Domaine : Géométrie
Niveau : Débutants
Contenu : Cours et exercices

Auteur : Pierre-Antoine Guihéneuf
Stage : Montpellier 2014

Aires

L'aire $\mathcal{A}$ est une quantité qui mesure la taille d'un domaine du plan. Elle vérifie des propriétés fondamentales qui sont très intuitives :

(i) L'aire d'un rectangle de côtés l et L vaut $l \times L$.

(ii) Si un domaine D est la réunion de deux domaines D_1 et D_2, alors $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2)$.

(iii) Si un domaine D' est obtenu en faisant un déplacement d'un domaine D (par exemple une rotation, une translation ou une symétrie), alors $\mathcal{A}(D') = \mathcal{A}(D)$.

Exercice 1 (Autour des triangles)
Le but de cet exercice est de retrouver la formule de l'aire d'un triangle.

1. Montrer que l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut $BC \cdot h$, où h est la hauteur de $ABCD$ partant de A.
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer qu'une diagonale de $ABCD$ partage le parallélogramme en deux triangles de même aire.
3. En déduire la formule classique de l'aire d'un triangle : si h est la longueur de la hauteur de ABC issue de A, alors $\mathcal{A}(ABC) = h \cdot BC$. On en déduit directement les deux propriétés suivantes :
   (a) Si ABC et DBC sont deux triangles de même base $[BC]$ dont les sommets A et D sont sur une parallèle à (BC), alors ces deux triangles ont la même aire (lemme du trapèze).
   (b) Si A, B et C sont trois points alignés et D est un point quelconque, alors $\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(BCD)} = \frac{AB}{BC}$ (lemme des proportions).
4. En déduire une démonstration du théorème de Thalès : *Si ABC est un triangle et B' et C' sont deux points tels que $B' \in [A, B]$ et $C' \in [A, C]$, alors on a les égalités*

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{CC'}{CA} \quad \text{et} \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

5. Démontrer le *lemme du chevron* : si ABC est un triangle, M un point du plan distinct de A et A' le point d'intersection de (AM) avec (BC) (voir la figure 4), alors
$$\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \frac{A'B}{A'C}.$$
On ne traitera que le cas où M est dans l'intérieur du triangle ABC, comme sur la figure, les autres cas (quels sont-ils ?) se traitant de la même manière.
6. En déduire que les médianes d'un triangle sont toujours concourantes.
7. En déduire aussi le théorème de Ménélaüs : si ABC est un triangle et $\mathcal{D}$ est une droite coupant les droites (BC), (CA) et (AB) en respectivement A', B' et C', alors on a
$$\frac{A'B}{A'C}\frac{B'C}{B'A}\frac{C'A}{C'B} = 1.$$
De nouveau, on ne traitera que le cas où les points sont dans la configuration est donnée par la figure 5.

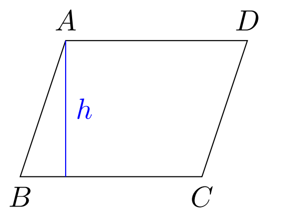

FIGURE 1 – Hauteur d'un parallélogramme

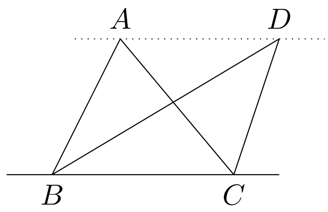

FIGURE 2 – Lemme du trapèze : $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(DBC)$

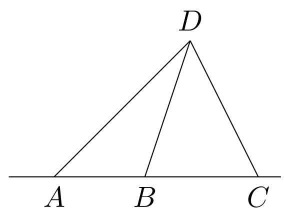

FIGURE 3 – Lemme des proportions : $\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(BCD)} = \frac{AB}{BC}$

