DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2013

Récurrence

- La Récurrence -

Le principe de récurrence est fondamentalement lié à la notion de nombre entier : chaque fois que l'on doit démontrer qu'un résultat est vrai pour tout entier à partir d'un certain rang, que ce soit en arithmétique, géométrie, algèbre... on peut être amené à raisonner par récurrence.

La démonstration par récurrence repose sur le fait que tout entier n possède un suivant $n+1$, et que si l'on "gravit marche après marche" l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, en partant de 0, en allant d'un entier au suivant et en recommençant indéfiniment, on parcourt ainsi intégralement $\mathbb{N}$.

On va donc démontrer qu'une propriété est vraie pour l'entier $n = 0$ (initialisation), puis que si elle est vraie pour un entier $n \geqslant 0$ quelconque, elle est encore vraie pour l'entier suivant $n+1$ (induction) : on déduit de cela que la propriété est vraie pour tout entier naturel n. C'est le raisonnement par récurrence.

On notera que les deux parties de la démonstration sont toutes deux importantes, même si la première est souvent assez évidente. Il ne faut pas oublier d'initialiser la récurrence, donc de démontrer que la propriété est vraie pour $n = 0$. On peut démarrer la récurrence en une valeur autre que 0, par exemple en $1, 2, \cdots$ ou K ; il faudra alors prouver (initialisation) que la propriété est vraie pour $n = K$, puis (induction) que pour $n \geqslant K$, si elle est vraie pour n elle l'est encore pour $n+1$.

On notera également que l'induction connait quelques variantes. Par exemple, il arrive que l'on ait à démontrer que si la propriété est vraie en outre pour tout entier $k \leqslant n$, alors elle est vraie pour $n+1$.

Exercice 1

Soient a, b et u trois réels, $a \neq 1$, et (u_n) une suite définie par : $u_0 = u$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = au_n + b$. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}$.

Exercice 2

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2-n} - \frac{1}{n^2+n} > \frac{2}{n^3}$

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{5}{4}$

Exercice 3

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un multiple de 2^n de n chiffres tous égaux à 1 ou 2.

Exercice 4

Soient n et a deux entiers strictement positifs, tels que $n \geqslant 2$ et $a \leqslant n!$. Montrer qu'il existe $k < n$ et k entiers $d_1, d_2, ...d_k$ deux à deux distincts divisant chacun $n!$ tels que $a = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$.

Exercice 5

On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par : $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Soit $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la racine positive de l'équation : $x^2 = x + 1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $F_{n+1} - \Phi F_n = \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$.

Exercice 6

$2n+1$ élèves sont placés de telle sorte que les distances entre deux d'entre eux sont toutes différentes. A un moment donné, chacun d'eux tire sur l'élève le plus proche de lui avec un pistolet à eau.

a) Montrer qu'il existe deux élèves qui se tirent mutuellement dessus,

b) Montrer qu'au moins un des élèves n'est pas visé.

Exercice 7

a) Soient quatre points d'un plan. Montrer qu'au moins un des quatre triangles qu'ils forment n'est pas acutangle (c'est-à-dire ayant tous ses angles strictement inférieurs à 90°).

b) Soient n points d'un plan, avec $n \geqslant 5$. Montrer qu'au plus 70% des triangles qu'ils forment sont acutangles.

Exercice 8

Montrer que pour toute paire d'entiers strictement positifs k et n, il existe k entiers strictement positifs (non nécessairement distincts) $m_1, m_2, \cdots, m_k$ tels que :

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

On commencera par montrer que si c'est vrai pour la paire k, n *c'est également vrai pour la paire* $k+1, 2n$

Solution de l'exercice 1

Comme le résultat doit être démontré pour tout $n \geqslant 0$, c'est en $n=0$ qu'on va l'initialiser.

Si $n=0$, $a^n=1$, ce qui donne bien $u_0=u$, conforme à la définition de (u_n) : l'initialisation est terminée.

Quant à l'induction : supposons que pour un $n \geqslant 0$ donné, $u_n = a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}$ (hypothèse de récurrence). Par définition, $u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}\right) + b = a^{n+1}u + b\frac{a^{n+1}-a}{a-1} + b\frac{a-1}{a-1} = a^{n+1}u + b\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 2

a) L'initialisation est immédiate. Pour $n=1$, l'inégalité est manifestement vraie : $1 \leqslant 2-\frac{1}{1}$. Supposons maintenant (hypothèse de récurrence) que, pour un certain n, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}$. Il en résulte que : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$. Il suffit de prouver que ce second membre est lui-même inférieur à $2-\frac{1}{n+1}$ pour conclure que l'inégalité est vraie au rang suivant $n+1$, donc, par récurrence, qu'elle est vraie pour tout n. Or $\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(2-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$, d'où le résultat.

b) Il s'agit là d'un simple calcul qui nous servira pour la question suivante : $\frac{1}{n^2-n}-\frac{1}{n^2+n} = \frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{(n^2-n)(n^2+n)} = \frac{2n}{n^4-n^2} = \frac{2}{n^3-n} > \frac{2}{n^3}$ car $n^3-n < n^3$. On remarquera que $n^2-n=(n-1)n$ et $n^2+n=n(n+1)$.

