DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

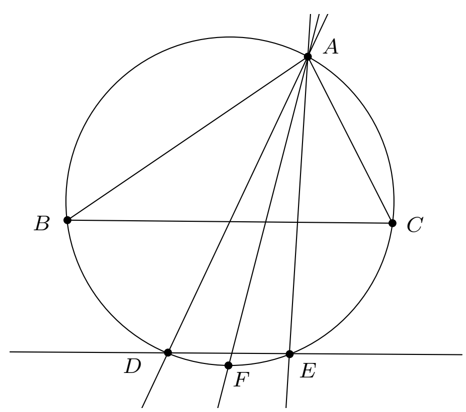
AUTEUR : Jean-Louis TU
STAGE : Montpellier 2014

Isogonalité

1 La symédiane

Soit ABC un triangle. On appelle la symédiane issue de A le symétrique de la médiane par rapport à n'importe quelle bissectrice issue de A.

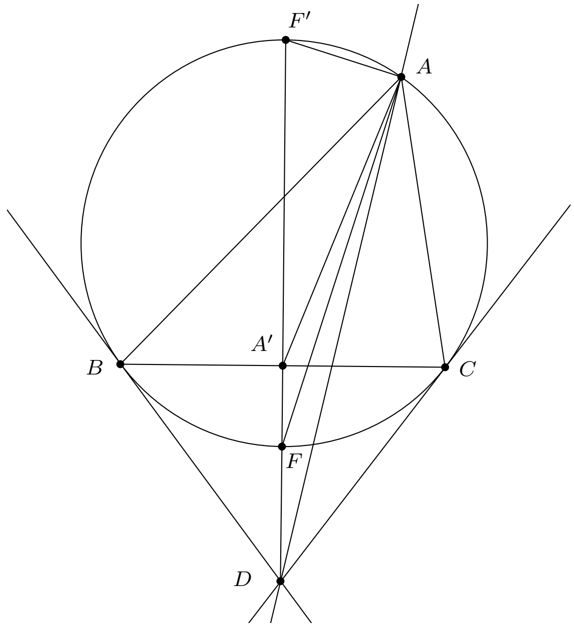
Proposition 1.1. Soient D et E les points du cercle circonscrit autres que A appartenant respectivement à la médiane et à la symédiane issues de A. Alors (DE) est parallèle à (BC).



Soit F le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Alors F est le milieu de l'arc DE, donc E est le symétrique de D par rapport à la médiatrice de $[BC]$, ce qui prouve que (DE) est perpendiculaire à la médiatrice de $[BC]$.

La proposition qui précède fournit donc un moyen de construire une symédiane d'un triangle. Voici une autre construction très importante :

Théorème 1.2. La symédiane issue de A passe par l'intersection des tangentes en B et en C au cercle circonscrit.