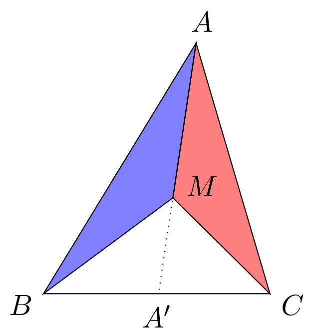

FIGURE 4 – Lemme du chevron

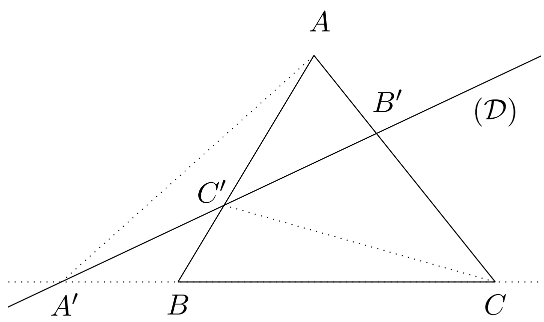

FIGURE 5 – théorème de Ménélaüs

Des considérations sur les aires permettent de donner des preuves du théorème de Pythagore ; nous en présentons une très rapide.

Théorème 1 (Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle. Si ce triangle est rectangle en A, alors on a la condition sur les longueurs de ses côtés :*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Démonstration. Il suffit d'identifier les aires grisées dans la figure 6. □

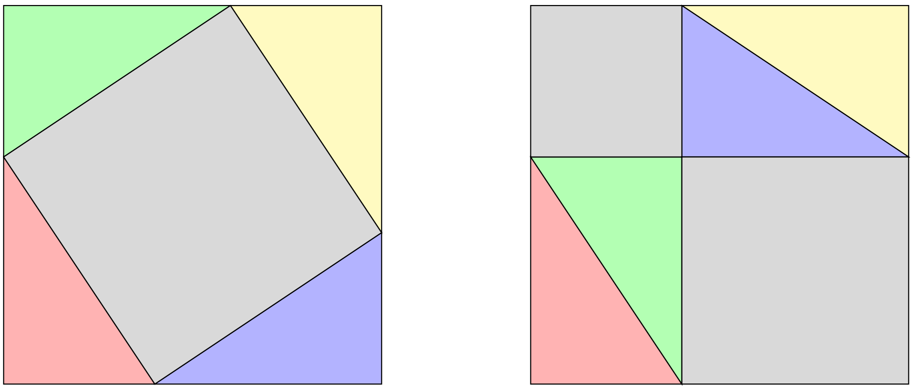

Figure 6 – Preuve du théorème de Pythagore

Remarque 2. Le théorème de Pythagore possède une réciproque : si on a l'égalité $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Pour résoudre l'exercice suivant, on a besoin de la formule qui donne l'aire d'un disque.

Proposition 3. *L'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2.*

Exercice 2 (Aires de lunules)
Dans cet exercice on se propose de déterminer des aires de domaines délimités par des cercles.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle. Les deux points d'intersection entre le cercle et la perpendiculaire à (AO) passant par O sont notés B et C. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A et passant par B (et C). Calculer l'aire de la région constituée des points qui sont à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et pas dans l'intérieur de $\mathcal{C}'$ (partie bleutée de la figure 7).
2. Soit ABC un triangle rectangle en A, $\mathcal{C}_0$ son cercle circonscrit et $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ les cercles de diamètres respectifs AB et AC. Calculer la somme des aires des régions constituées respectivement des points qui sont à l'intérieur de $\mathcal{C}_B$ et pas dans l'intérieur de $\mathcal{C}_0$ et des points qui sont à l'intérieur de $\mathcal{C}_C$ et pas à l'intérieur de $\mathcal{C}_0$ (partie bleutée de la figure 8).

