Domaine : Algèbre
Niveau : Intermédiaire
Contenu : Exercices

Auteur : Guillaume Conchon-Kerjan
Stage : Montpellier 2014

Exercices sur les polynômes

Avertissement : la présente feuille a un intérêt purement mathématique, et n'a en conséquence pas vocation à donner des conseils diététiques.

Apéro

Exercice 1

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^2 - 1$ divise $1 + 5x^2 + x^4 + -(n-1)x^{n-1} + (n-8)x^n$.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré 4 tel que $P(0) = P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$ et $P(4) = 16$. Calculer $P(-2)$.

Exercice 3

Déterminer les polynômes P à coefficients entiers tels qu'il existe des relatifs distincts a, b, c, d vérifiant $P(a) = P(b) = P(c) = 3$ et $P(d) = 4$.

Exercice 4

Trouver les triplets de réels x, y, z vérifiant :

$$x + y + z = 2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 26$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 38$$

Grignotage

Exercice 5

Soit P et Q des polynômes unitaires de degré 2014, tels que pour tout réel x, $P(x) \neq Q(x)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $P(x-1) = Q(x+1)$.

Exercice 6
Alcina et Bajazet jouent au jeu suivant : on écrit $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + 1$ au tableau. Alcina choisit une étoile et la remplace par un réel, puis c'est à Bajazet, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des étoiles. Alcina gagne si le polynôme P obtenu n'a pas de racine réelle. Sinon, c'est Bajazet. Montrer que ce dernier a une stratégie gagnante.

Exercice 7
Soit $a = \sqrt{4 + \sqrt{5 - a}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{5 + b}}$, $c = \sqrt{4 - \sqrt{5 - c}}$ et $d = \sqrt{4 - \sqrt{5 + d}}$. Calculer $abcd$.

Exercice 8
Trouver les polynômes P tels que pour tout réel x : $(x-16)P(2x) = 16(x-1)P(x)$.

Dessert

Exercice 9
Soit $P = (X-a)^3(X-b)^2$ un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que a et b sont rationnels.

Exercice 10
Existe-t-il trois réels non nuls a, b, c tels que pour tout $n \geq 4$, $x^n + \cdots + x^3 + ax^2 + bx + c$ ait n racines entières ?

Exercice 11
Soit $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ des réels. On remplit un tableau $n \times n$ en écrivant $a_i + b_j$ dans la case de la i-ème ligne et j-ème colonne. Montrer que si le produit des termes sur chaque ligne est constant, alors il en va de même pour les colonnes.

Exercice 12
Soit P un polynôme réel tel que $P(0) > 0$, $P(1) > P(0)$, $P(2) > 2P(1) - P(0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n+3) > 3P(n+2) - 3P(n+1) + P(n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) > 0$.

Deuxième dessert

Exo 2 : Montrer que $P(n)$ est entier si n l'est. Généraliser.

Exo 6 : a) Comment généraliser la stratégie de Bajazet ?
b) Ecouter *Alcina* d'Haendel et *Bajazet* de Vivaldi.

Exo 10 : remplacer "entières" par "réelles".