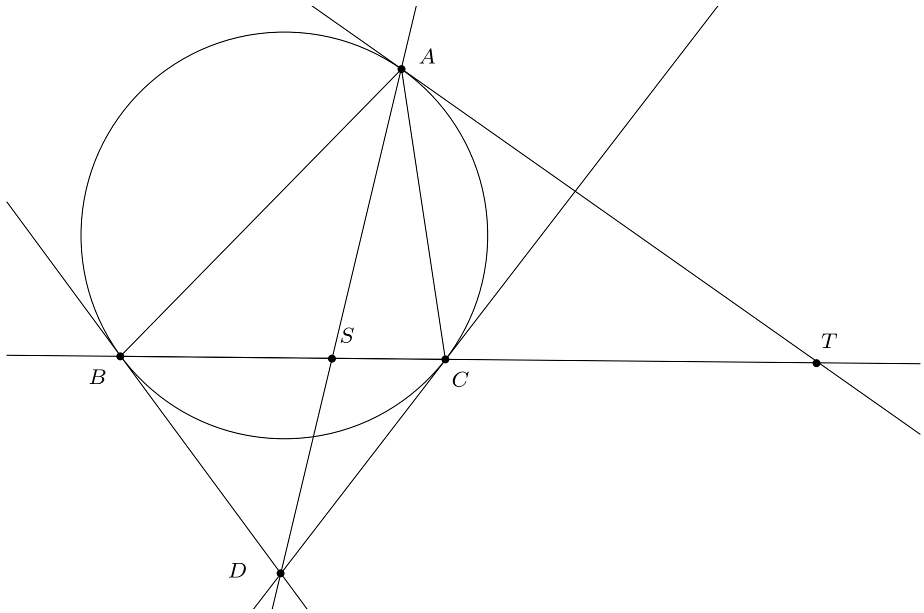


Une démonstration rapide utilise les notions de birapport et de polarité par rapport à un cercle mais d'autres démonstrations existent. Nous la donnons ci-dessous ; le lecteur pourra admettre le résultat en première lecture.

Soient F et F' les milieux des arcs délimités par BC.
Soit D le point d'intersection des tangentes en B et en C. Le pôle de (BC) par rapport au cercle circonscrit est D, donc (D, A', F, F') est une division harmonique.
On projette à partir de A. Comme (AF) et (AF') sont perpendiculaires, ce sont les bissectrices de (AA') et de (AD), ce qui montre que (AA') est la symédiane issue de A.

Théorème 1.3. Soit S le pied de la symédiane issue de A. Alors

$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



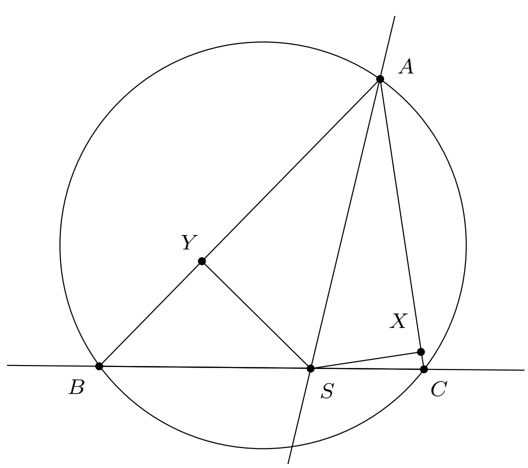
Ici encore, on pourra admettre le résultat en première lecture.

On reprend les notations précédentes. Soit T le point d'intersection entre (BC) et la tangente en A au cercle circonscrit. Alors T appartient à la polaire de D et à la polaire de A, donc T est le pôle de la symédiane (AD). Par conséquent, T est le conjugué harmonique de S par rapport à $[BC]$. On en déduit que $\frac{SB}{SC} = \frac{TB}{TC}$. Or, TAC et TBA sont semblables, donc $\frac{TB}{TA} = \frac{TA}{TC} = \frac{AB}{AC}$. Le produit des deux premières fractions est égal au carré de la troisième :

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

ce qui conclut.

Théorème 1.4. Soient X et Y les projetés orthogonaux d'un point S de la symédiane issue de A sur les côtés (AC) et (AB). Alors $\frac{SX}{SY} = \frac{b}{c}$ où $b = AC$ et $c = AB$.



D'après le théorème de Thalès, on peut supposer que S est le pied de la symédiane. Soit h la hauteur du triangle issue de A. On a

$$\begin{aligned}|ASB| &= \frac{1}{2}hBS = \frac{1}{2}SY \times c \\ |ASC| &= \frac{1}{2}hCS = \frac{1}{2}SX \times b\end{aligned}$$

