DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Theresia EISENKÖLBL
STAGE : Montpellier 2012

Equations fonctionnelles

- Énoncés des exercices vus en cours -

Exercice 1 (Cauchy, trois fonctions) Trouver toutes les fonctions $f, g, h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{Q}$:

$$f(x) + g(y) = h(x + y).$$

Exercice 2 (Cauchy, positif) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 3 (Cauchy multiplicatif sur $\mathbb{N}$) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{N}$:

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Exercice 4 (OIM 1990) Trouver une fonctions $f, g, h : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*$:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

Exercice 5 (Substitutions cycliques 1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$f(x) = 2f(1 - x) + \frac{1 - 3x}{x(1 - x)}.$$

Exercice 6 (Substitutions cycliques 2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}.$$

Exercice 7 (Itérations 1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(f(n)) = n + 1?$$

Exercice 8 (Itérations 2) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(f(n)) = n^2?$$

Exercice 9 (Itérations 3) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x)) = x^2 - 2?$$

Exercice 10 (Composition) Existe-t-il des fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f \circ g(x) = x^2 \text{ et } g \circ f(x) = x^3?$$

Exercice 11 (Bonus) Trouver toutes les fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) + f(n + g(n)) = f(n + 1).$$

Solution de l'exercice 11 On constate que $f(n+1) = f(n) + f(n + g(n)) \geqslant f(n)$, alors la fonction f est croissante.

Similairement, on trouve que $f(n+1) \geqslant f(n + g(n))$.

Si $g(n) \geqslant 1$, la croissance de f implique qu'on a deja $f(n+1) = f(n+g(n))$, donc $f(n) = f(n+1) - f(n + g(n)) = 0$.

Donc, on a montré que pour chaque n, soit $g(n) = 0$, soit $f(n) = 0$.

Cas 1 : $f(n) \equiv 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas, l'équation fonctionnelle est correcte, on peut choisir la fonction g librement.

Cas 2 : Il existe n_0 qui est le plus petit nombre naturel tel que $f(n_0) \neq 0$.

Comme f est croissante, $f(n) \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$, donc $g(n) = 0$ pour $n \geqslant n_0$.

Donc, pour $n \geqslant n_0$ l'équation fonctionnelle devient $2f(n) = f(n+1)$, alors $f(n) = f(n_0) \cdot 2^{n-n_0}$ pour $n \geqslant n_0$.

Il reste à déterminer les valeurs de $g(n)$ pour $n < n_0$.

Pour $n = n_0 - 1$, l'équation fonctionnelle donne

$$\begin{aligned} f(n_0 - 1) + f(n_0 - 1 + g(n_0 - 1)) &= f(n_0) \\ 0 + f(n_0 - 1 + g(n_0 - 1)) &= f(n_0) \end{aligned}$$

Mais comme n_0 est le seul argument où f prend la valeur $f(n_0)$, on a $n_0 - 1 + g(n_0 - 1) = n_0$ et donc

$$g(n_0 - 1) = 1.$$

Pour $n < n_0 - 1$, l'équation fonctionnelle donne $0 + f(n + g(n)) = 0$. Donc, il faut juste assurer que $n + g(n) < n_0$.

Conclusion : On a trouvé la solution triviale $f(n) \equiv 0$, g arbitraire et la famille des solutions avec paramètres $n_0, c \in \mathbb{N}$ et $c_k < n_0 - k$:

$$f(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_0 \\ c \cdot 2^{n-n_0} \text{ si } n \geqslant n_0 \end{cases}$$
$$g(n) = \begin{cases} c_k \text{ si } n < n_0 - 1 \\ 1 \text{ si } n = n_0 - 1 \\ 0 \text{ si } n \geqslant n_0 \end{cases}$$