Solutions des exercices

Apéro

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n(X) = 1 + 5X^2 + X^4 - (n-1)X^{n-1} + (n-8)X^n$. On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ donc il faut et il suffit que 1 et -1 soient racines de P. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n(1) = 1+5+1+-(n-1)+(n-8) = 0$. Vérifions donc pour -1, ce qui amène à faire une disjonction de cas selon la parité de n :
• Si n est pair, $P_n(-1) = 1+5+1+(n-1)+(n-8) = 2n-2$ donc $n = 1$, or n est pair, aïe.
• Si n est impair, $P_n(-1) = 1+5+1-(n-1)-(n-8) = -2n+16$ donc $n = 8$ or n est impair, aïe.
Donc, il n'y a pas de solution.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
Dans ce genre d'exercice, on cherche un polynôme "proche" de P ayant (presque) autant de racines que son degré, pour l'avoir sous forme factorisée. Avec un soupçon d'observation, on se rend compte que $P(1) - 1^2 = P(2) - 2^2 = P(3) - 3^2 = P(4) - 4^2 = 0$. $P(X) - X^2$ est de degré au plus 4, donc il existe un réel c tel que $P(X) - X^2 = c(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. Pour $X = 0$, on trouve $c = \frac{1}{24}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
On utilise le lemme suivant : si P est à coefficients entiers et x, y sont des entiers, alors $x - y$ divise $P(x) - P(y)$.
Les quatre entiers étant tous distincts, il existe e parmi a, b, c tel que $|d - e| \geq 2$. Or $P(d) - P(e) = 1$, on a donc un léger problème.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
On utilise les polynômes symétriques élémentaires : introduisons $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ et $\sigma_3 = xyz$. On sait (voir cours) que x, y, z sont les racines du polynôme $P(X) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$.

On a directement $\sigma_1 = 2$. Et, $4 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2\sigma_2 = 26+2\sigma_2$ donc $\sigma_2 = -11$. Pour σ_3, qui est de degré 3, on cherche une expression de degré 3 faisant intervenir des choses que l'on connaît déjà. Essayons $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$ (qui est un peu plus simple que $(x+y+z)^3$) :

$$\begin{aligned}
52 &= x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y \\
14 &= x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y.
\end{aligned}$$

Cela ne suffit pas, résolvons nous donc à utiliser $(x+y+z)^3$:

$$\begin{aligned}
8 &= x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+6\sigma_3 \\
8 &= 38+42+6\sigma_3 \\
\sigma_3 &= -12.
\end{aligned}$$

Donc x, y, z sont les racines de $P(X) = X^3 - 2X^2 - 11X + 12$. On remarque que 1 est solution évidente. En factorisant, $P(X) = (X-1)(X^2-X-12)$. On résout le trinôme du second degré et on trouve $P(X) = (X-1)(X+3)(X-4)$. Ainsi, on a $x = 1, y = -3$ et $z = 4$, à permutation près.

Grignotage

Solution de l'exercice 5

Reformulons classiquement et légèrement l'énoncé : on veut une racine réelle au polynôme $R(X) = P(X-1)-Q(X+1)$. A quoi peut-il ressembler ? Il est clairement de degré au plus 2013 (le coefficient du terme de degré 2014 étant nul). S'il est de degré 2013, donc impair, alors il aura bien une racine impaire. Regardons de plus près, en posant $P(X) = X^{2014}+aX^{2013}+S(X)$ et $Q(X) = X^{2014}+bX^{2013}+T(X)$, où S et T sont de degré au plus 2012. Soit de plus c le coefficient de degré 2013 de R. On obtient $R = -2014 - 2014 + a - b = a - b - 4028$ (on regarde, dans $(X-1)^{2014}$, le terme de degré 2013, et de même pour $(X+1)^{2014}$). Se posent deux questions : comment gérer ce $a-b$? Et à quoi sert la condition $P(x) \neq Q(x)$ pour tout x réel ? Heureusement, elles sont liées !

$P-Q$ n'a pas de racine réelle, donc n'est pas de degré impair. Or $P-Q$ est de degré au plus 2013, et le coefficient du terme de degré 2013 est $a-b$. Donc $a-b=0$. Ainsi $c \neq 0$, et R est bien de degré 2013, ce que l'on voulait.