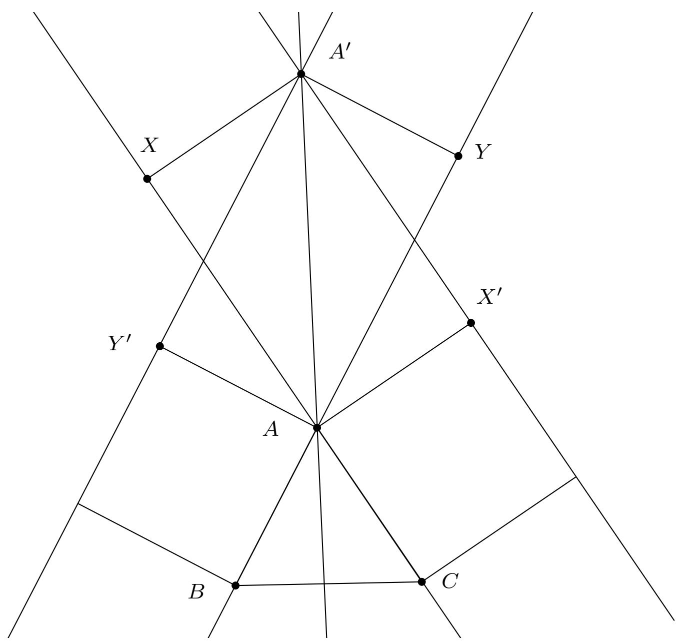
donc $\frac{SX}{SY} \times \frac{b}{c} = \frac{CS}{BS} = \frac{b^2}{c^2}$, d'où la conclusion.

Exercice 1. Soient B' et C' les points de $[AC)$ et $[AB)$ tels que $AB' = AB$ et $AC' = AC$. Montrer que le milieu de $[B'C']$ se trouve sur la symédiane de ABC issue de A.

Solution de l'exercice 1 B' et C' sont les symétriques de B et C par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc leur milieu est le symétrique du milieu de $[BC]$.

Exercice 2. Sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ on construit des carrés à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que les côtés des carrés opposés à (AB) et (AC) se coupent en un point de la symédiane issue de A.

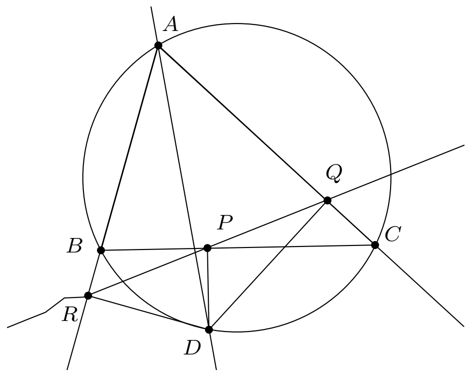
Solution de l'exercice 2



Soient X et Y les projetés de A' sur (AC) et (AB) et X' et Y' les sommets des carrés, autres que C et B, qui sont adjacents à A'. Alors $A'Y = AY'$ car $A'YAY'$ est un rectangle, donc $A'X = AB$ et de même $A'Y = AC$. On en déduit que $\frac{A'X}{A'Y} = \frac{AB}{AC}$, donc A' est sur la symédiane.

Exercice 3. La symédiane issue de A d'un triangle ABC recoupe le cercle circonscrit en D. Soient P, Q, R les projetés orthogonaux de D sur les côtés (BC), (CA) et (AB). Montrer que $PQ = PR$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

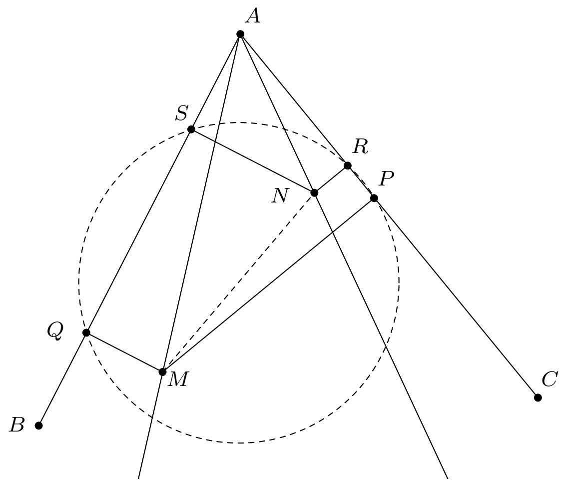


On rappelle que P, Q, R sont alignés sur la droite de Simson associée au point D.
En utilisant la loi des sinus dans le triangle PQD et la cocyclicité de $PQCD$, on trouve que $\dfrac{PQ}{QD} = \dfrac{\sin \widehat{QDP}}{\sin \widehat{DPQ}} = \dfrac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{DPQ}}$ et de même $\dfrac{PR}{RD} = \dfrac{\sin \widehat{CBA}}{\sin \widehat{RPD}}$.
On en déduit que $\dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{DQ}{DR} \times \dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \dfrac{AC}{AB} \times \dfrac{c}{b} = 1$.

