DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Simon PÉPIN-LEHALLEUR
STAGE : Montpellier 2012

Graphes

- Énoncés -

Exercice 1 Dans une fête, chaque personne a au moins un ami, et parmi tout groupe d'au moins trois personnes, il n'y a jamais exactement deux paires d'amis. Montrer que tout le monde s'aime ! Que se passe-t-il si on suppose cette propriété vraie seulement pour les groupes de trois personnes ?

Exercice 2 Un tournoi entre les chevaliers du Roi Arthur a été organisé, et toutes les joutes possibles ont été livrées. Montrer qu'il est possible d'ordonner les chevaliers de telle sorte que le premier ait battu le second, le second ait battu le troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

Bonus : s'il y a n chevaliers ayant gagné $v_1, v_2, \dots v_n$ combats, montrer que le tournoi est transitif (au sens où si A a vaincu B et B a vaincu C, alors A a vaincu C) si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Exercice 3 Soit G un graphe à n sommets tel que G ne contient pas de triangle (cycle de longueur 3). Prouver que G a au plus $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arêtes. Montrer que ce résultat est optimal.

Bonus : montrer que dans un graphe ayant k arêtes, il existe au plus $\lfloor \frac{\sqrt{2}}{3} k^{3/2} \rfloor$ triangles.

Exercice 4 Soit G un graphe complet à n sommets. On fait une suite d'opérations élementaires consistant à choisir un 4-cycle (s'il en existe) et à retirer une arête. Quel est le plus petit nombre d'arêtes possible parmi les graphes que l'on peut atteindre ?

Exercice 5 A la suite du tournoi, les chevaliers du Roi Arthur se sont querellés. Des semaines de patientes négociations par Merlin ont fait en sorte que chaque chevalier est fâché avec moins de la moitié de tous les chevaliers (au sens strict s'ils sont en nombre impair). Est-il possible d'enfin les arranger autour de la Table Ronde de manière à ce que deux ennemis ne soient assis côte à côte ?

Exercice 6 Existe-t-il un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles sauf une qui est un pentagone, et tel que tous les sommets sont de degré pair ?

Exercice 7 On oriente arbitrairement les arêtes d'un polyèdre convexe, de telle sorte que tout sommet aie au moins une arête entrante et une arête sortante. Montrer qu'il existe deux faces qui sont orientées de manière cohérente. On pourra introduire pour chaque $s \in G$, $c(s)$ le nombre $c(s)$ de changements d'orientation dans l'ordre cyclique des arêtes autour de s, et pour chaque face F, le nombre $c(F)$ de changement d'orientation dans l'ordre cyclique des arêtes autour de F.

- **Corrigé** -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On peut supposer qu'il y a au moins 4 personnes. Supposons par l'absurde qu'il y ait deux personnes A et B qui ne s'aiment pas. Soit C un ami de A et D un ami de B. Par hypothèse, B et C ne s'aiment pas, donc $C \neq D$. Si C et D sont amis, on obtient que C et B sont amis, ce qui est une contradiction. D'autre part, si C et D ne s'aiment pas, alors A, B, C, D est un groupe de quatre personnes avec exactement deux paires d'amis, et on a encore une contradiction.

Sous l'hypothèse plus faible, on montre facilement en "suivant les chemins" que la fête sécrit comme une réunion de graphes complets disjoints.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Reformulation en termes de graphe : on donne une direction à chaque arête du graphe complet K_n. Montrons qu'il existe un chemin respectant les orientations et passant exactement une fois par chaque sommet.

On le fait par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 1$! Soit $n \geqslant 2$. On se donne une direction sur chaque arête de K_n. Soit x un sommet quelconque. Par récurrence, $K_n - x$ (qui est un graphe complet à $n-1$ sommets) admet un chemin $P = x_1 \dots x_{n-1}$ respectant les orientations et passant par tous les sommets. Il y a trois possibilités pour les arêtes reliant x à P : soit l'arête xx_1 est orienté vers x_1, soit l'arête xx_{n-1} est orientée vers x, soit ces deux choses ne se produisent pas. Dans le premier et le second cas, on rajoute x en début où en fin de chemin et on a gagné. Dans le second, on considère le plus petit indice i tel que xx_i est orientée vers x et xx_{i+1} est orientée vers x_{i+1}, et on insère x entre x_i et x_{i+1}.

