DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Razvan BARBULESCU
STAGE : Montpellier 2012

Exercices de géométrie

- Énoncés -

Exercice 1 Démontrer que le centre du cercle circonscrit O, le centre de gravité G et l'orthocentre H d'un triangle ABC quelconque sont colinéaires et que $OG = \frac{1}{2}GH$.

Exercice 2 Étant donnés le point A, le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H d'un triangle ABC, contruire à la règle et au compas les points Bet C.

Exercice 3 Soient A, B et C trois points sur le cercle Γ de centre O. On suppose $\widehat{ABC} > 90$. Soit D le point d'intersection de la droite AB avec la perpendiculaire en C à AC. Soit ℓ la droite passant par D perpendiculaire à AO. Soit E le point d'intersection de ℓ avec la droite AC, et soit F le point d'intersection de Γ avec ℓ, situé entre D et E. Montrer que les cercles circonscrits à BFE et CFD sont tangents en F.

Exercice 4 Les cercles k_1 et k_2 se rencontrent en A et B. La droite t est tengente à k_1 et k_2 en M et respectivement N. Sachant que $t \perp AM$ et $MN = 2AM$, calculer la mesure de $\widehat{NMB}$.

Exercice 5 Soient B, D et C trois points fixes situés sur une droite de façon que $D \in [BC]$. Soient A un point mobile en dehors de la droite BC et P un point mobile sur $[AD]$. On note E, F et D' les trois points tels que $\{E\} = AC \bigcap BP$, $\{F\} = AB \bigcap CP$ et $\{D'\} = FE \bigcap BC$. Montrer que D' est fixe.

Exercice 6 Soit $ABCD$ un trapèse avec $AB \parallel DC$. On note Y l'intersection de AD et BC. On appelle X l'intersection des diagonales, N le milieu de $[AB]$ et M celui de $[DC]$. Montrer que M, N, X et Y sont colinéaires.

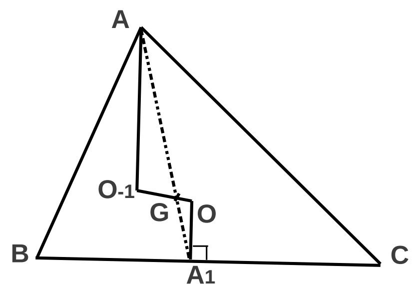

FIGURE 1 – Droite d'Euler.

Exercice 7 Les diagonales d'un trapèse $ABCD$, avec $BC \parallel AD$, s'intersectent en P. Soit Q tel que $\widehat{AQD} = \widehat{CQB}$ et la droite CD sépare P et Q. Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Exercice 8 Soient BD et CE les hauteurs du triangle ABC. Montrer que si $AB \geqslant AC$ alors $AB + CE \geqslant AC + BD$.

Exercice 9 Soient ABC un triangle et P un point intérieur et D, E, F les pieds des perpendiculaires de P sur BC, CA et AB. On suppose que $PA^2 + PD^2 = PB^2 + PE^2 = PC^2 + PF^2$. Montrer que P est le centre du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$, où I_a, I_b et I_c sont les centres des cercles exinscrits au triangle ABC.

Exercice 10 Les points O et H sont le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC. Montrer qu'un des triangles OHA, OHB et OHC a l'aire égale à la somme des deux autres.

Exercice 11 On note O, H et R le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le rayon du cercle circonscrit du triangle ABC. On note D, E et F les symétriques de A,B et C par rapport au droites BC, CA et respectivement AB. On suppose que D, E et F sont colinéaires. Montrer que $OH = 2R$.

- **Corrigé** -

Solution de l'exercice 1

On appelle A_1, B_1 et C_1 les pieds des médianes partant de A, B et respectivement C. On appelle h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. On appelle O_{-1} le point $h^{-1}(O)$, comme dans la figure 1, et on voit qu'il suffit de montrer $O_{-1} = H$. Une des propriétés des homothéties montre que

$$h(A)h(O_{-1}) \parallel AO_{-1}. \tag{1}$$

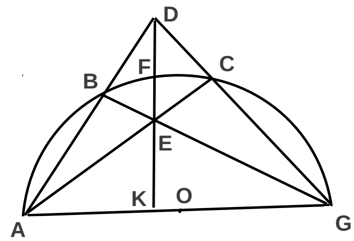

FIGURE 2 – Figure de l'exercice 3

Or, il est connu que G est situé à un tiers de longueur de A_1 et 2 de A, donc $A_1 = h(A)$. Ainsi, on a :

$$A_1O \parallel AO_{-1}. \tag{2}$$

Comme A_1O est la médiatrice du segment BC, $A_10 \perp BC$ et, par conséquent, $AO_{-1} \perp BC$. De manière analogue, $BO_{-1} \perp AC$, donc O_{-1} appartient à deux hauteurs du triangles. Ainsi $O_{-1} = H$.

