grande hauteur) ; cela contredirait la maximalité de l'aire du premier. Le même raisonnement avec les deux autres côtés laisse une zone *autorisée* triangulaire, formée de 4 triangles semblables au premier, et donc d'aire inférieure ou égale à 4.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On considère un tracé de routes pour lequel la somme des longueurs des routes est minimale. Montrons que les routes ne se croisent alors pas. Supposons par l'absurde que deux routes se croisent et notons C le point d'intersection.



On peut alors modifier ces deux routes de la manière suivante.



Montrons que ces deux nouvelles routes sont de longueur strictement inférieure aux deux routes initiales. L'inégalité triangulaire appliquée aux points M_i, C et P_l donne :

$$M_iP_l < M_iC + CP_l,$$

où l'inégalité est stricte car C n'est pas sur la droite (M_iP_l) (les maisons et les puits n'étant pas hypothèse jamais alignés). Le même raisonnement appliqué aux points M_k, C, P_j donne :

$$M_kP_j < M_kC + CP_j.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient :

$$M_iP_l + M_kP_j < M_iC + CP_l + M_kC + CP_j = M_iP_j + M_kP_l.$$

Ainsi, cette modification diminue strictement la longueur totale des routes, contredisant la minimalité de la longueur du tracé initial des routes. Conclusion, le tracé initial ne contient pas de croisement.

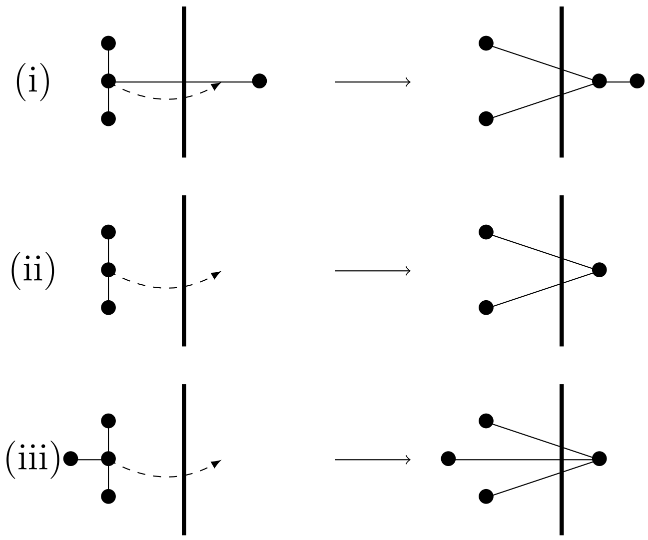
Solution de l'exercice 6 Il est sous-entendu dans l'énoncé que la relation *être ennemi* est réciproque. On considère une répartition en deux groupes pour laquelle le nombre de relations ennemies internes aux groupes est minimal. Montrons que chaque personne a alors au plus un ennemi dans son groupe. Supposons par l'absurde qu'il existe une personne ayant strictement plus de deux ennemis dans son groupe. Il existe trois cas de figure.

(i) Elle a deux ennemis dans son groupe, et un dans l'autre ;

(ii) Elle a deux ennemis dans son groupe, et aucun dans d'autre ;

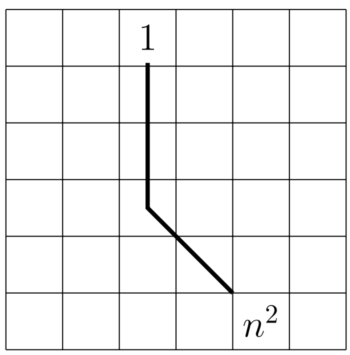
(iii) Elle a trois ennemis dans son groupe.

Nous allons voir que dans chacun de ces cas, le fait de changer cette personne de groupe réduit strictement le nombre total de relations internes aux groupes. Dans la figure suivante, on représente la personne concernée et ses ennemis.



Dans chaque cas, le nombre d'ennemis que la personne concernée a dans son groupe diminue strictement (de 1, 2 et 3 respectivement). Le fait de changer cette personne de groupe ne modifie que les relations représentées sur les figures ci-dessus. Ainsi, par cette modification, on obtient une nouvelle répartition ayant un nombre total de relations internes strictement inférieur à la répartition initiale, ce qui est absurde. Conclusion, chaque personne a dans la répartition initiale au plus un ennemi dans son groupe.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On peut supposer que $n \geqslant 2$ (si $n = 1$, il n'y a pas de cases voisines). On considère la case contenant 1 et celle contenant n^2. Il existe un chemin passant par au plus n cases voisines.



Notons $1 = c_1, c_2, , \ldots, c_{n-1}, c_n = n^2$ les valeurs des cases successives par lesquelles passe le chemin. Supposons par l'absurde que toutes les différences entre deux cases voisines sont inférieures ou égales à n. On a alors :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= c_n - c_1 \\ &= (c_n - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + \cdots + (c_2 - c_1) \\ &\leqslant |c_n - c_{n-1}| + |c_{n-1} - c_{n-2}| + \cdots + |c_2 - c_1| \\ &\leqslant \underbrace{n + \cdots + n}_{n-1 \text{ fois}} \\ &\leqslant n^2 - n, \end{aligned}$$

ce qui est absude car $n \geqslant 2$. Conclusion, il existe deux cases voisines dont les valeurs ont une différence supérieure ou égale à $n + 1$.

Solution de l'exercice 8 Appelons A le partipcipant qui a battu le plus grand nombre d'adversaires. Montrons qu'il a sur sa feuille les noms de tous les autres participants. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Il existe alors un participant B qui a battu A. B a sur sa feuille le nom de A et de tous ceux que A a battus. B a donc battu 1 adversaire de plus que A, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 9 Soit n le nombre maximal d'amis qu'une personne de E possède et soit A une telle personne. Tous les amis de A ont A comme ami commun, et ont donc tous un nombre d'amis différent. Ils sont au nombre de n, et ont chacun au moins un ami, A, et au plus n. Nécessairement, ils ont $1, 2, \ldots, n$ pour nombres d'amis. En particulier, il existe une personne ayant exactement 1 ami.

Solution de l'exercice 10 On place à un point arbitraire du circuit une voiture supplémentaire avec un réservoir suffisamment plein. On lui fait faire un tour complet en récupérant à chaque voiture l'essence qu'elle a. En le point où le niveau de son réservoir était le plus bas, il existe une voiture. Cette voiture pouvait faire le tour complet.