DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Ambroise MARIGOT
STAGE : Grésillon 2011

Exercices de géométrie projective

Exercice 1 Soit Γ un cercle de centre O, et P un point extérieur au cercle. Soit $A \in \Gamma$ tel que (PA) soit tangente à Γ, et B le point diamétralement opposé à A. Soit Δ une droite passant par P et coupant Γ en C et D. La parallèle à (PO) passant par C coupe (AB) en M et (BD) en E. Montrer que M est le milieu de $[CE]$.

Exercice 2 Soit ABC un triangle, et A' le pied de la bissectrice issue de A. On considère un point X sur $[A'A]$, et on pose : $B' = (BX) \cap (AC)$, $C' = (CX) \cap (AB)$, $P = (A'B') \cap (CX)$, et $Q = (A'C') \cap (BX)$. Montrer que $\widehat{PAC} = \widehat{QAB}$.

Exercice 3 Soient Γ et Γ' deux cercles sécants en A et A'. Une première tangente commune aux deux cercles les touche en B et C, et l'autre tangente commune les touche en D et E. Montrer que les orthocentres des triangles ABC, $A'BC$, ADE et $A'DE$ forment un rectangle.

Exercice 4 Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. On pose $E = (AD) \cap (BC)$ et $F = (AC) \cap (BD)$. Soit M le milieu de $[CD]$, et N le point du cercle circonscrit à AMB distinct de M vérifiant $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}$. Montrer que E, F et N sont alignés.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, Γ son cercle inscrit, et I le centre de Γ. On note A', B' et C' les points de tangence respectifs de Γ avec (BC), (AC) et (AB). Soit Δ la droite parallèle à $(B'C')$ passant par A. On pose $J = (A'C') \cap \Delta$ et $K = (A'B') \cap \Delta$. Montrer que $\widehat{JIK}$ est un angle aigu.

Exercice 6 Soient a et b des tangentes respectives en A et B à un cercle Γ. Soit Δ un diamètre de Γ. On pose $A' = a \cap \Delta$, $B' = b \cap \Delta$, et $S = (AB') \cap (A'B)$. Soit T le projeté orthogonal de S sur Δ. Montrer que (TS) est une bissectrice de $\widehat{ATB}$.

Exercice 7 Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, et Δ une droite. On pose $D = (BC) \cap \Delta$, $E = (CA) \cap \Delta$ et $F = (AB) \cap \Delta$. On choisit aussi A', B' et C' sur Γ tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles à Δ. Montrer que $(A'D)$, $(B'E)$ et $(C'F)$ sont concourantes.

- Correction -

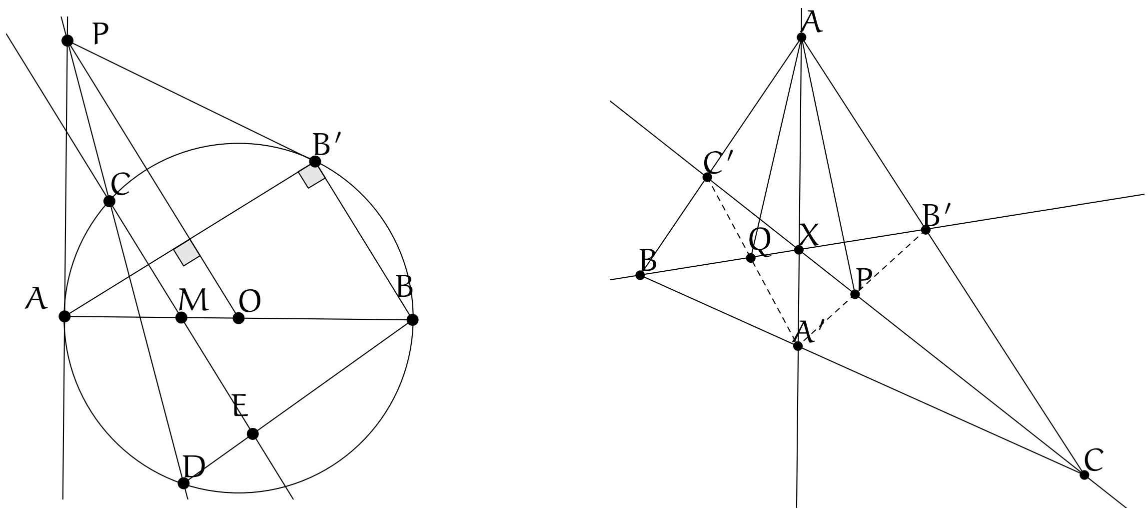

FIGURE 1 – Exercices 1 et 2

Solution de l'exercice 1 On veut montrer que C, E, M et ∞ sont harmoniques sur (CE). Projetons depuis B sur le cercle : cela revient à montrer que A, B', C et D sont harmoniques, où B' est le point d'intersection autre que B de la parallèle à (OP) passant par B. Or, on a :

