DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Guillaume CONCHON-KERJAN
STAGE : Montpellier 2013

Equations fonctionnelles

- Énoncés des exercices -

Exercice 1 (Périodicité 1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour un certain $a > 0$, pour tout réel x,

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$$

Montrer que f est périodique.
(IMO 1968)

Exercice 2 (Périodicité 2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x :

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x),$$

montrer qu'elle est périodique.

Exercice 3 (Substitutions 1) Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Exercice 4 (Substitutions 2) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

(IMO 2010)

Exercice 5 (Constructions dans $\mathbb{R}$) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(1) = 1$ et pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 + x_2 \leqslant 1$, $f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$. Montrer que pour tout réel x,

$$f(x) \leqslant 2x$$

et qu'on ne peut pas améliorer cette constante.
(URSS 1974)

Exercice 6 (Points fixes et limites) Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}^*+ \to \mathbb{R}^*+$ telles que pour tous $x, y > 0$, $f(xf(y)) = yf(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
(IMO 1983)

Exercice 7 (Polynômes 1) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$$

pour tout réel x.

Exercice 8 (Injectivité et récurrence) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout naturel n,

$$f(n) + f(f(n) + f(f(f(n)))) = 3n.$$

Exercice 9 (Inéquation dans $\mathbb{N}$) Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Montrer que si pour tout naturel n,

$$f(n+1) > f(f(n))$$

alors f est l'identité.
(IMO 1977)

Exercice 10 (Constructions dans $\mathbb{N}$ 1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n,

$$f(f(n)) = n + 2013 \quad ?$$

(IMO 1987 - réactualisé...)

Exercice 11 (Arithmétique des fonctions) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $f(2) = 2$ et pour tous m, n premiers entre eux, $f(mn) = f(m)f(n)$.

Exercice 12 (Constructions dans $\mathbb{N}$ 2) Existe-t-il une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même, strictement croissante, telle que $f(1) = 2$ et que pour tout n,

$$f(f(n)) = f(n) + n \quad ?$$

(IMO 1993)

- Solutions -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On a $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$, posons $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ En élevant au carré, on obtient : $g^2(x+a) = \frac{1}{4} - g^2(x)$, ce qui donne aussi $g^2(x+2a) = \frac{1}{4} - g^2(x+a)$. En sommant les deux relations,

$$g^2(x) = g^2(x+a)$$

or ces deux quantités sont positives, donc on a $g(x) = g(x+2a)$ pour tout réel x, soit f et g $2a$-périodiques.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On applique à $x, x+1$ et $x+2$ la condition de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(f(x+1)+f(x-1)) = 2f(x)\\
&f(x+2)+f(x) = \sqrt{2}f(x+1)\\
&f(x)+f(x-2) = \sqrt{2}f(x-1)
\end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer ces trois équations pour obtenir $f(x+2) = -f(x-2)$ d'où l'on déduit que f est 8-périodique.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On exprime l'équation fonctionnelle avec les valeurs x, $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{x} - 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\\
&f\left(1-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\\
&f(x) + f\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

En sommant les première et troisième lignes puis en soustrayant la deuxième, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Posons $x = 0$ dans l'équation, on a $f(0) = f(0)\lfloor f(y) \rfloor$ pour tout réel y.

• Si $f(0) \neq 0$, alors $f(y) \in [1, 2[$ pour tout y réel. Avec $y = 0$ dans l'équation, on obtient $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est constante de valeur $v \in [1, 2[$.

• Si $f(0) = 0$, on montre que f est la fonction nulle. Si pour un certain $z \in [0, 1[$,

$f(z) \neq 0$, on obtient avec $x = z : 0 = f(0) = f(z)\lfloor f(y) \rfloor$ donc pour tout réel y, $f(y) \in [0, 1[$. Reprenons l'équation initiale avec $x = 1$ et $y = z$, on obtient $f(z) = 0$, contradiction.
Donc f est nulle sur $[0, 1[$. Si maintenant $z \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{z}{n} \in [0, 1[$. On obtient avec $x = n$ et $y = \frac{z}{n}$:

$$f(z) = f(n)\lfloor f(\frac{z}{n}) \rfloor = 0$$

donc f est bien la fonction nulle.
Réciproquement, ces fonctions satisfont toutes l'équation.