Exercice 3 (Formule de Héron, ou comment mesurer l'aire d'une voile de bateau)

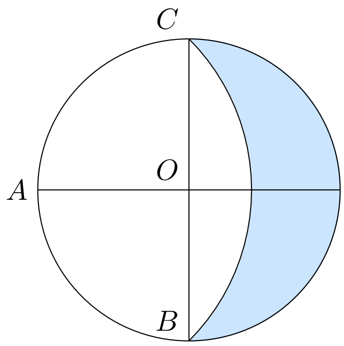

FIGURE 7 – Première lunule

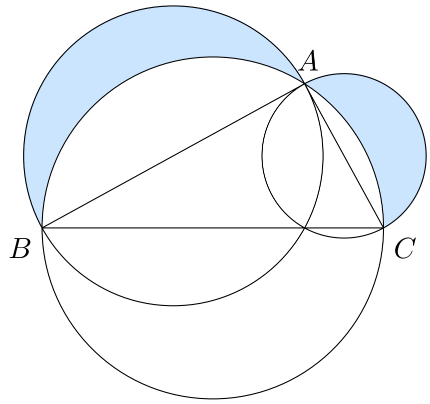

FIGURE 8 – Seconde lunule

Soit ABC un triangle de côtés de longueurs $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$, c étant la plus grande longueur. On note H le projeté de C sur la droite AB, ainsi que $h = CH$ et $d = AH$ (voir la figure 9).

1. Montrer que $d = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$.
2. En déduire que $h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}$.
3. Montrer la formule de Héron : $\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi périmètre du triangle.
4. Application : Trouver une expression du rayon du cercle inscrit à un triangle en fonction des longueurs des côtés de ce triangle.

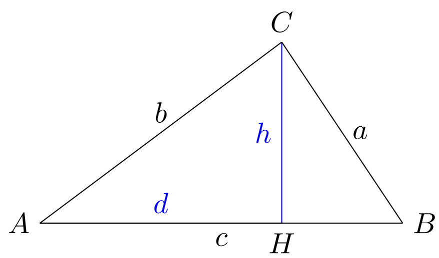

FIGURE 9 – Construction de l'exercice 3

Exercice 4 (Formule de Pick, ou comment compter des arbres dans une forêt plantée)
La formule de Pick assure que si P est un polygone simple dont les sommets sont à coordonnées entières, alors son aire est donnée par la formule

$$\mathcal{A}(P) = I + \frac{1}{2}B - 1,$$

où I est le nombre de points à coordonnées entières (de tels points sont dits *points entiers*) situés à l'intérieur de P et B le nombre de points entiers situés sur le bord de P.

1. Montrer que si la formule est vraie pour deux polygones P_1 et P_2 ayant une ou plusieurs arêtes *consécutives* en commun, alors elle est vraie pour le polygone P obtenu comme la réunion de P_1 et P_2.
2. Montrer que la formule est vraie pour les rectangles ayant leurs axes parallèles aux axes de coordonnées, puis pour les triangles ayant deux côtés parallèles aux axes de coordonnées.
3. En déduire que la formule est vraie pour tous les triangles.
4. Conclure.

Solutions

Solution de l'exercice 1

1. Se reporter à la figure 12 : il suffit de retirer un triangle au parallélogramme et de l'ajouter à l'autre côté ; cette opération ne modifie en rien l'aire de l'objet et on obtient un rectangle.
2. Se reporter à la figure 13 : le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu (au fait, pourquoi [1] ?) montre que le triangle BCD est l'image du triangle ABD par la symétrie de centre O ; leurs aires sont donc identiques.
3. Soit ABC un triangle. On lui associe un parallélogramme en considérant l'intersection de la parallèle à (BC) passant par A et de la parallèle à (AB) passant par C (comme sur la figure 13) ; l'aire de ce parallélogramme vaut la longueur d'un de ses base fois celle de la hauteur associée par la première question, et l'aire du triangle (ABC) vaut la moitié de celle du

1. Je crois que pour démontrer cela on est obligé d'utiliser la réciproque du théorème de Thalès

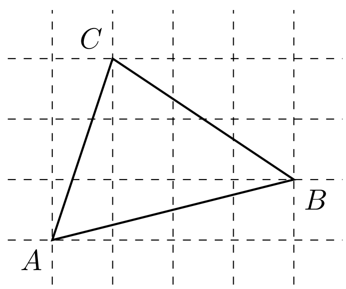

FIGURE 10 – L'aire du triangle ABC se calcule facilement : $I = 5$, $B = 3$ et donc $\mathcal{A}(ABC) = 5 + \frac{1}{2}$

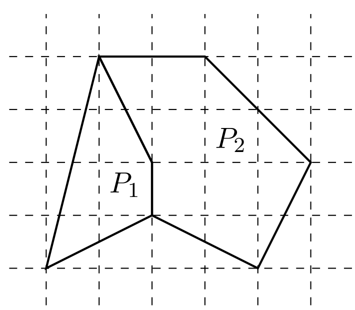

FIGURE 11 – Configuration de la question 1

parallélogramme par la question précédente. Cela permet de conclure sur l'aire du triangle.