$$\widehat{AOP} = \widehat{ABB'} = \widehat{BB'O} = \widehat{POB'},$$

donc B' est le pied de l'autre tangente à Γ issue de P, ce qui donne immédiatement l'harmonicité de A, B, C, D.

Solution de l'exercice 2 Considérons la parallèle à (BC) passant par A, elle intersecte (BC) en D à l'infini. Le problème revient à prouver que les droites $(AA'), (AD), (AQ), (AP)$ sont harmoniques, ce qui est un problème purement projectif. On peut donc appliquer une tranformation projective à la figure qui envoie ABC sur un triangle équilatéral et D à l'infini, et le problème est alors trivial.

Solution de l'exercice 3 L'axe radical $\Delta = (AA')$ passe par le milieu M de $[BC]$ et celui N de $[DE]$. L'inversion de centre M et de rayon MB laisse les cercles invariants, donc échange A et A'. Cela prouve que la polaire de A par rapport au cercle de diamètre $[BC]$ (ou par rapport à celui de diamètre $[DE]$ par un

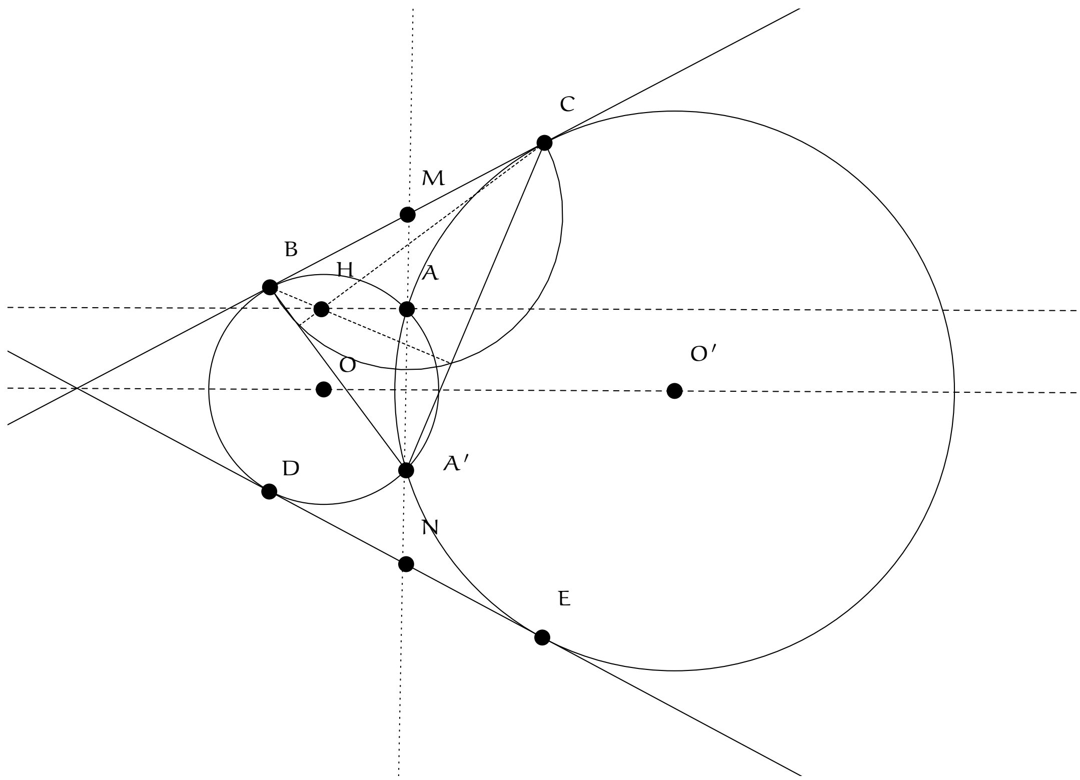

FIGURE 2 – Exercice 3.