2 Droites isogonales

Plus généralement, deux droites passant par A qui sont symétriques par rapport à n'importe quelle bissectrice de $\widehat{A}$ sont dites isogonales. De même que pour la symédiane, on montre que si deux droites sont isogonales, la droite reliant leurs seconds points d'intersection avec le cercle circonscrit à ABC est parallèle à (BC).

Théorème 2.1. Soient M et N deux points tels que les droites (AM) et (AN) soient isogonales. Notons P et Q (resp. R et S) les projetés orthogonaux de M (resp. N) sur (AC) et (AB). Alors P, Q, R, S sont cocycliques. Le centre du cercle passant par ces quatre points est le milieu de $[MN]$.



AQM et ARN étant semblables, on a $\dfrac{AQ}{AR} = \dfrac{AM}{AN}$. De même, $\dfrac{AS}{AP} = \dfrac{AN}{AM}$. En effectuant le produit de ces deux égalités, il vient $AQ \cdot AS = AP \cdot AR$, donc P, Q, R, S sont cocycliques.

Soit O le milieu de $[MN]$. En considérant le trapèze $MQSN$, on voit que la droite passant par le milieu de $[QS]$ qui est parallèle à (NS) passe par O, autrement dit O appartient à la médiatrice de $[QS]$. De même, O appartient à la médiatrice de $[PR]$, donc O est le centre du cercle.

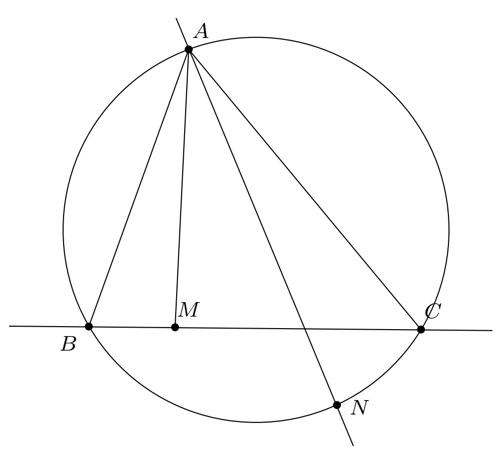
Exercice 4. Montrer que le conjugué isogonal de la parallèle à (BC) passant par A est la tangente en A au cercle circonscrit.

Solution de l'exercice 4 Soit Δ la parallèle à (BC) passant par A et T son conjugué isogonal. On a $(T, AB) = (AC, \Delta) = (AC, BC)$ donc d'après le cas limite du théorème de l'angle inscrit, T est la tangente en A au cercle ABC.

L'exercice suivant n'a pas été traité en cours.

Exercice 5. Soit ABC un triangle. Soient M un point de $[BC]$ et N un point du cercle circonscrit à ABC tels que (AM) et (AN) sont conjugués isogonaux l'un de l'autre. Montrer que $AM \cdot AN = bc$.

Solution de l'exercice 5



ABM et ANC sont semblables.

3 Points isogonaux

Théorème 3.1. Soit ABC un triangle. Soit M un point qui n'est ni sur le cercle circonscrit, ni sur un côté du triangle. Alors les conjuguées isogonales des droites (AM), (BM) et (CM) sont concourantes. Le point commun s'appelle le conjugué isogonal de M.

Notons Δ_A et Δ_B les bissectrices des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.
Si $\mathrm{sym}_{\Delta_A}(AM)$ et $\mathrm{sym}_{\Delta_B}(BM)$ étaient parallèles, alors (AM) serait parallèle à $\mathrm{sym}_{\Delta_A}\mathrm{sym}_{\Delta_B}(BM) = \mathrm{Rot}_{I,-\widehat{C}}(BM)$ où I est le point d'intersection de Δ_A et de Δ_B, donc $(BM, AM) = -\widehat{C} = (CB, CA)$, et M appartiendrait au cercle ABC. Contradiction.

