DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2012

Principe des tiroirs

- **Principe des tiroirs** -

Le principe des tiroirs semble très évident lorsqu'on l'énonce, pourtant c'est un principe étonnamment puissant, utilisé dans un grand nombre de démonstrations mathématiques.

Si l'on place plus de n objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins deux objets.

Il est important que le nombre d'objets soit strictement supérieur au nombre de tiroirs, sinon on pourrait placer un objet par tiroir. Il faut donc compter précisément le nombre d'objets et le nombre de tiroirs pour pouvoir appliquer ce principe.

La première utilisation mathématique de ce principe des tiroirs date du milieu du XIX °siècle. Il s'agissait de prouver que l'écriture décimale d'une fraction $\frac{p}{q}$ était périodique, de période strictement inférieure à q. Le résultat était déjà connu par ailleurs, mais avec une démonstration beaucoup plus laborieuse. Là, il suffit d'observer le processus de division : par exemple, si l'on divise 5 par 7, dans 50 il va 7 fois 7, il reste 1. Dans 10 il va 1 fois 7, il reste 3. Dans 30 il va 4 fois 7, il reste 2. Dans 20 il va 2 fois 7, il reste 6, et ainsi de suite... Les restes sont tous compris entre 0 et $q-1$, et si l'un des restes est nul, la division s'arrête : le quotient est de période 1 puisqu'il n'y a plus que des 0 à partir d'un certain rang. Sinon, parmi q restes consécutifs, compris entre 1 et $q-1$, au moins deux sont égaux, et à partir du moment où deux restes sont égaux les suivants le sont également, d'où la périodicité.

Le principe des tiroirs admet une variante : si l'on place dans n tiroirs strictement plus de kn objets, au moins un tiroir contiendra au moins $k+1$

objets. Un exemple tout bête : chaque Parisien a au plus 300 000 cheveux, or il y a 3 000 000 de Parisiens. On en déduit qu'on peut trouver dix Parisiens ayant le même nombre de cheveux. Les tiroirs, c'est les nombres de cheveux, et les objets, les Parisiens. Attention qu'il y a 300 001 tiroirs, à savoir tous les nombres entre 0 et 300 000. Pour pouvoir affirmer qu'on peut trouver onze Parisiens ayant le même nombre de cheveux, il faut qu'il y ait strictement plus que $10\times$ 300 001 Parisiens, donc au moins 3 000 011.

- Énoncés des exercices vus en cours -

Exercice 1

Un grand maître joue au moins une partie d'échecs chaque jour, mais au plus dix chaque semaine. Montrer que parmi six semaines consécutives, on peut trouver une période de n journées consécutives au cours desquelles il aura joué exactement 21 parties.

Exercice 2

Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe un multiple non nul de n d'au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 3

On choisit dix entiers quelconques de deux chiffres, donc entre 10 et 99. Montrer que parmi eux, on peut trouver deux sous-ensembles disjoints d'entiers de même somme.

Exercice 4

On colorie chaque point du plan en rouge ou bleu.

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points du plan de cette même couleur distants de x.

b) Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel $x > 0$, on puisse trouver deux points du plan de cette même couleur distants de x.

Exercice 5

On place 51 points dans un carré de côté 1, de manière quelconque. Montrer qu'on peut trouver un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ contenant au moins trois d'entre eux (le cercle peut déborder le carré).

Exercice 6

On considère dix entiers quelconques, $a_1, a_2, ... a_{10}$. Montrer qu'on peut choisir, parmi $\{-1, 0, 1\}$, dix nombres $b_1, b_2, ... b_{10}$ non tous nuls tels que : $b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_{10} a_{10}$ soit divisible par 1000.

- Solutions -

Solution de l'exercice 1

Appelons $a_1, a_2, ...a_k...$ le nombre de parties qu'il a jouées le premier jour, les deux premiers jours, ... les k premiers jours. Cette suite est strictement croissante, car chaque jour il joue au moins une partie, et en six semaines il aura joué au plus 60 parties : $1 \leqslant a_1 < a_2 < ... < a_{42} \leqslant 60$. Si le grand maître joue 21 parties au cours des n premiers jours, $a_n = 21$. S'il joue 21 parties entre le $(k+1)$ème jour et le $(k+n)$ème jour, $a_{k+n} = a_k + 21$. Il va donc falloir comparer les termes de la suite $a_1, a_2, ...a_k, ...a_{42}$ à ceux de la suite : $21, a_1 + 21, a_2 + 21...a_k + 21...a_{42} + 21$, et montrer qu'un terme de la première suite est égal à un terme de la seconde suite. Or $21 < a_1 + 21 < a_2 + 21 < ... < a_{42} + 21 \leqslant 81$. Les 42 termes de la première suite et les 43 de la seconde suite, soit en tout 85 entiers, se trouvent tous entre 1 et 81 : d'après le principe des tiroirs, il y en a nécessairement deux qui sont égaux, et comme ce ne peut pas être deux termes de la première suite, strictement croissante, ni deux termes de la seconde suite, ce sont nécessairement un terme de la première suite égal à un terme de la seconde suite, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 2