c) En s'inspirant du a), on va montrer non pas directement que la somme est inférieure à $\frac{5}{4}$, mais qu'elle est inférieure à $\frac{5}{4}$ moins une fonction de n qui, lorsqu'on ajoute le terme suivant de la somme, fait apparaître la même fonction au rang suivant. Pour s'inspirer plus directement de la question b), on va supposer que la relation est vraie au rang $n-1$ et montrer qu'elle est vraie pour n. Concrètement, la relation que l'on va chercher à démontrer (hypothèse de récurrence) est : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{5}{4}-\frac{1}{2(n^2+n)}$. Commençons par initialiser la récurrence : pour $n=1$, $1 \leqslant \frac{5}{4}-\frac{1}{4}$. C'est pour que cette initialisation soit vraie qu'on a choisi la constante $\frac{5}{4}$, car cette constante ne joue aucun rôle dans la partie induction. Si l'on avait démarré notre récurrence en $n=2$, on aurait pu choisir une autre constante, $\frac{29}{24}$ qui est donc une meilleure majoration de la somme des inverses des cubes.

Mais terminons la démonstration de notre récurrence : si la relation $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\leqslant \frac{5}{4}-\frac{1}{2(n^2+n)}$ est vraie au rang $n-1$, donc si $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}\leqslant\frac{5}{4}-\frac{1}{2(n^2-n)}$, alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\leqslant \frac{5}{4}-\frac{1}{2(n^2-n)}+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}-\frac{1}{2(n^2+n)}$ d'après le b), donc l'inégalité est vraie au rang suivant n, et par récurrence elle est vraie pour tout entier n.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Pour $n=1$, 2 est multiple de 2. Essayons les premières valeurs de n : pour $n=2$, 12 est multiple de 4, puis 112 de 8, 2112 de 16, 22112 de 32 etc... L'idée est, pour passer au rang suivant, d'ajouter un premier chiffre, 1 ou 2. En effet, si a_n est divisible par 2^n, a_n ayant n chiffres tous égaux à 1 ou 2 (hypothèse de récurrence), les deux nombres : 10^n+a_n et $2\cdot 10^n+a_n$ ont tous deux $n+1$ chiffres tous égaux à 1 ou 2. Il reste donc à prouver que l'un des deux est multiple de 2^{n+1}.

Or si l'on pose $a_n=2^n\times b_n$, $10^n+a_n=2^n\times(5^n+b_n)$: si b_n est impair, 5^n+b_n est pair, donc 10^n+a_n est divisible par 2^{n+1}. Maintenant, si b_n est pair, c'est : $2\cdot 10^n+a_n=2^n\times(2\cdot 5^n+b_n)$ qui est divisible par 2^{n+1} car $2\cdot 5^n+b_n$ est pair. Que b_n soit pair ou impair, on peut trouver un a_{n+1} de $n+1$ chiffres tous égaux à 1 ou 2 qui soit divisible par 2^{n+1} : c'est précisément ce qu'on devait démontrer.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Pour initialiser la récurrence, on vérifie que la relation est vraie pour $n=0$: $F_1-\Phi F_0=1-0=\left(\frac{-1}{\Phi}\right)^0$. On peut encore, bien que ce ne soit pas indispensable, vérifier cette relation au rang $n=1$: $F_2-\Phi F_1=1-\Phi=\left(\frac{-1}{\Phi}\right)^1$. Le principal avantage de cette seconde vérification est de nous rappeler une formule dont nous aurons besoin par la suite : $1-\Phi=\frac{-1}{\Phi}$.

Supposons maintenant (hypothèse de récurrence) qu'au rang n on ait : $F_{n+1}-\Phi F_n=\left(\frac{-1}{\Phi}\right)^n$, et déduisons en cette même relation au rang suivant $n+1$. Par définition de la suite de Fibonacci, $F_{n+2}-\Phi F_{n+1}=(F_{n+1}+F_n)-\Phi F_{n+1}=(1-\Phi)F_{n+1}+F_n$. Or, nous venons de le voir : $1-\Phi=\frac{-1}{\Phi}$, donc $F_{n+2}-\Phi F_{n+1}=\frac{-1}{\Phi}(F_{n+1}-\Phi F_n)=\left(\frac{-1}{\Phi}\right)^{n+1}$ puisque, par hypothèse de récurrence, $F_{n+1}-\Phi F_n=\left(\frac{-1}{\Phi}\right)^n$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

a) Parmi toutes les distances entre deux élèves, deux à deux distinctes par hypothèse, l'une est plus petite que toutes les autres. Les deux élèves situés à cette distance minimale se tirent dessus mutuellement.

b) Initialisons la récurrence : pour $2n + 1 = 3$, parmi trois élèves, deux se tirent mutuellement dessus, et personne ne tire sur le troisième, qui n'est donc pas visé. Le résultat est bien vrai.