Notons alors N l'intersection de $\mathrm{sym}_{\Delta_A}(AM)$ et $\mathrm{sym}_{\Delta_B}(BM)$. Il n'est pas situé sur un sommet du triangle car M n'est pas sur un côté.
Pour des raisons de symétrie, on a $\dfrac{d(M, AB)}{d(M, AC)} = \dfrac{d(N, AC)}{d(N, AB)}$ et $\dfrac{d(M, BA)}{d(M, BC)} = \dfrac{d(N, BC)}{d(N, BA)}$. En effectuant le quotient, on obtient $\dfrac{d(M, BC)}{d(M, AC)} = \dfrac{d(N, AC)}{d(N, BC)}$ donc N est sur le conjugué isogonal de (CM).

Exemples : O et H sont conjugués isogonaux l'un de l'autre. Le conjugué isogonal de G s'appelle le point de Lemoine, c'est le point d'intersection des trois symédianes.

Théorème 3.2. Soient M un point, et N son conjugué isogonal par rapport au triangle ABC. Alors les projetés orthogonaux de M et de N sur les côtés de ABC sont cocycliques, et le centre du cercle est le milieu de $[MN]$.

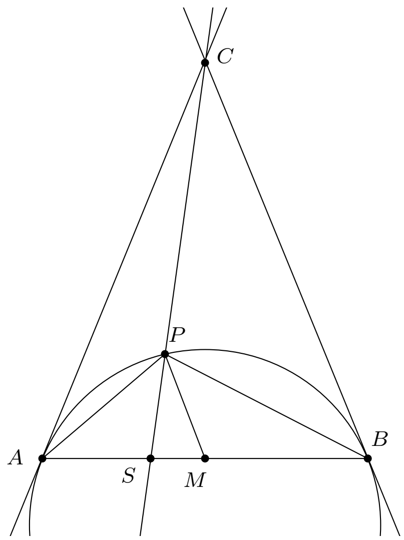
Notons M_a le projeté de M sur le côté $[BC]$. On introduit de même les notations M_b, M_c, etc. D'après le Théorème 2.1, les points M_b, M_c, N_b, N_c sont cocycliques, le centre du cercle étant le milieu de $[MN]$. On a de même deux autres familles de quatre points cocycliques, et il reste à montrer que ces trois cercles sont confondus. En effet, ces trois cercles ont tous le même centre, et ils sont des points communs deux à deux, donc ils ont également le même rayon.

Exemple : il existe un cercle, centré au milieu de $[OH]$ passant par les pieds des hauteurs et les milieux des côtés. Il s'agit en fait du cercle d'Euler.

4 Problèmes

Exercice 6. (Pologne 2000) Soit ABC un triangle isocèle en C, et P un point à l'intérieur du triangle tel que $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$. Montrer que si M est le milieu de $[AB]$, alors $\widehat{APM} + \widehat{BPC} = 180°$.

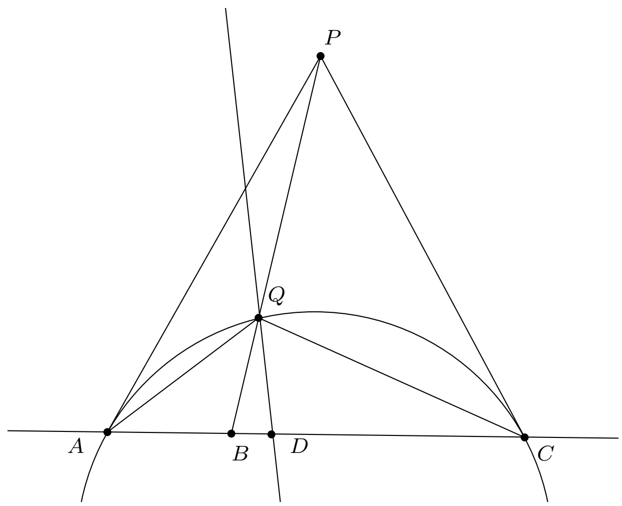
Solution de l'exercice 6



L'égalité $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$ signifie que P appartient au cercle tangent en A et B à (CA) et (CB) respectivement. D'après une construction de la symédiane, la droite (PC) est la symédiane de PAB issue de P. Notons S le pied de cette symédiane, on a par symétrie $\widehat{APM} = \widehat{SPB}$, donc $\widehat{APM} = 180° - \widehat{BPC}$.