Solution de l'exercice 2 On s'inspire de la Figure 1. On commence par trouver G à deux tiers de H et un de O. Ensuite on construit A_1 comme image de A par l'homothétie de centre G et rapport $\frac{1}{2}$. La droite passant par A_1 et perpendiculaire à OA_1 est la droite BC. On obtient les deux points à l'intersection de cette droite avec le cercle de centre O et rayon OA.

Solution de l'exercice 3 On note G l'intersection de AO avec Γ et K l'intersection de ℓ avec AO. L'idée est de montrer $\widehat{GFC} = \widehat{FDC}$, ce qui montrera que FG est la tangente en F au cercle circonscrit au triangle CFD, puis de faire de même pour le triangle BFE.

Comme $\widehat{ACG} = 90°$, D, C et G sont colinéaires. Ainsi, E est l'orthocentre du triangle ADG, donc $GE \perp AB$. Comme le quadrilatère $AGCB$ est inscrit dans un cercle, $\widehat{ABG} = \widehat{ACG}$, donc $EB \perp AB$. Ainsi, B, E et G sont colinéaires.

Puisque $\widehat{CDF} = \widehat{GDK} = \widehat{GAC} = \widehat{GFC}$, FG est tangent en F au cercle circonscrit au triangle CFD. Puisque $\widehat{FBE} = \widehat{FBG} = \widehat{FAG} = \widehat{GFE}$, FG est tangente en F au triangle BFE.

Solution de l'exercice 4 On appelle P le milieu de $[MN]$. Puisque P a des puissances égales par rapport aux cercles k_1 et k_2, il appartient à la droite radicale, donc à AB. Comme t est tangente à k_1, $\widehat{NMB} = \widehat{MAB}$, qui vaut $\widehat{MAP}$ car A, B et P sont colinéaires. Comme le triangle MAP est rectangle isocèle, on a $\widehat{MAP} = 45°$.

Solution de l'exercice 5 Il suffit d'appliquer le Théorème de Ceva dans $\triangle ABC$

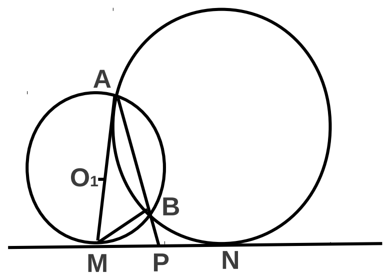

FIGURE 3 – Figure de l'exercice 4.

et le Théorème de Ménélaüs à $\triangle ABC$ avec la sécante EF.

Solution de l'exercice 6 Si on note N' l'intersection de YM avec AB, alors le Théorème de Thalès implique que $N = N'$. Ensuite de Théorème de Ceva montre que Y, X et M sont alignés.

Solution de l'exercice 7 On trace la parallèle passant par D à BQ et on note D' son intersection avec PQ. Comme $Q'D$ est parallèle à BQ et comme AD est parallèle à BC, $\widehat{CBQ} = \widehat{D'DA}$. Puisque $D'D \parallel QB$, $\triangle PD'D \simeq \triangle PBQ$, d'où $\frac{AD}{BC} = \frac{DD'}{BQ}$. Ainsi on a $\triangle CBQ \simeq \triangle ADD'$ par similarité de type côté-angle-côté.

Cela implique que $\widehat{CQB} = \widehat{DD'A}$, et comme $\widehat{CQB} = \widehat{AQD}$, $\widehat{DD'A} = \widehat{AQD}$, impliquant que $D'ADQ$ est cyclique. Cela implique $\widehat{QAD} = \widehat{QD'D}$, et $\widehat{QD'D} = \widehat{BQD'}$ car $BQ \parallel D'D$, d'où $\widehat{QAD} = \widehat{BQD'} = \widehat{BQP}$.

