DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Joon KWON
STAGE : Montpellier 2013

Divisibilité, PGCD, nombres premiers

Exercice 1 Soient x et y des entiers. Montrer que $2x + 3y$ est divisible par 7 si, et seulement si $5x + 4y$ l'est.

Solution de l'exercice 1 Il suffit de remarquer que :

$$(2x + 3y) + (5x + 4y) = 7x + 7y,$$

Cette quantité étant toujours divisible par 7.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

(i) $x - 1 \mid x + 3$.

(ii) $x + 2 \mid x^2 + 2$

Solution de l'exercice 2

(i) Pour $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x - 1 \mid x + 3 &\iff x - 1 \mid (x + 3) - (x - 1) \\ &\iff x - 1 \mid 4 \end{aligned}$$

Or l'ensemble des diviseurs de 4 est $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$. L'ensemble des solutions est donc $\{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$

(ii) Pour $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x + 2 \mid x^2 + 2 &\iff x + 2 \mid x^2 + 2 - (x + 2)^2 \\ &\Leftrightarrow x + 2 \mid -2 - 4x \\ &\iff x + 2 \mid 4(x + 2) - 6 \\ &\iff x + 2 \mid 6. \end{aligned}$$

Or l'ensemble des diviseurs de 6 est $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. L'ensemble des solutions est donc $\{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\}$

Exercice 3 Montrer que si un nombre premier p divise le produit $a_1 \times \cdots \times a_n$, alors il divise au moins l'un des a_i.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Supposons par l'absurde que p ne divise aucun des a_i. Alors, p est clairement premier avec chacun des a_i. Alors en écrivant :

$$p \mid a_1 \cdot (a_2 \cdot \cdots \cdot a_n),$$

le théorème de Gauss nous donne que $p \mid a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$. En itérant, on aboutit à $p \mid a_n$, ce qui est absurde.

Exercice 4 Montrer que si deux entiers premiers entre eux a et b divisent n, alors le produit ab divise également n.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Comme a divise n, on peut écrire $n = ak$ pour un certain entier k. Mais alors b divise ak et comme il est premier avec a, il divise k. Ainsi $k = bk'$ pour un entier k' et puis $n = abk'$, ce qui prouve bien que ab divise n.

Exercice 5 Soit $b \geqslant 2$ un entier. Montrer que tout entier $a \geqslant 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$a = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_k b^k,$$

où k est un entier, les a_i sont des entiers compris entre 0 et $b-1$ et où $a_k \neq 0$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On obtient l'écriture demandée par divisions euclidiennes successives par b. On écrit d'abord :

$$a = bq_0 + a_0,$$

avec $0 \leqslant a_0 < b$. Si $q_0 = 0$, cette écriture convient. Sinon, on effectue la divison euclidienne de q_0 par b : $q_0 = bq_1 + a_1$ avec $0 \leqslant a_1 < b$. Cela donne :

$$a = a_0 + a_1 b + a_2 b^2.$$

Si $q_1 = 0$, c'est terminé. Sinon, on continue. La suite des q_i est positive et strictement décroissante. Elle finit donc par s'annuler et la procédure s'arrête bien. On a alors la décomposition souhaitée.

Pour prouver l'unicité, considérons des entiers a_i et a_i' compris entre 0 et $b-1$ tels que :

$$a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k = a_0' + a_1' b + \cdots + a_k' b^k.$$

Alors $a_0 - a_0'$ est un multiple de b et on a $-b < a_0 - a_0' < b$. Nécessairement $a_0 = a_0'$. On peut alors simplifier par a_0, et utiliser le même argument pour a_1, et ainsi de suite.

Exercice 6 Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation :

$$x \wedge y + x \vee y = x + y.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ un couple solution. Notons $d = x \wedge y$. Il existe $x', y' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \\ x' \wedge y' = 1. \end{cases}$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned} 1 + x'y' = x' + y' &\iff (x'-1)(y'-1) = 0 \\ &\iff x' = 1 \text{ ou } y' = 1. \end{aligned}$$

Ainsi (x, y) est de la forme (d, dk) ou (dk, d) avec $d, k \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, ces couples sont bien solution.

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Par définition de q, on a $a - 1 = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} ab^n - 1 &= (bq + r + 1)b^n - 1 \\ &= qb^{n+1} + b^n(r+1) - 1. \end{aligned}$$

Or, $0 \leqslant b^n(r+1) - 1 < b^{n+1}$ donc la relation ci-dessus est bien la division eucildienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}. Le quotient est q.

Exercice 8 Montrer que si $n \geqslant 2$ n'est pas premier, $2^n - 1$ ne l'est pas non plus.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> L'idée de l'exercice est d'utiliser la relation

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}).$$

n n'étant pas premier, on peut écrire $n = ab$ avec $a, b \geqslant 2$. Et alors :

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)(2^{a-1} + \dots),$$

ce qui prouve que $2^n - 1$ n'est pas premier.

Exercice 9 Soient a et b deux entiers natuels non nuls. Montrer que

$$(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = 2^{a \wedge b} - 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Etablissons d'abord le lien entre le reste de la division euclidienne de a par b et celui de la division de $2^a - 1$ par $2^b - 1$. Notons $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$. On peut alors écrire :

$$2^a-1 = 2^{bq+r}-1 = 2^{bq+r}-2^r+2^r-1 = (2^b-1)(2^{b(q-1)}+2^{b(q-1)-1}+\cdots+1)2^r+2^r-1,$$

et on a alors $0 \leqslant 2^r - 1 < 2^b - 1$.

On effectue la divison euclidienne de a par b, et on note les $a_0 = a$, $a_1 = b$, ... les entiers obtenus, qui vérifient $a_m = a_{m-1} \wedge a_{m-2}$. On peut à présent écrire l'algorithme d'Euclide partant de $2^a - 1$ et de $2^b - 1$ avec ces coefficients :

$$(2^a-1)\wedge(2^b-1) = (2^{a_0}-1)\wedge(2^{a_1}-1) = (2^{a_1}-1)\wedge(2^{a_2}-1) = \cdots = (2^{a_m}-1)\wedge 2^0-1 = 2^{a_m}-1,$$

ce dernier a_m non nul étant bien égal à $a \wedge b$.