Exercice 7. (OIM, shortlist 2003) On fixe trois points A, B, C alignés dans cet ordre sur une droite. Soit Γ un cercle passant par A et C dont le centre ne se trouve pas sur (AC). On désigne par P l'intersection des tangentes à Γ en A et en C. On suppose que Γ rencontre le segment $[PB]$ au point Q. Montrer que l'intersection de la bissectrice de $\widehat{AQC}$ et de la droite (AC) ne dépend pas du choix de Γ.

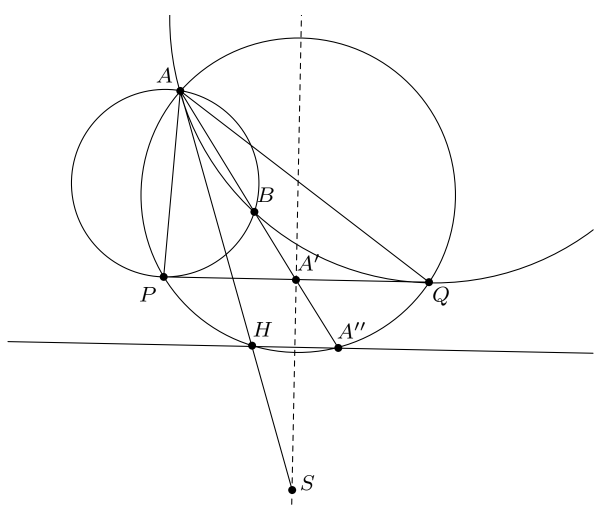
Solution de l'exercice 7



Par construction, B est le pied de la symédiane de QAC issue de Q, et il faut montrer que le pied D de la bissectrice de $\widehat{AQC}$ ne dépend pas du choix de Γ.
Ceci découle du fait que $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{QA}{QC}$ et que $\dfrac{BA}{BC} = \left(\dfrac{QA}{QC}\right)^2$.

Les exercices suivants n'ont pas été traités en cours.
Exercice 8. (Test de sélection Vietnam 2001) Deux cercles du plan se coupent en A et B, et une tangente commune intersecte les cercles en P et Q. Les tangentes en P et Q au cercle circonscrit au triangle APQ se coupent en S. Soit H le symétrique de B par rapport à la droite (PQ). Montrer que les points A, S et H sont colinéaires.

Solution de l'exercice 8



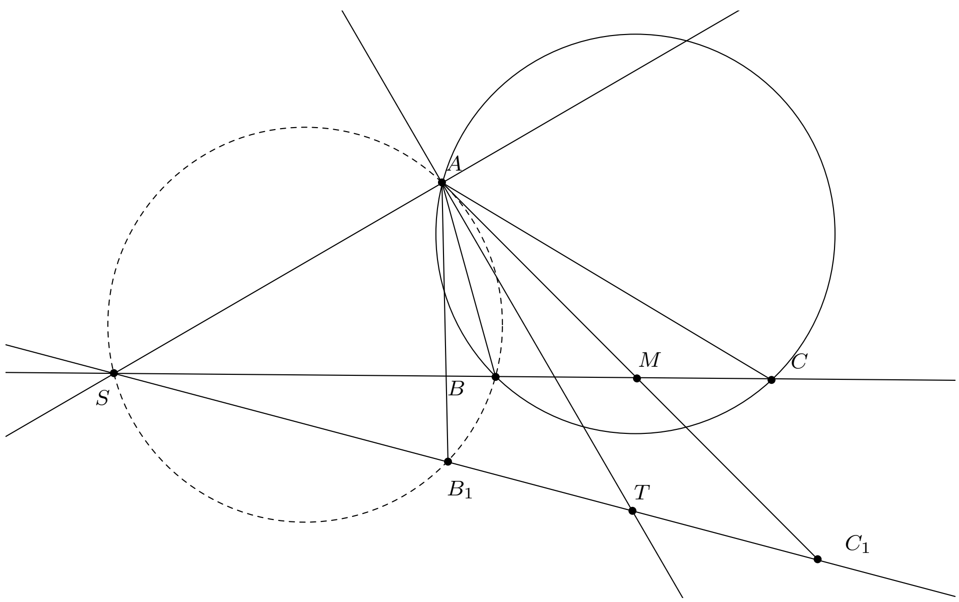
(AS) est la symédiane issue de A du triangle APQ. On doit montrer qu'elle contient le point H.
Soit A' le milieu de $[PQ]$. Comme $A'P = A'Q$, le point A' est sur l'axe radical des deux cercles, donc (AB) est une médiane du triangle APQ.

