DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Razvan BARBULESCU
STAGE : Montpellier 2012

Inégalités

- Énoncés-

Exercice 1 Prouver que, si $n \geqslant 2$ est un nombre naturel et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels positifs, alors

$$4\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2}\right) \leqslant$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Exercice 2 (Roumanie 2012, 10è classe) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Prouver :

1. Pour tous x,y et $z \in [a, b]$, $2\sqrt{ab} \leqslant \frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leqslant a + b$.
2. $\left\{\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}\right\} = [2\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}]$.

Exercice 3 On note a,b et c let trois côtés d'un triangle.

1. Montrer qu'il existe un triangle de côtés $\sqrt{q}$, $\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$.
2. Prouver que $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leqslant a + b + c \leqslant 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$.

Exercice 4 (BMO 2012) Prouver que, pour tous nombres réels positifs x, y, z, on a :

$$\sum_{\text{cyc}} (x + y)\sqrt{(y + z)(z + x)} \geqslant 4(xy + yz + zx). \tag{1}$$

Exercice 5 Étant donnés trois nombres positifs a, b et c tels que $a+b+c=1$, montrer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

Exercice 6 (Inégalité arithmético-géométrique) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Montrer :

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 7 Montrer que pour tous $x, y, z > 0$ on :

$$\sum_{cyc} x^3 \geqslant \sum_{cyc} x^2\sqrt{yz}.$$

Exercice 8 Pour tout triplet de nombres non négatifs a, b, c, tels que a^2, b^2, c^2 sont les côtés d'un triangle, montrer l'inégalité :

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geqslant 4(a^6+b^6+c^6).$$

- Corrigé-

Solution de l'exercice 1 En posant $x_{n+1} = x_1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 - x_{i+1}^3}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_{i+1}^2 + \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_i + x_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i}.$$

D'autre part, pour tout i, $\frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}+x_i} \leqslant \frac{1}{2}x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$. En sommant ces inégalités pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient la conclusion.

Solution de l'exercice 2

1. Par l'inégalité des moyennes géométrique et arithmétique on a :

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

De nouveau, l'inegalité des moyennes donne :

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leqslant \frac{x+y+z}{3}+\frac{ab(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y})}{3}=\frac{1}{3}\left(f(x)+f(y)+f(z)\right),$$

où $f :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $f(t)=t+\frac{ab}{t}$. Pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$t(a+b+f(t))=(b-t)(t-a) \geqslant 0,$$

d'où résulte $f(t) \leqslant a+b$ pour tout $t \in [a,b]$. En sommant, on obtient l'inégalité demandée.

2. D'après la première partie de l'exercice, il suffit de montrer que l'intervalle $[2\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}]$ est contenu dans l'ensemble du membre gauche. On montrera $[2\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}] \subset f([a,b])$. Pour cela, soit $s \in [2\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}]$. L'équation $f(t)=s$ équivaut à $t^2-st+ab=0$. Puisque $s \geqslant 2\sqrt{ab}$, le discriminant de l'équation est positif, donc on a deux racines réelles, qui appartiennent à $[a,b]$. En choisissant, $x=y=z=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4ab}}{2}$, on obtient $\frac{x+y+z}{3}+\frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}}=s$. Cqfd.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. Comme a,b et c sont les côtés d'un triangle, on sait qu'il existe u, v et $w>0$ tels que $a=v+w$, $b=u+w$ et $c=u+v$. Alors l'inégalité $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}+\sqrt{c}$ équivaut à $\sqrt{v+w} \leqslant \sqrt{u+w}+\sqrt{u+v}$, ce qu'on montre vrai en élevant au carré. De manière analogue on montre les deux autres inégalités satisfaites par les côtés d'un triangle.
2. La partie gauche s'obtient par $a+b \geqslant \sqrt{ab}$ et les analogues. Pour la partie droite, $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}+\sqrt{c}$ implique $a \leqslant \sqrt{ab}+\sqrt{ac}$. De manière analogue, on trouve deux autres inégalités et par sommation, on a le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On pose $a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{x+z}$ et $c=\sqrt{x+y}$. On a :

$$xy=\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=\frac{1}{4}\left((c^2-(a-b)^2\right)=\frac{1}{4}\left(2a^2b^2+(c^2-a^2-b^2)\right)$$

et les deux autres relations obtenues par permutations cycliques. En sommant les trois égalités, on obtient :

$$xy+yz+zx=\sum_{\text{cyc}} 2a^2b^2-\sum_{\text{cyc}} a^4.$$

Or, l'identité suivante est connue :

$$\sum_{cyc} 2a^2b^2 - \sum_{cyc} a^4 = (a+b+c)\Pi_{cyc}(a+b-c).$$

Ainsi, l'inégalité (1) n'est autre que :

$$abc(a+b+c) \geqslant (a+b+c)\Pi_{cyc}(a+b-c). \tag{2}$$

Comme, x, y et z sont positifs, a^2, b^2 et c^2 sont les côtés d'un triangle. Alors, a, b et c sont également les côtés d'un triangle. Ainsi, on peut poser $u = b+c-a$, $v = a+c-b$ et $w = a+b-c$ et obtenir des nombres positifs. Par l'inégalité des moyennes on a $\frac{u+v}{2} \geqslant \sqrt{uv}$ et les analogues. En multipliant on a :

$$\Pi_{cyc}(\frac{u+v}{2}) \geqslant uvw,$$

ce qui prouve (2), donc (1).