Ici, les tiroirs seront les restes de la division par n, et les objets, des nombres dont la différence s'écrive seulement avec des 0 et des 1. Plus précisément, choisissons pour objets les nombres : $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, \dots, a_n = 11\dots,1$ qui s'écrivent avec $0, 1, 2, ...n$ chiffres 1. Il y a $n+1$ objets, et leurs restes de la division par n peuvent prendre n valeurs distinctes : $0, 1, ...n-1$. Donc deux de ces nombres auront même reste de la division par n : $a_i = nq_i + r$ et $a_j = nq_j + r$, et leur différence (en supposant $i > j$) : $a_i - a_j = n(q_i - q_j)$ sera divisible par n. Or cette différence s'écrira avec $(i-j)$ fois le chiffre 1 suivis de j fois le chiffre 0, ce qui est conforme à l'énoncé.

Solution de l'exercice 3

Combien peut-on trouver de sous-ensembles de notre ensemble de dix entiers ? $2^{10} = 1024$. Pour chacun des dix entiers, on peut le choisir ou ne pas le choisir, ce qui constitue dix choix binaires indépendants. Et combien y a-t-il de sommes distinctes d'éléments d'un tel sous-ensemble ? En tout cas moins que mille. La plus grande somme possible est : $99 + 98 + ... + 90 < 1000$, et la plus petite est 10. Donc deux sous-ensembles A et B auront même somme. Rien ne prouve qu'ils sont disjoints, mais ils sont distincts, et s'ils ont une intersection non vide C, en retirant de chacun d'eux les éléments de l'intersection, les sous-ensembles restants deviendront disjoints, et ils auront encore même somme car chaque somme sera diminuée de la somme des éléments de l'intersection.

Solution de l'exercice 4

Les deux questions sont assez différentes, et la deuxième nécessite pas mal de logique.

Pour la question a), il suffit de construire un triangle équilatéral de côté x : nécessairement deux des sommets de ce triangle équilatéral sont de même couleur, ce sont les deux points cherchés.

Pour la question b) : raisonnons par l'absurde. La conclusion serait fausse si pour chacune des couleurs rouge et bleu, on pouvait trouver un réel (x pour rouge et y pour bleu) de telle sorte que deux points rouges ne soient jamais distants de x, ni deux points bleus de y. Supposons $x \geqslant y$. Si tous les points du plan étaient bleus, on aurait deux points bleus distants de y, ce qui contredit la négation de notre conclusion. On supposera donc qu'un point A au moins est rouge, et on construit un triangle ABC avec $AB = AC = x, BC = y$, ce qui est possible car $x \geqslant y$. Si l'un des points B ou C est rouge, on aura deux points rouges distants de x. Si B et C sont tous deux bleus, on aura deux points bleus distants de y. Dans tous les cas, la négation de la conclusion est contradictoire, donc la conclusion (ce que l'on doit démontrer) est juste.

Solution de l'exercice 5

Pour appliquer le principe des tiroirs et prouver que l'un des n tiroirs contient au moins 3 points, il faut que $51 > 2n$ donc $n \leqslant 25$. Or il est facile de partager le carré en 25 carrés de côté $\frac{1}{5}$. Pour chacun des côtés communs à deux carrés, il faut convenir auquel des carrés on le rattache, de sorte qu'on ait une réelle partition du carré en sous-ensembles disjoints. Chaque point appartient à un petit carré, donc il existe un petit carré contenant au moins trois points. Reste à voir qu'il existe un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ contenant ce carré, car la diagonale du carré, $\frac{\sqrt{2}}{5}$ est inférieure au diamètre du cercle $\frac{2}{7}$.

Solution de l'exercice 6

Cet exercice s'apparente à celui sur les dix entiers entre 10 et 99. Considérons toutes les sommes possibles $c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_{10}a_{10}$ où $c_1, c_2, ...c_{10}$ sont choisis parmi $\{0, 1\}$. Il y en a $2^{10} = 1024$, car chaque c_i peut être choisi indépendamment parmi deux valeurs. Les restes des divisions par 1000 de ces sommes peuvent prendre 1000 valeurs distinctes (les trois derniers chiffres du nombre s'il est positif), de 0 à 999. Donc parmi ces 1024 sommes, nécessairement deux au moins auront même reste de la division par 1000, ce qui signifie que leur différence sera divisible par 1000. Or une différence de deux sommes du type $c_1a_1 + ... + c_{10}a_{10}$ avec $c_i = 0$ ou 1 est précisément une somme du type $b_1a_1 + b_2a_2 + ... + b_{10}a_{10}$ avec $b_i = -1, 0$ ou 1.