raisonnement analogue) est la droite p' orthogonale à Δ passant par A', et de même la polaire de A' par rapport à chacun des deux cercles précédents est la droite p orthogonale à Δ passant par A. Or, l'orthocentre de $A'BC$ est sur la polaire de A' par rapport au cercle de diamètre $[BC]$, et celui de $A'DE$ sur la polaire de A' par rapport au cercle de diamètre $[DE]$, donc deux sommets du quadrilatère sont sur p, et un raisonnement semblable montre que les deux autres sont sur p'. Comme toute la figure est symétrique par rapport à la droite d joignant les centres des cercles Γ et Γ', et que d est parallèle à p et p', on a prouvé que le quadrilatère de l'énoncé est un rectangle.

Solution de l'exercice 4 Soit $G = (AB) \cap (CD)$ et M' la seconde intersection du cercle circonscrit à ABM avec (CD). On a alors $GM.GM' = GA.GB = GC.GD$ donc les points G, M', C et D sont harmoniques. Donc M', E, F sont alignés sur la polaire de G par rapport à Γ. Maintenant, remarquons que par définition de N, les points A, B, M et N sont harmoniques sur Γ' le cercle circonscrit à ABM. Projetons ces points sur (AB) depuis M' : on obtient quatre points harmoniques A, B, G et N', où N' est l'intersection de (AB) et $(M'N)$. Mais alors, comme G, N', A, B sont harmoniques ainsi que G, M', C, D, la droite $(M'N') = (MN)$ est la polaire de G par rapport à Γ, et contient donc aussi

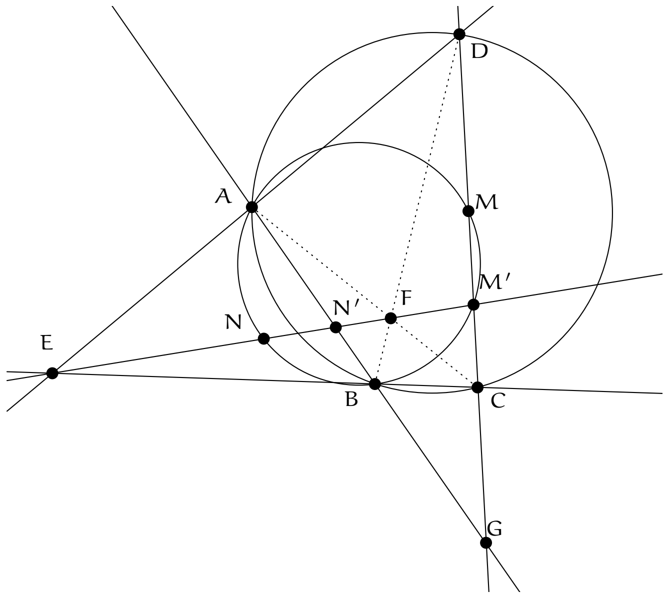

FIGURE 3 – Exercice 4

E et F.

Solution de l'exercice 5 On va montrer que J est sur la polaire de K (par rapport à Γ), ce qui donnera le résultat puisque dans le cas général, si X est sur la polaire de Y, on a $\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OY} = r^2$. Soit $G = (IA) \cap (C'B')$. La polaire de A étant $(B'C')$ et puisque $(IA) \perp (B'C')$, la polaire de G est (JK), donc G est sur la polaire de K. Comme la polaire de C est $(A'B')$, on déduit que la polaire de K est (CG). Il faut alors montrer que $(CG), (A'C')$ et (JK) sont concourantes. Soient $C_1 = (AB) \cap (CG), J_1 = (A'C') \cap (CG)$, et $J_2 = (JK) \cap (CG)$. En projetant les points C, C_1, G, J_2 depuis A sur $(B'C')$ on prouve qu'ils sont harmoniques. En projetant les points C, C_1, G, J_1 depuis C' on obtient quatre droites harmoniques d'après le théorème du quadrangle complet (le quadrangle étant $ABCG$, où G est le point de Gergonne du triangle). Donc C, C_1, G, J_2 sont harmoniques, et C, C_1, G, J_1 le sont aussi : cela prouve que $J_1 = J_2 = J$ et donc que J est sur la polaire (CG) de K par rapport à Γ.

