DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Céline ABRAHAM

STAGE : Montpellier 2013

Exercices d'arithmétique

- Énoncés des exercices -

Exercice 1

a) Prouver qu'il n'existe pas d'entiers a, b tels que $a^2 - 3b^2 = 8$.

b) Prouver qu'il n'existe pas d'entiers strictement positifs a, b tels que $a^2 + b^2 = 3c^2$.

Exercice 2

a) Prouver que le nombre 100...00500...001 (il y a 100 zéros devant et 100 zéros derrière le 5) n'est pas le cube d'un entier.

b) Prouver que le nombre $a^3 + b^3 + 4$ n'est jamais le cube d'un entier pour a et b dans $\mathbb{N}$.

c) Prouver que l'équation $6m^3 + 3 = n^6$ n'a pas de solutions en nombres entiers.

Exercice 3 Prouver que parmi 52 nombres entiers quelconques il y en a toujours deux dont la somme ou la différence est divisible par 100.

Exercice 4

a) Montrer que la fraction $\frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Trouver $\text{pgcd}(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$.

Exercice 5 Montrer que quel que soit n, $n!$ n'est jamais divisible par 2^n, mais qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n!$ soit divisible par 2^{n-1}.

Exercice 6 Prouver que pour tout entier $n > 0$ le nombre $19\dot{8}^n + 17$ est composé (c'est-à-dire n'est pas premier).

Exercice 7 Déterminer tous les entiers strictement positifs premiers avec tous les nombres de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$, pour n entier naturel.

Exercice 8 Trouver tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $ab^2 + b + 7$ divise $a^2b + a + b$.

- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

a) La partie gauche est congrue à 0 ou 1 mod 3, alors que $8 \equiv 2 \bmod 3$. Il n'y a donc pas de solution.

b) On suppose qu'il existe des nombres entiers strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = 3c^2$. Choisissons une solution (a, b, c) qui minimise la somme $a + b + c \in \mathbb{N}^*$. d'après l'équation, $a^2 + b^2$ est divisible par 3, ce qui n'est possible que si a et b sont divisibles par 3. Écrivons $a = 3a_1$ et $b = 3b_1$. Alors $3(a_1^2 + b_1^2) = c^2$ et c est aussi divisible par 3. En notant $c = 3c_1$, on obtient finalement $a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2$, ce qui signifie que (a_1, b_1, c_1) est une solution de notre équation. Or $a_1 + b_1 + c_1 < a + b + c$, et la contradiction apparaît.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

a) On a
$$1 \ldots 00500 \ldots 001 = 1 \ldots 00499 \ldots 994 + 7 \equiv 7 \bmod 9$$
tandis qu'un cube ne peut être congru qu'à 0, 1 ou 8 mod 9.

b) Un cube ne peut être congru qu'à 0, 1 ou 8 mod 9, tandis que les restes possibles de la division de $a^3 + b^3 + 4$ par 9 sont $2, 3, 4, 5$ et 6.

c) Un cube est congru à $0, 1$ ou 6 mod 7, tandis que les restes possibles de la division de $6m^3 + 3$ par 7 sont $2, 3$ et 4.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On répartit les restes de division par 100 en les 51 groupes suivants
$$\{0\}, \{1, 99\}, \{2, 98\} \ldots \{49, 51\}, \{50\}$$
D'après le principe des tiroirs, deux de nos 52 nombres ont les restes de division par 100 qui se trouvent dans le même groupe. Alors leur somme ou leur différence est divisible par 100.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

a) D'après l'algorithme d'Euclide, on a $\mathrm{pgcd}(30n+2, 12n+1) = \mathrm{pgcd}(12n+1, 6n) = \mathrm{pgcd}(6n, 1) = 1$

