DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BORNSZTEIN
STAGE : Cachan 2010 (junior)

Inégalités

Exercice 1 1) Prouver que, pour tous réels a et b, on a

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \text{ et } (a+b)^2 \geqslant 4ab.$$

2) Prouver que, pour tous réels positifs x et y, on a

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}.$$

3) Prouver que, pour tout réel $x > 0$, on a

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

4) Prouver que, pour tout réel a, on a

$$a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 2 Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tous réels $a, b > 0$, on a

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

Exercice 3 (Test entrée OFM 2010) Prouver que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$1 + x^{2006} \geqslant \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}.$$

Exercice 4 Prouver que, pour tous réels a, b, c, d tels que $a+b+c+d=1$, on a

$$ab+bc+cd+da \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 5 Prouver que, pour tous réels a, b, c, on a

$$a^2+4b^2+8c^2 \geqslant 3ab+4bc+2ca.$$

Exercice 6 (d'après OIM 2008) Soient x, y, z des réels, tous différents de 1, et tels que $xyz=1$. Prouver que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

Exercice 7 (Test OFM 2008) Soit $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ un polynôme à coefficients réels positifs ou nuls.

Prouver que, pour tout réel x non nul, on a

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant [P(1)]^2.$$

Exercice 8 Soit x, y, z des réels tels que

$$\begin{cases} x^3 = 2y-1 \\ y^3 = 2z-1 \\ z^3 = 2x-1 \end{cases}$$

Prouver que $x=y=z$.

Exercice 9 (Inégalité de Schur) 1) Prouver que, pour tous réels $a, b, c > 0$, on a

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

2) Prouver que, pour tout réel t et tous réels $a, b, c > 0$, on a

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$