4. Par le lemme du trapèze, on a $\mathcal{A}(BCC') = \mathcal{A}(BCB')$ et donc
$$\frac{CC'}{CA} = \frac{\mathcal{A}(BCC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(BCB')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{BB'}{BA},$$
cela fournit la première relation. On en déduit la première égalité de la seconde relation à l'aide des relations
$$\frac{AB'}{AB} + \frac{B'B}{AB} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{AC'}{AC} + \frac{C'C}{AC} = 1.$$
Enfin, pour démontrer la dernière égalité, on applique ce qu'on vient d'obtenir au point C et aux droites parallèles (AB) et $(C'C'')$.

5. On utilise plusieurs fois le lemme des proportions. Appliqué aux triangles ABM et ABA' il donne $\mathcal{A}(ABM) = \frac{AM}{AA'}\mathcal{A}(ABA')$. De même pour les triangles ACM et ACA' on a $\mathcal{A}(ACM) = \frac{AM}{AA'}\mathcal{A}(ACA')$. Et ce même lemme des proportions appliqué aux triangles ABA' et ACA' donne $\mathcal{A}(ABA') = \frac{A'B}{A'C}\mathcal{A}(ACA')$. En combinant les trois égalités obtenues on obtient finalement le lemme du chevron
$$\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \frac{\frac{AM}{AA'}\mathcal{A}(ABA')}{\frac{AM}{AA'}\mathcal{A}(ACA')} = \frac{\mathcal{A}(ABA')}{\mathcal{A}(ACA')} = \frac{A'B}{A'C}.$$

6. Soient ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et G le point de concours de (AA') et (BB') (voir la figure 15). Soit C' le point de concours de (CG) et (AB), il s'agit de démontrer que C' est le milieu de $[AB]$. Le lemme du chevron donne $\frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(CAG)}{\mathcal{A}(CBG)}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme du chevron pour "tourner" autour du triangle ABC : on obtient $1 = \frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(ABG)}{\mathcal{A}(ACG)}$ et $1 = \frac{B'C}{B'A} = \frac{\mathcal{A}(BCG)}{\mathcal{A}(BAG)}$. En divisant la deuxième équation par la première, on a $\frac{\mathcal{A}(CAG)}{\mathcal{A}(CBG)} = 1$; par conséquent C' est le milieu de AB.

7. Pour une fois, la solution consiste à désymétriser le problème : on va utiliser le point A' comme point de départ.Le lemme des proportions donne $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$ et $\frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(A'AC')}{\mathcal{A}(A'BC')}$. En combinant ces deux égalités, ce qu'on a à démontrer devient $\frac{B'C}{B'A} = \frac{\mathcal{A}(A'CC')}{\mathcal{A}(A'AC')}$, mais c'est tout simplement le lemme du chevron !

Solution de l'exercice 2

1. Notons $\mathcal{D}$ le demi-disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$ et le diamètre BC. Notons aussi $\mathcal{R}$ la région délimitée par les segments AB, AC et l'arc du cercle $\mathcal{C}'$ entre B et C. Le théorème de Pythagore indique que $AC = \sqrt{2}AO$; d'autre part $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\pi AO^2$, par conséquent $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \frac{1}{4}\pi AC^2 = \frac{2}{4}\pi AO^2 = \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Donc l'aire recherchée vaut $\mathcal{A}(\mathcal{D}) - \mathcal{A}(\mathcal{R}) + \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABC) = AO^2$.