b) On a $\mathrm{pgcd}(2^{120}-1, 2^{100}-1) = \mathrm{pgcd}(2^{100}-1, 2^{20}-1) = 2^{20}-1$ car $2^{100}-1 = (2^{20})^5 - 1$ est divisible par $2^{20}-1$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Dans le produit $n!$ des entiers inférieurs ou égaux à n, le facteur 2 apparaît $\left[\frac{n}{2}\right]$ fois pour les entiers pairs, $\left[\frac{n}{4}\right]$ fois de plus pour les multiples de 4, ... $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ fois de plus pour les multiples de 2^k : en tout, l'exposant de 2 dans la décomposition de $n!$ vaut $\left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots$. Les termes de cette somme sont nuls à partir d'un certain rang q, donc la somme est inférieure ou égale à $\frac{n}{2} + \cdots + \frac{n}{2^{q-1}} = n\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right) < n$.

Si $n = 2^q$, alors pour $k \leqslant q$, on a $\left[\frac{n}{2^k}\right] = 2^{q-k}$, et la somme $2^{q-1} + 2^{q-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^q - 1 = n - 1$ donc $n!$ est divisible par 2^{n-1}.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

– Si $n = 2k$ est pair, alors
$$19.8^n + 17 = 19.(9-1)^{2k} + 17 \equiv 1.(-1)^{2k} + 2 = 3 \equiv 0 \bmod 3$$

– Si $n = 4k+1$, alors
$$19.8^{4k+1} + 17 = 19.8.64^{2k} + 17 = 19.8.(65-1)^{2k} + 17 \equiv 6.8.(-1)^{2k} + 4 = 52 \equiv 0 \bmod 13$$

– Si $n = 4k+3$, alors
$$19.8^{4k+3} + 17 = 19.8^3.64^{2k} + 17 = 19.8^3.(65-1)^{2k} + 17 \equiv (-1).(-2)^3.(-1)^{2k} + 2 = 10 \equiv 0 \text{ m}$$

Ainsi pour $n > 0$, le nombre $19.8^n + 17$ est divisible soit par 3, soit par 13, soit par 5.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On cherche les nombres premiers qui ne divisent aucun des $2^n + 3^n + 6^n - 1$ pour n entier naturel.

2 n'en fait pas partie, car il divise $2 + 3 + 6 - 1$.

3 n'en fait pas partie non plus, car il divise $2^2 + 3^2 + 6^2 - 1$.

Soit $p \geqslant 5$ premier. $2, 3$ et 6 sont premiers avec p, donc $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

$6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0 \bmod p$. Donc p divise $6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1)$, et comme p est premier avec 6, p divise $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$.

Il n'existe pas de nombre premier qui ne divise aucun des $2^n + 3^n + 6^n - 1$ pour n entier naturel, donc le seul entier premier avec tous les nombres de cette forme est 1.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Si ab^2+b+7 divise a^2b+a+b, alors il divise également $a(ab^2+b+7)-b(a^2b+a+b)=7a-b^2$. Donc $|7a-b^2| > ab^2+b+7$.

- Soit $7a < b^2$, ce qui entraîne $|7a-b^2| < b^2$ alors que ab^2+b+7 ne peut pas être inférieur à b^2, comme $a > 0$. On n'a donc pas de solution.
- Soit $7a = b^2$, donc b est divisible par 7. On écrit $b = 7k$. On voit que tous les couples $(7k^2, 7k)$ sont solutions.
- Soit $7a > b^2$, $ab^2+b+7 < 7a$ n'est possible que si $b^2 < 7$, d'où deux possibilités.

  $b = 1$ et $a+8$ doit diviser $7a-1$, donc $7a-1-7(a+8) = -57 = -3 \times 19$. On a $a+8 = 19$ ou $a+8 = 57$. Les couples $(11, 1)$ et $(49, 1)$ sont tous les deux solutions du problème.

  $b = 2$ et $4a+9$ doit diviser $7a-4$, donc $4(7a-4)-7(4a+9) = -79$. Comme 79 est premier, on doit avoir $4a+9 = 79$, qui n'a pas de solution entière.

Les solutions du problème sont les couples $(11, 1)$, $(49, 1)$ et $(7k^2, 7k)$ pour $k \geqslant 1$.