Soit A'' le second point d'intersection de (AB) avec le cercle (APQ). Soit Δ la médiatrice de $[PQ]$. On sait que la symédiane passe par le symétrique H' de A'' par rapport à Δ. On doit donc montrer que $H = H'$. Or,

$$H' = H \iff s_\Delta(H') = s_\Delta(H) \iff A'' = s_{A'}(B),$$

donc il suffit de montrer que A' est le milieu de $[BA'']$.
Or, d'après la puissance d'un point par rapport à un cercle, on a $\overline{A'B} \cdot \overline{A'A} = A'P^2 = -\overline{A'P} \cdot \overline{A'Q} = -\overline{A'A} \cdot \overline{A'A''}$, ce qui entraîne bien $\overline{A'B} = -\overline{A'A''}$.
Exercice 9. (Test de sélection USA 2007) Soit ABC un triangle. Les tangentes en B et C au cercle circonscrit à ABC se coupent en T. Soit S le point de (BC) tel que $(AS) \perp (AT)$. Les points B_1 et C_1 se trouvent sur la droite (ST) de sorte que B_1 se trouve entre C_1 et S, et $B_1T = BT = C_1T$. Montrer que les triangles ABC et AB_1C_1 sont semblables.

Solution de l'exercice 9



Analysons le problème. S'il est exact que ABC et AB_1C_1 sont semblables, alors l'angle de la similitude est égal à $(BC, B_1C_1) = (SB, SB_1)$ puisque la similitude envoie (BC) sur (B_1C_1). Mais il est aussi égal à (AB, AB_1), donc $(SB, SB_1) = (AB, AB_1)$, ce qui montre que A, S, B, B_1 sont cocycliques.
On va donc définir les points B_2 et C_2 appartenant à (ST) de sorte que A, S, B, B_2 et A, S, C, C_2 sont cocycliques. Le but est de montrer que
1) ABC et AB_2C_2 sont semblables ;
2) $B_1 = B_2$ et $C_1 = C_2$.

Montrons le premier point. D'après la construction du centre de la similitude directe s qui envoie B sur B_1 et C sur C_1, le centre de s est égal à A, donc s envoie ABC sur AB_1C_1.

Montrons le deuxième point. Par symétrie des rôles de B et C, il suffit de montrer que $BT = B_2T$, c'est-à-dire que BB_2T est isocèle en T. On procède par une chasse aux angles :