Solution de l'exercice 8 On note S l'aire du triangle ABC. On a $BD = \frac{2S}{AC}$ et $CE = \frac{2S}{AB}$. Ainsi $(AB+CE)-(AC+BD) = (AB+\frac{2S}{AB})-(AC+\frac{2S}{AC})$. Ensuite, cela vaut $(AB-AC) = (1-\frac{2S}{AB\cdot AC}) = (AB-AC)(1-\sin\widehat{A}) \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 9 Comme le problème fait intervenir les cercles exinscrits il faut se souvenir de leurs propriétés. La plus importante est que si on note D' le pied de la perpendiculaire de I_a sur BC, alors $BD' = \frac{a+b-c}{2}$ et les égalités analogues, où a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle ABC. Pour montrer cela, on note D_b et D_c les pieds des perpendiculaires de I_a sur AC et AB. Comme BI_a est bissectrice, $BD = BD_b$. Similairement, $CD = CD_c$. Or, $\triangle AD_bI_a \equiv \triangle AD_cI_a$, donc $BD_b + AB = CF_c + AB$. Ainsi $BD + AB = DC + AC$. Comme $BD + DC = BC$ on trouve $BD = \frac{a+b-c}{2}$.

Revenons au problème. On a $(AE^2+PE^2)+PD^2 = PA^2+PE^2 = PB^2+PE^2 = (BD^2+PD^2)+PE^2$. Donc $AE = BD$ et les égalités analogues. Si on note $AE = u$, $BF = v$ et $CD = w$, alors on a : $a = u+w$, $b = v+w$ et $c = u+v$. En résolvant le système on a $BD = \frac{a+b-c}{2}$, donc D est égal à D', le pied de la perpendiculaire de I_a sur BC. De manière analogue E et F sont les pieds des perpendiculaires de I_b et I_c sur les côtés de ABC. On conclut que les perpendiculaires de I_a, I_b et I_c sur les côtés correspondantes de ABC sont concourantes.

On a $m((\widehat{BI_aP}) = m(\widehat{BI_aD}) = 90 - m(\widehat{I_aBC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{B})$. De même $m(\widehat{CI_cP}) = \frac{m(\widehat{C}}{2}$, donc $\triangle I_aPI_c$ est isocèle et $I_aP = I_cP$. de manière analogue, $I_aP = I_bP$, donc P est le centre du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On appelle h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, où G est le centre de gravité. On sait que h envoie O sur H et A, B et C sur les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et AB, que l'on appelle A_1, B_1 et C_1. La doite OH doit rencontrer au moins deux côtés du triangle ABC, disons $[AB]$ et $[AC]$.

Comme A_1 est le milieu de $[BC]$, on a $d(A_1, OH) = \frac{d(B,0H)+d(C,OH)}{2}$.Comme h est une homothétie, $OH = h(OH)$ et $A_1 = h(A)$, on a $d(A_1, OH) = \frac{d(A,OH)}{2}$. Donc $d(A, OH) = d(B, OH) + d(C, OH)$, ce qui donne $S[OHA] = S[OHB] + S[OHC]$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On considère l'homothétie h de centre G et rapport $-\frac{1}{2}$, où G est le centre de gravité. On se rappelle que $h(H) = O$ et que les points $A_1 := h(A)$, $B_1 := h(B)$ et $C_1 := h(C)$ sont les milieux des côtés du triangle ABC. On note $A_{-1} = h^{-1}(A)$, $B_{-1} = h^{-1}(B)$, $C_{-1} = h^{-1}(C)$, $D_1 = h(D)$, $E_1 = h(E)$ et $F_1 = h(F)$. Comme D, E, F sont colinéaires on a D_1, E_1, F_1 colinéaires.

Comme AD est perpendiculaire sur BC, A_1D_1 est perpendiculaire sur B_1C_1. Comme, $B_1C_1 \parallel BC \parallel B_{-1}C_{-1}$, A_1D_1 est perpendiculaire sur $B_{-1}C_{-1}$. Comme $A_1D_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(2d(A, BC))$, $A_1D_1 = d(A, BC)$.
Or $d(A, BC) = \frac{1}{2}d(A_{-1}, B_{-1}C_{-1}) = d(BC, B_{-1}C_{-1})$ car BC est la médiane de $A_{-1}B_{-1}C_{-1}$. On conclut que $D_1 \in B_{-1}C_{-1}$. Finalement $H \in AD$, donc $O = h(H) \in A_1D_1$. Ainsi D_1 est le pied de la perpendiculaire de O sur $B_{-1}C_{-1}$. De manière analogue, les points D_1, E_1, F_1 sont les pieds des perpendiculaires de O sur les côtés de $A_1B_1C_1$. Il est connu que les projections d'un point sur les côtés d'un triangle sont colinéaires si et seulement si le point appartient au cercle circonscrit. Ainsi D_1, E_1, F_1 sont colinéaires si et seulement si $O \in (A_{-1}B_{-1}V_{-1})$. Puisque H est de centre de $(A_{-1}B_{-1}C_{-1})$, cela équivaut à $OH = 2R$.