Pour la preuve du bonus, la première question donne l'implication "tournoi transitif"$\Leftarrow \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. Pour la réciproque, on remarque que la somme des v_i est constante ($\frac{n(n-1)}{2}$). On montre alors que si le tournoi n'est pas transitif, alors on peut trouver une arête dont le renversement fait baisser la valeur de la somme.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On le démontre par récurrence sur $n \leqslant 1$. Pour $n = 1$ et $n = 2$, le nombre d'arêtes possible est 0 et 1, ce qui correspond bien à la borne. Soit $n \geqslant 3$ et G un graphe à n sommets sans triangle. On choisit une arête $e = xy$ quelconque dans G, et on regarde le graphe $G' = G - \{x, y\}$. Par hypothèse de récurrence, il admet au plus $\lfloor (n-2)^2/4 \rfloor$ arêtes. D'autre part, chaque sommet de G' est relié à au plus l'un de x, y (car sinon on aurait un triangle). Donc le nombre d'arêtes de G est au plus :

$$\lfloor (n-2)^2/4 \rfloor + (n-2) + 1 \leqslant (n-2)^2/4 + (n-2) + 4 = n^2/4$$

Comme ce nombre d'arêtes est bien sûr entier, ceci conclut.

Un graphe qui réalise la borne est le graphe biparti $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$. On peut montrer qu'il est en fait unique. C'est un cas particulier dû à Montel d'un théorème de Turan (cf. poly de Pierre Bornzstein, section 3.5 et exercice 18).

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Le graphe complet est connexe, et l'opération élémentaire préserve la connexité car on détruit des cycles. Les graphes obtenus sont donc connexes, et ont au moins $n-1$ arêtes. Il reste à voir si on peut obtenir un arbre.

L'observation-clé est qu'un arbre est biparti, alors que K_n (pour $n \geqslant 3$, seul cas intéressant) ne l'est pas ! Soit G un graphe et G' un graphe obtenu par opération élémentaire à partir de G. Supposons G' biparti, disons avec $S(G') = S' \cup S''$. Le graphe G est obtenu à partir de G' en rajoutant une arête à un chemin $v_1v_2v_3$ de longueur 3 pour former un 4-cycle. Comme G' est biparti, on doit avoir v_1 et v_3 tous deux dans S' ou dans S'', et rajouter l'arête v_3v_1 donne encore un graphe biparti. Donc G est biparti. Donc on ne peut obtenir un arbre à partir du graphe complet, et le nombre d'arêtes minimal est $\geqslant n$.

La borne n est accessible. Soit G_n le graphe à n arêtes formé par un chemin de longueur $n-2$ auquel on ajoute un triangle à une extrémité. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 3$ que l'on peut obtenir G_n à partir de K_n. Pour $n = 3$, c'est clair. Mais à partir de K_n pour $n \geqslant 4$, on peut utiliser des opérations élémentaires pour supprimer toutes les arètes reliant un sommet fixé aux autres sauf une, et applique la récurrence au K_{n-1} sur les autres.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> La reformulation en termes de théorie des graphes est un théorème de Dirac. Soit G un graphe à $n \geqslant 3$ sommets tel que tout sommet est de degré $\geqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Montrons qu'il existe un cycle hamiltonien dans G, c'est-à-dire un cycle passant exactement une fois par chaque sommet.