Solution de l'exercice 6

On reste dans la même veine (idée de la preuve du fait qu'un polynôme de degré impair a une racine réelle) : en $+\infty$ et $-\infty$, le polynôme tend vers $+\infty$ car de

degré pair. Pour avoir une racine réelle, il suffit que le polynôme soit négatif a un moment, le pauvre sera bien obligé de passer par zéro [imaginez sa peine].
Si Alcina met un coefficient c devant x^3, Bajazet met un nombre négatif c' de valeur absolue assez grande devant x^2 de sorte que $x^4 + cx^3 + c'x^2 + 1$ soit strictement négatif en 1 et -1. Alors si Alcina met un coefficient positif (ou négatif) devant x, $P(-1)$ sera encore strictement négatif (ou $P(1)$), donc Bajazet gagne. De même si Alcina joue d'abord sur x.
Si Alcina met un coefficient c devant x^2, c'est un petit peu plus compliqué puisqu'on ne peut plus rendre le polynôme négatif en un réel et son opposé. On va alors se focaliser sur la taille des monômes en fonction de celle de x (pour lequel on choisit une valeur > 1. Posons $D = 10^4 + c10^2 + 1$, $D' = 5^4 + c5^2 + 1$. Bajazet place b devant x^3, et Alcina place a devant x. On a $P(10) + P(-10) = 2D$ (les termes impairs s'annulent, les pairs s'ajoutent). Si P est toujours positif, avec $b = -D$, on trouve $a > 99D$. Donc $P(-5) = D' + 125D - 5 \times 99D < -2D'$ car $D > D'$. Or $P(5) + P(-5) = 2D'$ donc $P(5) < 0$ et Bajazet gagne avec ce choix de b.

Solution de l'exercice 7

Puisque nous sommes chez les polynômes, faisons-honneur en débarassant ces vilaines racines. $a, c, -b, -d$ sont racines de $X^4 - 8X^2 + X + 11$. Donc $abcd = bd \times (-a) \times (-c) = 11$ et on a fini... eh non! pour être sûr d'avoir les quatre racines du polynôme (dont le produit des opposés fait le terme constant) sans avoir de problème de multiplicité, il serait bien de pouvoir montrer que ces quatre racines sont distinctes. a, c sont positives, $-b, -d$ sont négatives. Si $a = c$, $\sqrt{5-a} = -\sqrt{5-a} = 0$. Donc $a = 5$, et en partant de l'énoncé, $a = \sqrt{4} = 2$, contradiction. Donc $a \neq c$, $b \neq d$ de même et on a bien le résultat voulu.

Solution de l'exercice 8

Avec $x = 1$, on a $P(2) = 0$. Puis $x = 2$ donne $P(4) = 0$. De même, $P(8) = P(16) = 0$. On peut ainsi écrire $P(X) = (X-2)(X-4)(X-8)(X-16)Q(X)$. En réinjectant dans l'équation, on trouve $Q(x) = Q(2x)$ pour tout x (sauf $x = 2, 4, 8, 16$), donc $Q(X) - Q(2X)$ est le polynôme nul.
Si $r \neq 0$ est racine de Q, $2^n r$ l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $Q = 0$ ou $r = 0$. Donc $Q(X) = aX^k$, et il est facile de voir que $k = 0$. Donc Q est constant.
On en déduit que $P = c(X-2)(X-4)(X-8)(X-16)$ avec c un réel. Réciproquement, ce genre de polynôme est bien solution.

Dessert

Solution de l'exercice 9

La solution est claire si $a = b$ ($-5b$ par exemple est un coefficient de ce polynôme...), supposons le contraire.

On peut partir dans des calculs violents avec des polynômes symétriques élémentaires. Traverser l'Atlantique à la nage est moins fatigant et plus rapide. Pour réduire un peu le degré des expressions étudiées, nous allons utiliser notre grande amie : la division euclidienne ! En effet, si deux polynômes ont des coefficients rationnels, le quotient et le reste de la division euclidienne aussi. Ainsi, avec l'algorithme d'Euclide, on obtient un *pgcd* à coefficients rationnels. On fait intervenir P et un polynôme plus petit avec des racines en commun. P' la dérivée semble bien adaptée, en effet, a, a, b sont racines de P', la quatrième ($deg(P') = 4$) étant autre (sinon a serait racine de multiplicité au moins 4, ou b de multiplicité au moins 3). Ainsi, $R := pgcd(P, P') = (X - a)^2(X - b)$ et a des coefficients rationnels.