$(TB, TB_2) = (TB, BC) + (SB, SB_2) = (AB, AC) + (AB, AB_2)$ (on a utilisé le théorème de l'angle inscrit dans les cercles ABC et ASB). Comme (AB, AB_2) est égal à l'angle de la similitude directe s, et que s envoie M sur T, on a

$$(TB, TB_2) = (AB, AC) + (AM, AT).$$

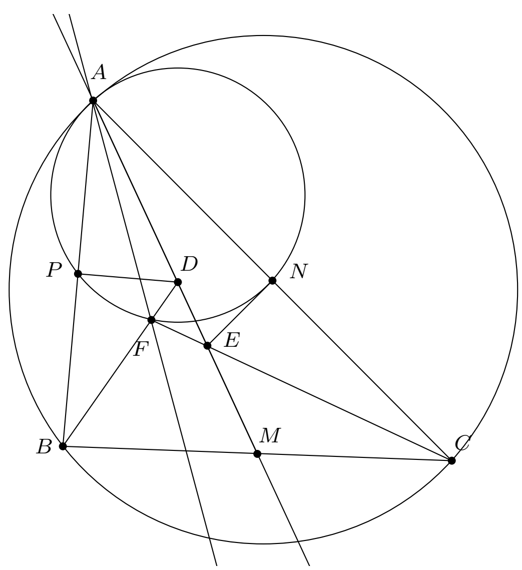
D'autre part, $(B_2T, B_2B) = (B_2S, B_2B) = (AS, AB) = \frac{\pi}{2} + (AT, AB)$.

Il vient

$$\begin{aligned}(BB_2, BT) &= (BB_2, B_2T) + (B_2T, BT) = \frac{\pi}{2} + (AB, AT) + (AT, AM) + (AC, AB) \\ &= \frac{\pi}{2} + (AB, AM) + (AC, AB) \\ &= \frac{\pi}{2} + (AT, AC) + (AC, AB) \text{ car } (AT) \text{ est la symédiane issue de } A \\ &= \frac{\pi}{2} + (AT, AB) = (B_2T, B_2B).\end{aligned}$$

Exercice 10. (USA 2008) Soit ABC un triangle acutangle scalène, et soient M, N et P les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ coupent la droite (AM) aux points D et E respectivement. Soit F le point d'intersection entre (BD) et (CE). Montrer que A, N, F et P sont cocycliques.

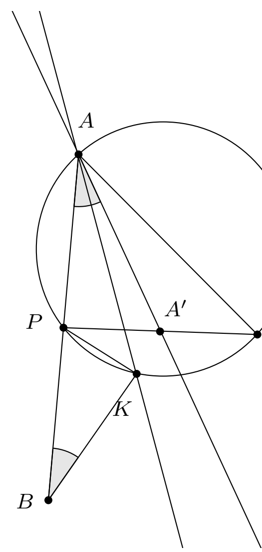
Solution de l'exercice 10



Analysons le problème. Il semble que le point F se trouve sur la symédiane issue de A. Supposons que ce soit vrai, alors F est le point d'intersection de la

symédiane et du cercle APN. D'autre part, comme le triangle DAB est isocèle en D, on a $\widehat{FBA} = \widehat{BAD} = \widehat{BAM}$.
Remarquons également que (AM) est une symédiane de APN puisque APN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $1/2$.
Par conséquent, si l'énoncé de l'exercice est exact alors le lemme suivant doit être vrai :

Lemme : soit APN un triangle. On note A' le milieu de $[PN]$. Soit K le point d'intersection entre le cercle APN et la symédiane issue de A, alors $\widehat{KBA} = \widehat{PAA'}$.



Montrons le lemme. On va démontrer que BPK est semblable à $AA'P$.
En effet, $(PB, PK) = (AP, AK) + (KA, KP) = (AA', AN) + (NA, NP) = (AA', A'P)$ et

$$\frac{PB}{PK} = \frac{PA}{PK} = \frac{\sin \widehat{AKP}}{\sin \widehat{PAK}} = \frac{\sin \widehat{ANP}}{\sin \widehat{A'AN}} = \frac{AA'}{A'N} = \frac{AA'}{A'P},$$

ce qui démontre le lemme. On va maintenant conclure. Soit K comme dans le lemme. Il suffit de montrer que K se trouve sur les droites (BD) et (CE). D'après le lemme, on a $(BK, BA) = (AB, AM)$ car (AM) est la médiane de APN issue de A, donc $(BK, BA) = (AB, AD) = (BD, BA)$ puisque ABD est isocèle en D, ce qui implique que B, K, D sont alignés. De même, C, K, E sont alignés.