DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2012

Exercices d'arithmétique

- Énoncés -

Exercice 1 Pour quels entiers n strictement positifs, le nombre n^2+1 divise-t-il $n+1$?

Exercice 2 Soient $a, b \geqslant 1$ des entiers.

(i) Est-ce que a divise b^2 si, et seulement si, a divise b ?

(ii) Est-ce que a^2 divise b^2 si, et seulement si, a divise b ?

Exercice 3 Trouvez tous les entiers n tels que $2^n + 1$ est un carré parfait.

Exercice 4 Si n admet un diviseur impair, montrer que 2^n+1 n'est pas premier.

Exercice 5 Montrez que pour tout premier p et tout entier $0 < k < p$, $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ est divisible par p. Que se passe-t-il pour $k = 0$ ou $k = p$?

Exercice 6 Montrez que la fraction $\frac{39n+4}{26n+3}$ est toujours irréductible.

Exercice 7 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la fraction $\frac{2n^2+11n-18}{n+7}$ est-elle irréductible ?

Exercice 8 Trouver tous les entiers relatifs x, y tels que $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Exercice 9 Trouver tous les entiers relatifs x tels que $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$.

Exercice 10

(i) Trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ tels que $m(m+1)$ est une puissance d'un nombre premier.

(ii) Trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ tels qu'il existe deux entiers $a \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$ tels que $m(m+1) = a^k$.

Exercice 11 Soit m un entier strictement positif. Peut-on trouver m nombres entiers positifs a_1, a_2, ..., a_m placés sur un cercle tels que si on prend deux nombres consécutifs sur ce cercle, le quotient du plus grand sur le plus petit est un nombre premier ?

- Corrigé -

Solution de l'exercice 1 Si n^2+1 divise $n+1$, on doit avoir $n^2+1 \leqslant n+1$, ou encore $n^2 \leqslant n$, c'est-à-dire $n \leqslant 1$. La seule possibilité est donc $n = 1$. Réciproquement, $n = 1$ convient bien.

Solution de l'exercice 2

(i) Si a divise b, alors comme b divise b^2, a divise b^2 par transitivité de la division. En revanche, si a divise b^2, alors a ne divise pas forcément b : par exemple 9 divise 3^2 mais 9 ne divise pas 3. La réponse est donc *non*.

(ii) Si a divise b, écrivons $b = ka$ avec $k \geqslant 1$ un entier. On élève cette égalité au carré : $b^2 = k^2a^2$. Donc a^2 divise b^2. Maintenant, supposons que a^2 divise b^2 et montrons que a divise b. Notons $v_p(n)$ la plus grande puissance de p divisant n. Il suffit de montrer que pour chaque nombre premier p divisant a, on a $v_p(a) \leqslant v_p(b)$. Comme a^2 divise b^2, $v_p(a^2) \leqslant v_p(b^2)$. Or $v_p(a^2) = 2v_p(a)$ et $v_p(b^2) = 2v_p(b)$. On a donc $2v_p(a) \leqslant 2v_p(b)$, ce qui impliquer $v_p(a) \leqslant v_p(b)$ et conclut la solution.

Solution de l'exercice 3 On réécrit l'équation $2^n = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, donc $(x+1)$ et $(x-1)$ sont tous les deux des puissances de 2. Les seules puissances de 2 de différence 2 sont 2 et 4, donc la seule solution est $n = 3$, $8+1 = 9$.

Solution de l'exercice 4 Écrivons $n = km$ avec $k, m \geqslant 1$ des entiers avec m impair. Comme $a^m + b^m$ set factorise par $a+b$ quand m est impair, l'entier $\left(2^k\right)^m + 1^m$ est divisible par $2^k + 1 \geqslant 2$, et n'est donc pas premier.

Solution de l'exercice 5 Écrivons une égalité sans dénominateurs : $k!(p-k)!\binom{p}{k} = p!$. Comme $0 < k < p$, on a $k < p$ et $p - k < p$. Ainsi, p divise $k!(p-k)!\binom{p}{k}$ sans diviser $k!(p-k)!$. Il divise donc $\binom{p}{k}$ d'après le lemme de Gauss.

Solution de l'exercice 6 Si un entier k divise $39n+4$ et $26n+3$, alors il divise aussi $3(26n+3) - 2(39n+4) = 1$, donc $k = 1$.