Solution de l'exercice 5 Soit f une fonction répondant au problème. Il vient vite $f(0) = 0$.
De la même manière que la formule de Jensen qui caractérise les fonctions convexes et concave, on montre par récurrence sur $n \geqslant 2$ que si $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$ et $\sum x_i \leqslant 1$, alors

$$f(x_1 + \cdots + x_n) \geqslant f(x_1) + \cdots + f(x_n)$$

Le lecteur aura soin de poser $y = x_1 + x_2$ et d'appliquer la formule de récurrence. En particulier, pour $x \leqslant \frac{1}{n}$,

$$f(nx) \geqslant nf(x)$$

Maintenant, si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a $f(x) \leqslant f(1) - f(1 - x) \leqslant f(1) \leqslant 1 \leqslant 2x$.
Si $x \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $\frac{1}{2} \leqslant nx \leqslant 1$. Par ce qui précède, $nf(x) \leqslant f(nx) \leqslant 2nx$, donc $f(x) \leqslant 2x$.
Et, quelle fonction utiliser pour montrer que la constante 2 ne peut être améliorée ?
Prenons $f(x) = 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ et $f(x) = 1$ sinon. On vérifie rapidement qu'elle vérifie l'énoncé. Maintenant, soit $c \in]0, 2[$. Il existe $x_0 > \frac{1}{2}$ tel que $1 > cx_0$, donc $f(x_0) > cx_0$. Ainsi c ne peut convenir comme constante.

Solution de l'exercice 6 Avec $x = y$, on voit que pour tout $x > 0$, $xf(x)$ est un point fixe de f. Si z est point fixe de f, avec $x = 1$ et $y = z$, on obtient $z = zf(1) \neq 0$ donc 1 est aussi un point fixe.
De plus, une récurrence rapide montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^n est aussi un point fixe de f.
La substitution $y = a = \frac{1}{x}$ donne

or $f(\frac{1}{a}f(a)) = f(1) = 1$ donc a^{-1} est aussi un point fixe de f. On en déduit que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f(a^m) = a^m$. La condition sur la limite en $+\infty$ impose $a = 1$.

Donc pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est réciproquement bien solution du problème.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On trouve $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(5) = 5$, etc. On définit alors la suite (a_n) par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 1$.
On vérifie sans difficulté qu'elle est strictement croissante, et on montre par récurrence sur n que $P(a_n) = a_n$. Ainsi, le polynôme $Q(X) = P(X) - X$ a une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul. Autrement dit, pour tout réel x, $P(x) = x$. Réciproquement, l'identité est solution du problème.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Notons que si $f(n) = f(m)$ alors l'égalité reste vraie en composant par f, donc $3n = 3m$ donc f est injective. Montrons par récurrence forte sur n que $f(n) = n$. On initialise à $n = 1$: on a $f(1), f(f(1)), f(f(f(1))) \in \mathbb{N}^*$ et leur somme vaut 3, donc $f(1) = 1$.
Supposons le rang n, $n \geqslant 1$. On a $f(n+1) \geqslant n+1$ par injectivité de f. De même, $f(f(n+1))$ et $f(f(f(n+1)))$ ne peuvent être dans $\{1, \cdots, n\}$. Or

$$f(n+1) + f(f(n+1)) + f(f(f(n+1))) = 3(n+1)$$

donc $f(n+1) = n+1$ et ceci clôt la récurrence. L'identité est bien l'unique solution du problème (elle convient effectivement).

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Montrons d'abord que f est strictement croissante : pour tout $n > 0$, $f(n) > f(f(n-1))$ donc f admet un minimum en 0 (le fait que f soit à valeurs entières et minorée par 0 assure de l'existence d'un minimum), et uniquement en 0. Cherchons la deuxième plus petite valeur de f : pour tout $n > 1$, $f(n) > f(0)$ et $f(n) > f(f(n-1))$ avec $f(n-1) \neq 0$ car $f(n-1) > 0$. Donc la deuxième plus petite valeur de f ne peut être atteinte qu'en 1. On montre en continuant ainsi que f est strictement croissante (le lecteur pourra rédiger la récurrence en question).
Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f(n) \geqslant n$ pour tout n. S'il existe m tel que $f(m) > m$, on a $f(m) \geqslant m+1$ donc par croissance de f, $f(f(m)) \geqslant f(m+1)$, ce qui contredit l'énoncé. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = n$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Si f est solution, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1987) = f(n) + 1987$$