Solution de l'exercice 5 Par l'inégalité des moyennes, on a :

$$(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}) + 2 \geqslant 2\sqrt{2 \cdot \frac{b+c}{a}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1-a}{a}}.$$

De manière analogue on trouve deux autres inégalités qui s'obtiennent par permutations cycliques. En sommant, on obtient le résultat.

Solution de l'exercice 6 On montre d'abord l'inégalité pour les n de la forme $n = 2^k$. Pour cela on fait une récurrence sur k. Le cas $n = 2^1$ est bien connu. Supposons le résultat vrai pour $k-1$. Soient $x_1, \ldots, x_{2^k} > 0$. Par l'hypothèse de récurrence, appliquée aux 2^{k-1}-uplets $(x_1, \ldots, x_{2^{k-1}})$ et $(x_{(2^{k-1}+1)}, \ldots, x_{2^k})$, on obtient :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \geqslant (x_1x_2 \cdots x_{2^{k-1}})^{\frac{1}{2^{k-1}}}.$$
$$\frac{x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}}{2^{k-1}} \geqslant (x_{1+2^{k-1}} \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^{k-1}}}.$$

Les deux inégalités sommées donnent : $\frac{x_1+\cdots+x_{2k}}{2^k} =$

$$= \frac{\frac{x_1+\cdots+x_{2k-1}}{2^{k-1}} + \frac{x_{2k-1_{+1}}+\cdots+x_{2k}}{2^{k-1}}}{2} \geqslant \frac{(x_1x_2\cdots x_2^{k-1})^{\frac{1}{2^{k-1}}} + (x_{1+2^{k-1}} \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{2}.$$

Le cas $n = 2$ pour $(x_1x_2 \cdots x_{2^{k-1}})^{\frac{1}{2^{k-1}}}$ et $(x_{1+2^{k-1}} \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^{k-1}}}$ donne :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \geqslant \sqrt{(x_1x_2 \cdots x_{2^{k-1}})^{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{1+2^{k-1}} \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^{k-1}}}} = (x_1 \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}.$$

Ceci prouve l'inégalité pour les puissances de 2. Passons maintenant au cas général. Soit n un nombre naturel et $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet pour lequel on veut montrer l'inégalité. Soit k tel que $2^k \geqslant n$. On pose $y_i = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $y_i = (x_1 \cdots + x_n)^{\frac{1}{n}}$ pour $i = n+1, \ldots, 2^k$. On applique le cas 2^k à $(y_1, \ldots, y_{2^k})$ et on trouve :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + (2^k - n)(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{2^k} \geqslant (x_1 \cdots x_n (x_1 \cdots x_n)^{\frac{2^k - n}{n}})^{\frac{1}{2^k}} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Solution de l'exercice 7 On a :

$$\sum_{\text{cyc}} x^3 = \sum_{\text{cyc}} \left(4 \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{z^3}{6} \right)$$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à $(x^3, x^3, x^3, x^3, y^3, z^6)$ on obtient que le membre droit est supérieur à $\sum_{\text{cyc}} \sqrt[6]{x^{12} y^3 z^3} = \sum_{\text{cyc}} x^2 \sqrt{yz}$.

Solution de l'exercice 8 Méthode 1. Par l'inégalité de Cauchy on a $(\sum a)(\sum a^3) \geqslant (\sum a^2)$. Il reste à montrer que pour tout triplet x, y, z de côtés de triangle vérifient $(x+y+z)^3 \geqslant 4(x^3+y^3+z^3)$. Pour cela on pose $z = \alpha + \beta$, $y = \alpha + \gamma$ et $x = \beta + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$. En remplaçant, on doit montrer $2(\sum \alpha)^3 \geqslant \sum (\alpha + \beta)^3$, soit $2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + 6(\sum \alpha^2\beta + \beta^2\alpha) + 12\alpha\beta\gamma \geqslant 2(\sum \alpha^2) + 3\sum \alpha^2\beta + 3\sum \alpha\beta^2$. Cela est évident car $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$.

Méthode 2. Sans perte de généralité on peut supposer que $a \geqslant \max\{b, c\}$. Ainsi $a \geqslant b$, $a \geqslant c$ et $b^2 + c^2 \geqslant a^2$. On a $(\sum a)(\sum a^2)(\sum a^3) \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)\left(a^2 + (b^2 + c^2)\right)^2 \geqslant 4a^4(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 4a^6 + 4b^6 + 4c^6$.