Solution de l'exercice 7 On veut calculer le PGCD de $2n^2+11n-18$ et de $n+7$, essayons donc l'algorithme d'Euclide :

$$2n^2 + 11n - 18 = (n+7) \times (2n-3) + 3$$

Donc le PGCD recherché est un diviseur de 3. Mais 3 divise $2n+7$ ssi $n \equiv 2[3]$, donc si $n \equiv 0$ ou $1[3]$, alors la fraction est irréductible. Inversement, on vérifie que si $n \equiv 2[3]$ alors la fraction peut être simplifiée par 3.

Solution de l'exercice 8 Tout d'abord, il est clair que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. L'entier x divise 7 d'après l'égalité. On a donc $x = -7, -1, 1$ ou 7. Pour chacune de ces valeurs, on obtient une valeur correspondante de y :

- pour $x = -7$, $-2 \cdot 7^3 - 7y - 7 = 0$, donc $y = -2 \cdot 7^2 - 1 = -99$,
- pour $x = -1$, $y = -9$,
- pour $x = 1$, $y = 5$,
- pour $x = 7$, $y = -97$.

Les solutions sont donc $(-7, -99)$, $(-1, -9)$, $(1, 5)$ et $(7, -97)$.

Solution de l'exercice 9 Développons les deux membres de l'égalité :

$$9 + 15x + 10x^2 + 2x^3 = 27 + 27x + 9x^2 + x^3.$$

On obtient, en faisant passer tout d'un seul côté :

$$-18 - 12x + x^2 + x^3 = 0.$$

Ainsi, x divise -18. Mais si x est pair, $-12x + x^2 + x^3$ serait divisible par 4 et donc -18 serait divisible par 4, ce qui n'est pas le cas. Il suffit donc de tester les valeurs $x = -3, -1, 1, 3$. On voit que $x = -3$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 10

(i) Écrivons $m(m+1) = p^k$ avec p un nombre premier et $k \geqslant 1$. Alors m et $m+1$ sont tous les deux des puissances de p. Écrivons donc $m = p^a$ et $m+1 = p^b$ avec $a, b \geqslant 0$ et $a+b = k$. Comme $p^b = m+1 \geqslant m = p^a$, on a $b \geqslant a$. Mais on a $p^b - p^a = 1$. Ainsi, si $a \geqslant 1$, p divise $p^b - p^a$ et donc p divise 1, absurde. Donc $a = 0$. Ainsi, $p^b = 2$, et donc $p = 2$ et $b = 1$, ce qui entraine forcément $m = 1$.

(ii) Par l'absurde, supposons qu'il existe des entiers $m \geqslant 1$, $a \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$ tels que $m(m+1) = a^k$. Comme m et $m+1$ sont premiers entre eux, il existe deux entiers positifs b, c premiers entre eux tels que $m = b^k$, $m+1 = c^k$ et

$bc = a$. Alors $c^k - b^k = 1$. Or $c - b$ divise $c^k - b^k$. Donc $c - b$ divise 1. Donc, comme $c \geqslant b$, on a $c = b + 1$. Donc $1 + b^k = (b+1)^k$. En développant $(b+1)^k$, on obtient :

$$1 + b^k = 1 + \binom{k}{1} b + \binom{k}{2} b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} b^{k-1} + b^k.$$

En simplifiant :

$$0 = \binom{k}{1} b + \binom{k}{2} b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} b^{k-1}.$$

Comme $b > 0$ et $k > 2$, le terme de droite est strictement positif, contradiction.

Solution de l'exercice 11 Pour m pair on trouve aisément un exemple (avec q premier) : $a_1 = p$, $a_2 = pq$, $a_3 = p$, $a_4 = pq$, ..., $a_{m-1} = p$, $a_m = pq$. Pour m impair on se rend compte qu'il n'est pas possible de trouver un exemple. Une première solution (expéditive) consiste à remarquer que $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} ... \frac{a_{m-1}}{a_m} \cdot \frac{a_m}{a_1} = 1$. Donc 1 est un produit nombres premiers ou inverses de nombres premiers. On peut donc regrouper deux à deux les terme du produit sous la forme $(p, \frac{1}{p})$. Contradiction car m est impair.

Deuxième solution : On considère v_i la somme des exposants dans la décomposition de a_i en nombres premiers. Alors v_i et v_{i+1} ont parité contraire. Impossible car il y a un nombre impair de v_i et que v_1 et v_m ont parité contraire.