Solution de l'exercice 6 Soit $X = (AB) \cap \Delta$. Envoyons X à l'infini et Γ sur un cercle par une transformation projective (cela est toujours possible, cf. projection stéréographique). On a supposé ici que X était à l'extérieur du cercle ; s'il est à l'intérieur on l'envoie sur le centre du cercle et la démonstration est essentiellement la même. Il est alors clair par construction que S appartient à la polaire de X par rapport à Γ. Donc dans la figure initiale (ST) est la polaire de X, car cette polaire est orthogonale à $(OX) = \Delta$. Soit $Y = (AB) \cap (ST)$, on a immédiatement

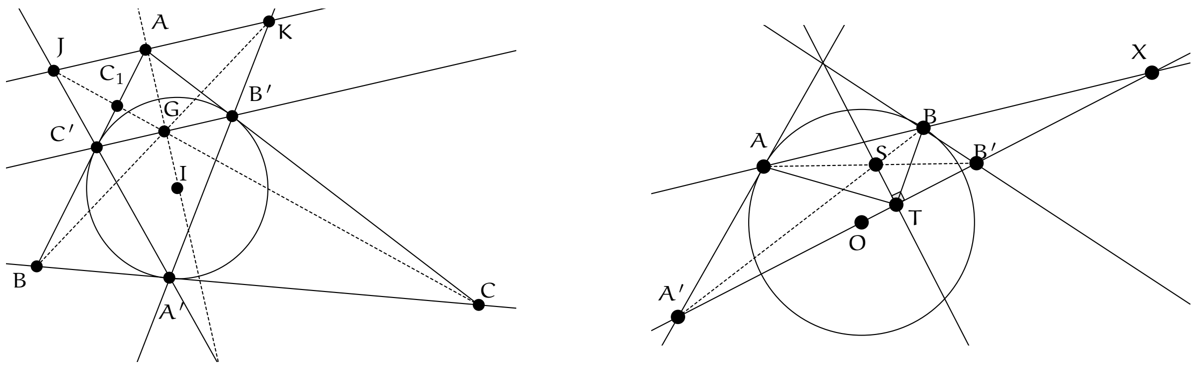

FIGURE 4 – Exercices 5 et 6

X, Y, A, B harmoniques. Donc les droites $(TX) = \Delta, (TY) = (TS), (TA), (TB)$ sont harmoniques, et comme $\Delta \perp (TS)$, on déduit que (TS) est la bissectrice de $\widehat{ATB}$.

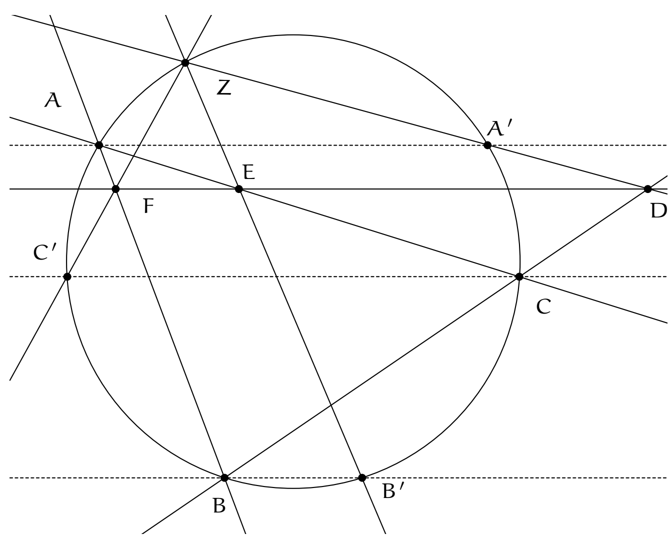

FIGURE 5 – Exercice 7

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soit $Z = (C'F) \cap (B'E)$. Appliquons la réciproque du théorème de Pascal à l'hexagone $ABB'ZC'C$: les points E, F et $\infty_{(BB')}$ sont alignés donc Z appartient à la conique circonscrite à $ABB'CC'$: c'est ici le cercle Γ. Soit $Z' = (A'D) \cap (B'E)$. Appliquons la réciproque du théorème de Pascal à l'hexagone $CBB'Z'A'A$: les points D, E et $\infty_{(BB')}$ sont alignés donc Z' appartient à Γ. On a donc $Z = (B'E) \cap \Gamma = Z'$ donc $(A'D), (B'E)$ et $(C'F)$ sont concourantes en $Z \in \Gamma$.