Maintenant, considérons $2n + 3$ élèves. Deux d'entre eux, A et B, se tirent mutuellement dessus. Parmi les $2n + 1$ autres, soit l'un au moins tire sur A ou B, et au maximum $2n$ élèves autres que A et B sont visés, l'un au moins n'est pas visé. Soit les $2n + 1$ autres se tirent dessus entre eux, et on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour affirmer que l'un d'eux au moins n'est pas visé.

On notera que ce résultat n'est vrai que pour un nombre impair d'élèves : pour un nombre pair, il est possible de les positionner de sorte qu'ils se tirent mutuellement dessus deux à deux.

Solution de l'exercice 6

a) Il s'agit d'une question élémentaire de géométrie, qui nous sera utile pour la question b. Soit les quatre points forment un quadrilatère convexe, auquel cas, la somme des quatre angles du quadrilatère étant égale à $360\,^\circ$, l'un au moins des quatre angles est supérieur ou égal à $90\,^\circ$, donc l'un au moins des quatre triangles n'est pas acutangle. Soit un des points est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres, auquel cas les trois angles de sommets ce point ont pour somme $360\,^\circ$, l'un au moins de ces trois angles est supérieur ou égal à $120\,^\circ$, a fortiori à $90\,^\circ$.

b) Initialisons la récurrence avec cinq points. Ils déterminent dix triangles. Mais ils déterminent également cinq sous-ensembles de quatre points. Chaque triangle appartient à deux sous-ensembles de quatre points, et chaque sous-ensemble de quatre points contient au moins un triangle non acutangle. Donc en comptant deux fois chaque triangle, on en a au moins cinq non acutangles. Il y en a donc au moins 2,5 parmi 10 non acutangles. Mais comme le nombre de triangles non acutangles est nécessairement entier, il y en a au moins 3 parmi 10 non acutangles, donc au plus 70% de triangles acutangles.

L'induction va consister à prouver que la proportion maximale p_n de triangles acutangles ne peut que diminuer quand n augmente. Considérons $n + 1$ points. Ils contiennent $n + 1$ sous-ensembles de n points. Dans chaque sous-ensemble, il y a : $\binom{n}{3}$ triangles, dont au plus $p_n \cdot \binom{n}{3}$ acutangles. Si l'on additionne, on trouvera chaque triangle $n - 2$ fois. Donc le nombre de triangles acutangles parmi les $n + 1$ points est au maximum : $p_n \cdot \binom{n}{3} \cdot \frac{n+1}{n-2} = p_n \cdot \binom{n+1}{3}$: comme il y a $\binom{n+1}{3}$ triangles, la proportion $p_{n+1} \leqslant p_n$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 7

Cet exercice est le problème 1 de l'Olympiade Internationale 2013. C'est une variante de la démonstration par récurrence.

Commençons, comme proposé, par prouver que si c'est vrai pour k et n, c'est vrai pour $k+1$ et $2n$. Pour k, n, le membre de gauche s'écrit : $\frac{2^k+n-1}{n}$. Pour $k+1, 2n$: $\frac{2^{k+1}+2n-1}{2n}$. Le quotient des deux est : $\frac{2^{k+1}+2n-1}{2^{k+1}+2n-2}$. En d'autres termes, si $m_{k+1} = 2^{k+1}+2n-2$, $1+\frac{2^{k+1}-1}{2n} = \left(1+\frac{2^k-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{m_{k+1}}\right)$. Donc si le résultat est vrai pour k et n, il est encore vrai, avec un facteur de plus, pour $k+1$ et $2n$.

On démontre pareillement que si c'est vrai pour k et n, c'est vrai pour $k+1$ et $2n-1$, avec un $(k+1)$-ème facteur. $1+\frac{2^{k+1}-1}{2n-1} = \frac{2^{k+1}+2n-2}{2n-1} = \left(1+\frac{2^k-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$.

Maintenant, il faut initialiser la récurrence : pour $k = 1$, le résultat est immédiat quel que soit n, avec $m_1 = n$. Pour $n = 1$, il est tout aussi immédiat quel que soit k avec $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 1$. Donc d'après ce qu'on vient de démontrer, il est encore vrai pour $n = 2$ et $k \geqslant 2$. Mais il est aussi vrai pour $n = 2$ et $k = 1$. On en déduit qu'il est vrai pour $n = 4$ et $n = 3$ et $k \geqslant 2$, à quoi s'ajoute le cas démontré séparément $n = 4$ ou 3 et $k = 1$. Plus généralement, si (pour $N \geqslant 1$) le résultat est vrai pour tout entier $n \leqslant 2N$, et tout k, alors il est vrai en particulier pour $n = N+1$, donc pour $n = 2N+2$ et $p = 2N+1$ et $k \geqslant 2$. Mais il est vrai aussi, par ailleurs, pour $n = 2N+2$ et $p = 2N+1$ et $k = 1$. Donc en définitive, s'il est vrai pour tout entier $n \leqslant 2N$ et tout k, il est vrai pour tout entier $n \leqslant 2N+2$ et tout k, donc par récurrence il est vrai pour tout n et tout k.