On s'est débarrassé de deux degrés, recommençons ! $pgcd(R, R') = X - a$ de même, donc a est rationnel. Or le terme de degré 4 dans P est $-3a - 2b$ donc b est également rationnel.

Solution de l'exercice 10

Supposons par l'absurde que ces réels existent. Notons $P_n(x) = x^n + \cdots + x^3 = ax^2 + bx + c$, et $r_{n,1}, \cdots, r_{n,n}$ les racines de P_n, entières. On a alors $(-1)^n c = r_{n,1} \cdots r_{n,n}$. Aucune racine ne peut être nulle puisque c ne l'est pas. S'il y a k racines qui ne sont ni 1, ni -1, leur valeur absolue est au moins 2 donc $|c| \geq 2^k$. Soit k le plus grand entier tel que cette inégalité soit vraie, pour $n > k$, P_n a au moins $n - k$ racines qui sont 1 ou -1. Mais, $P(1) = n - 2 + a + b + c$, donc si $n > 2 + |a| + |b| + |c|$, $P(1) > 0$ donc pour n assez grand, -1 est racine au moins $n - k$ fois. La somme des racines valant -1, il y a nécessairement une racine positive r. Si $r > M$ avec $M = max(|a|, |b|, |c|)$, pour $n > 10$ (soyons larges !), $x^n + ax^2$, $x^{n-1} + bx$ et $x^{n-2} + c$ sont strictement positifs, aïe aïe aïe. Donc $r \leq M$ et si S est la somme des racines, $S \leq k - n + kM$, donc $S < -2$ pour n assez grand, d'où une contradiction.

Ainsi, toutes les racines ne peuvent être entières.

Solution de l'exercice 11

Un petit peu de parachutage ne fait pas de mal : introduisons la fonction

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - a_i) - \prod_{j=1}^{n}(x + b_j).$$

On note que les a_i sont n racines de $f - c$ où c est la valeur du produit d'une ligne, or f est de degré au plus $n-1$ (le coefficient de x^n étant $1-1=0$), Donc $f-c$ est le polynôme nul. Ainsi, pour tout j,

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_j)=(-1)^n c,$$

d'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

On pose $\Delta_1(X) = P(X+1) - P(X)$, puis $\Delta_2(X) = \Delta_1(X+1) - \Delta_1(X)$, ... $\Delta_n(X) = \Delta_{n-1}(X+1) - \Delta_{n-1}(X)$. Une petite récurrence en utilisant le binôme de Newton montre que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(x+n).$$

D'après l'énoncé, $\Delta_3(n) > 0$ pour tout n naturel. Donc $(\Delta_2(n))$ est une suite strictement croissante. Et $\Delta_2(0) > 0$, donc $\Delta_2(n) > 0$ pour tout n de même. De cette manière, on prouve ensuite que $\Delta_1(n)$ puis $P(n)$ sont toujours strictement positifs.

Note : cette méthode s'appelle celle de la "dérivation discrète" : on regarde le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h devient petit : avec les entiers, on garde $h=1$...

Deuxième dessert

Exo 2 : On a $P(n) = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/24$. Il est facile de voir qu'il y a un multiple de 3 dans les 4 nombres, un multiple de 4 et un autre multiple de 2, donc on a bien un multiple de 24. Cela se généralise à $P = (X-1)\cdots(X-k)/k!$.

Exo 6 : a) Si on change 4 par un plus haut degré (pair), Bajazet s'arrange pour faire disparaître les termes de degré pair, pour qu'il n'en reste pas deux à la fin (sinon, il perd). Puis il quand il reste deux termes, s'il reste un de degré pair, un de degré impair, il gagne aisément comme dans la première partie de la solution. S'il en reste deux, il essaie d'adapter la deuxième partie. A vous de voir les détails.
b) C'est beau, mais... c'est LONG.

Exo 10 : alors là on vous laisse douill... chercher un peu.