Tout d'abord, G est clairement connexe (regarder le degré maximal des sommets dans la plus petite composante connexe). Considérons un chemin $P = x_0 \dots x_k$ de longueur maximale k dans G. Par maximalité, tous les voisins de x_0 et x_k sont dans P. Par la condition sur le degré et le principe des tiroirs, il existe un indice $0 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que $x_0 x_{i+1} \in G$ et $x_i x_k \in G$. Mais alors on a un cycle $C = x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$. Supposons par l'absurde que C n'est pas hamiltonien, i.e. qu'il existe $y \in G - C$. Alors par connexité de G, C a un voisin dans $G - C$, et on voit que l'on a un chemin de longueur $> k$. Donc C est un chemin hamiltonien de G.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On fait un double décompte des arêtes :

$$3(f-1)+5 = 2a$$

que l'on réinjecte dans la formule d'Euler, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f &= 2s-6 \\ a &= 3s-8 \end{aligned}$$

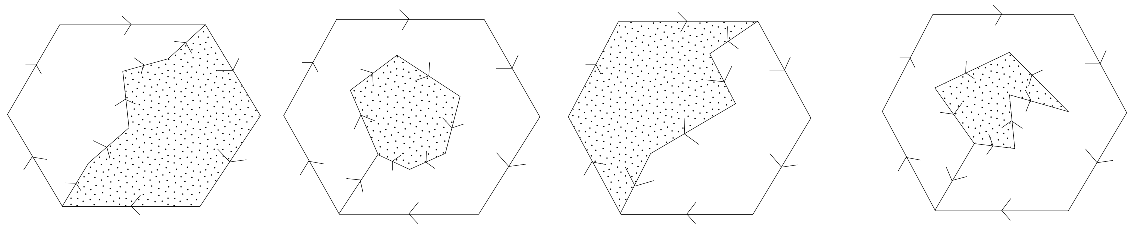
Il n'y a pas de contradiction à ce stade, il faut exploiter la condition sur les degrés. Pour cela, on remarque que si tous les degrés de G sont pairs, on peut colorier les faces en noir et blanc de sorte que deux faces adjancentes n'aient pas la même couleur : en effet, le graphe dual de G est biparti (il n'a pas de cycle de longueur impaire), donc est bicoloriable ! Maintenant, soit f_n (resp. f_b) le nombre de faces noires (resp. blanches). On peut supposer que le pentagone est noir. On refait un double décompte par couleur :

$$\begin{aligned} a &= 3(f_n - 1) + 5 \\ a &= 3f_b \end{aligned}$$

d'où l'on tire $3 \mid a$, puis $3 \mid 5$, ce qui est absurde.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> La formule clé est :

$$\sum_{s \in S(G)} c(s) + \sum_{F \in F(G)} c(F) = 2e$$



Elle se démontre par exemple par récurrence sur le nombre de sommets, en regardant ce qui se passe quand on introduit un nouveau sommet. (Il y a sans doute aussi un double décompte astucieux...). Combiné avec la formule d'Euler, cela donne :

$$\sum_{s \in S(G)} c(s) + \sum_{F \in F(G)} c(F) = 2s + 2f - 4$$

Or l'hypothèse se traduit par : $\forall s \in S(G),\ c(s) \geqslant 2$. On en déduit :

$$\sum_{F(G)} c(F) \leqslant 2f - 4$$

Or $c(F) = 0 \Leftrightarrow$ F est orientée de manière cohérente, et $c(F)$ est toujours pair. On en déduit immédiatement qu'il y a au moins deux faces orientées de manière cohérente.

Cette approche assez étrange à première vue est l'analogue discret d'un théorème sur la topologie des surfaces, à savoir la formule de Poincaré-Hopf sur l'indice d'un champ de vecteur sur la sphère.

Autre solution (proposée par Séginus Mowlawi) : On commence par construire, comme application du fait que tout sommet à une arête sortante et du théorème de la poêle à frire, un cycle orienté correctement. On raisonne ensuite sur les deux "moitiés" du polyèdre découpées par ce cycle. Dans chacune d'entre elles, on montre l'existence d'une face orientée de manière cohérente, par récurrence descendante sur le nombre de faces encloses, en utilisant suivant les cas l'existence d'arêtes entrantes ou d'arêtes sortante. La figure suivante décrit tous les cas possibles et vaut mieux qu'un long discours :