donc une récurrence immédiate montre pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ que $f(n+1987k) = f(n) + 1987k$.
On considère g la fonction induite par f de $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ dans lui-même. D'après l'énoncé, g^2 est l'identité. C'est donc une involution, or $\mathbb{Z}/1987\mathbb{Z}$ a un cardinal impair, donc il existe un point fixe n_0. Donc $f(n_0) = 1987 + m$ pour un certain $m \geqslant 0$. Et,

$$n_0 + 1987 = f(f(n_0)) = f(n_0 + 1987k) = f(n_0) + 1987k = f(n_0) + 1987 \times 2k$$

donc $k = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.
On peut faire différemment : on note $f(\mathbb{N})$ l'image de $\mathbb{N}$ par f, $A = \mathbb{N} - f(\mathbb{N})$, et $B = f(A)$. Il est clair que $B = f(\mathbb{N}) - f(f(\mathbb{N}))$: B est inclus dans $f(\mathbb{N})$, et si $k \in B$, alors il ne peut y avoir $k' \in \mathbb{N}$ tel que $f(f(k')) = k$ et réciproquement. A et B sont disjoints, leur union est $\mathbb{N} - f(f(\mathbb{N})) = \{0, \cdots, 1986\}$, de cardinal 1987, qui est impair. Et, f est injective, donc A et B doivent avoir même cardinal, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 11 Par stricte croissance de f, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour multiplier des nombres premiers entre eux sans utiliser 1, on aimerait bien connaître $f(3)$ par exemple. Posons $f(3) = 3 + k$, $k \geqslant 0$. Par encadrement successifs sur des petites valeurs, on montre que $k = 0$: en effet, $f(6) = 2k + 6$ donc $f(5) \leqslant 2k + 5$ et $f(10) \leqslant 4k + 10$, $f(9) \leqslant 4k + 9$, $f(18) \leqslant 8k + 18$. Et, $f(5) \geqslant 5 + k$ donc $f(3+k)(5+k) \leqslant f(15) \leqslant f(18) - 3$ et de ceci on déduit $k = 0$.
Maintenant, montrons par récurrence sur n que $f(k) = k$ si $k \leqslant 2^n + 1$. On a vérifié l'initialisation à $n = 1$, et pour l'hérédité :

$$f(2^{n+1} + 2) = f(2)f(2^n + 1) = 2 = n + 1 + 2$$

donc les $f(k), 2^n + 2 \leqslant k \leqslant 2^{n+2} + 2$ sont compris entre $2^n + 2$ et $2^{n+2} + 2$ au sens large, et la stricte croissance de la fonction assure que $f(k) = k$ pour tout $k \leqslant 2^{n+1} + 1$. Ceci clôt la récurrence, et permet d'affirmer que f est l'identité. Réciproquement, cette fonction est évidemment solution du problème.

Solution de l'exercice 12 La question est vicieusement piégeuse : la bonne réponse est un "oui" ingénu. On procède alors à la construction d'une fonction convenable. Puisqu'on travaille sur les entiers, on peut procéder par récurrence. $f(1) = 2$ et supposons que pour un certain $n \geqslant 1$, on ait construit $f(1) < \cdots < f(n)$. Pour simplifier la notation, soit $E = \{1, \cdots, n\}$.
On va essayer de définir une fonction "réciproque" de f en utilisant la croissance : soit $g(n+1)$ le plus grand entier $m \in E$ tel que $f(k) \leqslant n + 1$. Alors,

$f(n+1) = g(n+1) + n + 1$. La stricte croissance de f sur E assure que $g(n+1) \geqslant g(n)$ donc $f(n+1) > f(n)$.
De plus, $f(f(n+1)) = f(n+1) + g(f(n+1))$. Or, par stricte croissance de f sur E, $f(n+1) > n+1$ (on avait aussi $f(1) > 1$). On en déduit que $g(f(n+1)) = n+1$, ce que l'on voulait. Ceci clôt la récurrence, et on peut ainsi construire une fonction respectant les contraintes de l'énoncé.