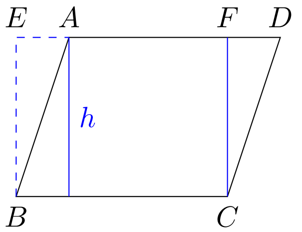

FIGURE 12 – $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(BCFE)$ car les triangles EBA et FCD ont la même aire (l'un est le translaté de l'autre)

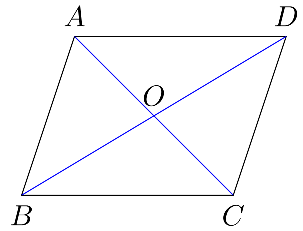

FIGURE 13 – Le triangle ABD est l'image du triangle BCD par la symétrie de centre O le centre du parallélogramme.

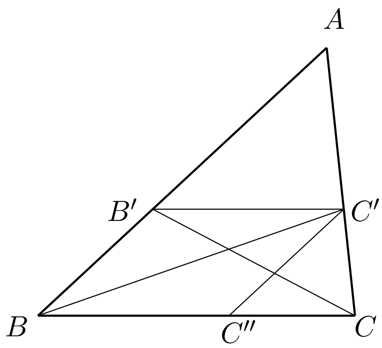

FIGURE 14 – Preuve du théorème de Thalès

2. Notons $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ les demi-disques délimités par les cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ ainsi que les diamètres BC, AB et AC. Le théorème de Pythagore exprime que $BC^2 = AB^2 + AC^2$; on en déduit que $\mathcal{A}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_B) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_C)$. Or l'aire de la partie recherchée vaut $\mathcal{A}(\mathcal{D}_B) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_C) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_0) + \mathcal{A}(ABC)$, soit par l'égalité précédente $\mathcal{A}(ABC) = AB \cdot AC$.

Solution de l'exercice 3

1. Par le théorème de Pythagore, on a $b^2 = h^2 + d^2$ et $a^2 = h^2 + (c-d)^2$. En soustrayant ces deux égalités terme à terme on obtient $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$, si bien que $d = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$.
2. De nouveau, le théorème de Pythagore nous donne $h^2 = b^2 - d^2$, il ne reste plus qu'à calculer brutalement, à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned}
h^2 &= \left(\frac{2bc}{2c}\right)^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2 = \frac{(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)}{4c^2} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \\
&= \frac{2(p-a)\cdot 2p\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)}{4c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.
\end{aligned}$$

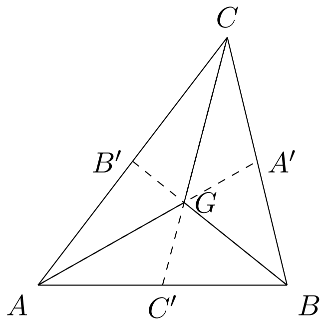

Figure 15 – Les médianes d'un triangle sont concourantes

3. L'obtention de la formule de Héron n'est maintenant plus qu'une formalité :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{ch}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4. On adopte les notations de la figure 16 et note $r = OD = OE = OF$ le rayon du cercle inscrit au triangle ABC. On obtient directement :

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABO) + \mathcal{A}(BCO) + \mathcal{A}(CAO) = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2},$$

d'où $r = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{p}$; la formule de Héron implique alors que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

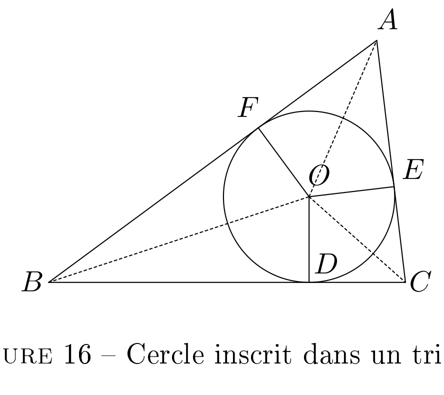

Figure 16 – Cercle inscrit dans un triangle

Solution de l'exercice 4

1. D'après les hypothèses de l'énoncé, on a $\mathcal{A}(P_1) = I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1$ et $\mathcal{A}(P_2) = I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1$, où I_1 et B_1 sont les nombres de points entiers dans l'intérieur de P_1 et sur le bord de P_1 (et de même pour P_2) et on veut montrer que la formule de Pick est vraie pour le polygone P. Notons B' le nombre de points entiers qui sont à la fois sur le bord de P_1 et sur le bord de P_2. Alors le nombre de points entiers intérieurs à P est $I = I_1 + I_2 + B' - 2$ (il faut enlever les deux points aux bouts du bord commun à P_1 et P_2) et le nombre de points entiers sur le bord de P vaut $B = B_1 + B_2 - 2B' + 2$ (on a compté $B' - 2$ points deux fois de trop et 2 points une fois de trop). Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(P) &= \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2)\\ &= I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1 \ + \ I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1\\ &= I_1 + I_2 + B' - 2 + \frac{1}{2}\big(B_1 + B_2 - 2B' + 2\big) - 1\\ &= I + \frac{1}{2}B - 1,\end{aligned}$$

par conséquent la formule de Pick est aussi vraie pour P.

2. Soit R un rectangle dont les 4 sommets sont entiers. Notons l la longueur de ses côtés verticaux et L celle de ses côtés horizontaux. Alors son aire vaut $l \times L$, le nombre de points entiers sur son bord vaut $B = 2l + 2L$ et le nombre de points entiers dans son intérieur vaut $I = (l-1)(L-1)$. On a donc

$$I+\frac{1}{2}B-1 = (l-1)(L-1)+\frac{1}{2}(2l+2L)-1 = lL-l-L+1+l+L-1 = lL = \mathcal{A}(R).$$

La formule de Pick est donc vraie pour le rectangle R.

3. Un rectangle se découpe en deux triangles rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (en découpant selon une diagonale du rectangle). Par symétrie par rapport à la diagonale, ces deux triangles ont le même nombre de points entiers sur leur frontière et leur intérieur. Si la formule de Pick n'était pas vraie, alors par le même calcul qu'à la question précédente on aboutirait au fait que la formule n'est pas vraie pour le rectangle de départ, ce qui contredit le résultat de la première partie de la question. Donc la formule de Pick est vraie pour ces triangles.

4. Pour un triangle quelconque ABC, on l'inscrit dans un rectangle à la manière de la figure 18. Puisque la formule est vraie pour les trois triangles bordant ABC et pour le rectangle, elle est aussi vraie pour le triangle ABC.

5. On utilise le fait que tout polygone à sommets entiers peut être décomposé en triangles à sommets entiers. Ceci est visuellement “évident” ; pour le démontrer proprement on peut par exemple faire une récurrence sur le

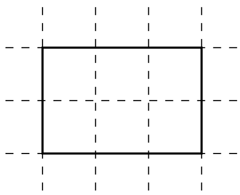

FIGURE 17 – Formule de Pick pour un rectangle avec $l = 2$ et $L = 3$: $I = 2$ et $B = 10$

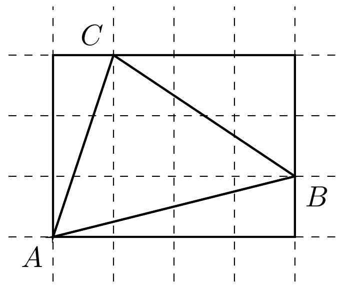

FIGURE 18 – Tout triangle ABC peut s'inclure dans un rectangle de manière canonique...

nombre de sommets ou bien sue le nombre de points entiers à l'intérieur ou sur le bors du polygone. La formule de Pick résulte alors de cela et du résultat de la première question.

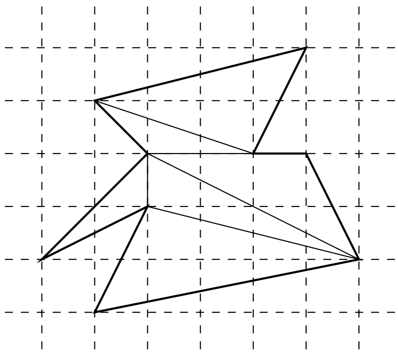

FIGURE 19 – Triangulons !