DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2013

Exercices sur les polynômes

- Énoncés des exercices -

Exercice 1 Soit P un polynôme à coefficients entiers. Montrez que pour tous entiers a et b, $(a-b)$ divise $(P(a)-P(b))$.

Exercice 2 Trouver tous les polynômes réels P tels que $P(0)=0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2+1$.

Exercice 3 Soient a, b, c, d les quatre racines de $X^4-X^3-X^2-1$. Calculer $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)$, où $P(X)=X^6-X^5-X^4-X^3-X$.

Exercice 4 Soit P un polynôme réel. Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X-1$ est 2 est le reste de la division euclidienne par $X-2$ est 1. Quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par X^2-3X+2 ?

Exercice 5 Trouver tous les triplets x, y, z tels que

$$\begin{aligned} x+y+z &= 5 \\ x^2+y^2+z^2 &= 19 \\ x^3+y^3+z^3 &= 53 \end{aligned}$$

Exercice 6 Le produit de deux des quatre racines du polynôme

$$P(X)=X^4-18X^3+kX^2+200X-1984$$

est égal à -32. Trouvez k.

Exercice 7 Soit P un polynôme réel qui vérifie $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe deux polynômes Q et R tels que

$$P(X)=Q(X)^2+R(X)^2.$$

Exercice 8

1. Trouvez tous les polynômes réels P tels que $P(X^2) = P(X)^2$.
2. Trouvez tous les polynômes réels P tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
3. Trouvez tous les polynômes réels P tels que $P(X+1) + P(X-1) = 2P(X)$.

Exercice 9 Soit P un polynôme réel qui véridie $P(\cos x) = P(\sin x)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P(X) = Q(X^4 - X^2).$$

Exercice 10 Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré n. Soit k un entier et Q le polynôme

$$Q(X) = P(P(\cdots(P(X))\cdots)),$$

où P est écrit k fois. Montrez qu'il y a au plus n entiers a tels que $Q(a) = a$.

Exercice 11 Trouver tous les couples de polynômes réels P et Q tels que

$$P(Q(X)) = (X-1)(X-2)\ldots(X-15).$$

Exercice 12 Soit P un polynôme à coefficients entiers. Soit n un entier impair et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de n entiers tels que $P(x_1) = x_2$, $P(x_2) = x_3$, ..., $P(x_n) = x_1$. Montrez que tous les x_i sont égaux.

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 On cherche le reste sous la forme $R(X) = aX + b$. On a $R(1) = P(1)$, $R(-1) = P(-1)$, ce qui permet de calculer $R(X) = -2X + 2$.

Solution de l'exercice 2 Si $Q(x)$ était un polynôme, alors $Q(x) - x$ serait un polynôme avec une infinité de racines, donc serait de degré nul, c'est absurde.

Solution de l'exercice 3 Comme $P(x)^2 = 16P(x^2/4)$ est un polynôme en x^2, on peut appliquer la proposition **??**. Dans le premier cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)^2 = Q(x^2)$, on obtient $16Q(x^4) = 16P(x^2) = P(2x)^4 = Q(4x^2)^2$, et donc $16Q(x^2) = Q(4x)^2$. Dans le deuxième cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)^2 = xQ(x^2)$, on obtient similairement que $4Q(x^2) = Q(4x)^2$.

On peut donc réappliquer la proposition **??** à Q, et de même on obtien que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un entier $0 \leqslant i \leqslant 2^k$ et un polynôme R_k tel que $P(x) = x^i R_k(x^{2^k}$.

En choisissant k tel que $2^k > \deg P$, il s'ensuit que R_k est forcément constant et donc que $P(x) = c \cdot x^i$. En réinjectant dans l'équation de départ, on obtient $P(x) = 16(x/4)^i$ pour un certain entier $i \geqslant 0$ (et toutes ces solutions conviennent bien, réciproquement).

Solution de l'exercice 4 1 doit être racine double de P. Cela nous donne deux équations : $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$, qui permettent de trouver $a = 3$ et $b = -4$.

Solution de l'exercice 5 On note n le degré de P. En passant l'équation aux degrés, on obtient $n = (n-1)+(n-2) = 2n-3$, donc $n = 3$. On peut facilement calculer le coefficient dominant, on laisse le soin au lecteur de terminer les calculs.

Solution de l'exercice 6 On remarque que la dérivée de $\frac{P'}{P}$ est $\frac{P''-P'^2}{P^2}$ qui est du même signe que $P'' - P'^2$. Or on voit facilement que $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum \frac{1}{x-\alpha_i}$ donc $(\frac{P'(x)}{P(x)})' = \sum \frac{-1}{(x-\alpha_i)^2} < 0$ d'où le résultat. Pour obtenir l'inégalité sur les coefficients on procède de la manière suivante. Pour $k = 1$, l'inégalité provient de $P(0)P''(0) \leqslant P'(0)^2$. Ensuite on applique l'inégalité aux polynômes $P^{(k-1)}$: $P^{(k-1)}P^{(k+1)} \leqslant \left(P^{(k)}\right)^2$ d'où $a_{k-1}(k-1)! \times a_{k+1}(k+1)! \leqslant a_k^2 \times k!^2$ or $\frac{k!^2}{(k-1)!(k+1)!} = \frac{k}{k+1} \leqslant 1$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice 7 Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les n racines de P. On écrit :

$$\frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = \left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)' = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x-\alpha_i)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(n-1)P'(x)^2 - nP(x)P''(x) &= P(x)^2 \cdot \frac{n(P'(x)^2 - P(x)P''(x)) - P'(x)^2}{P(x)^2} \\ &= P(x)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(x-\alpha_i)^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-\alpha_i)}\right)^2\right),\end{aligned}$$

qui est positif d'après l'inégalité de Cauchy–Scwharz. Le cas d'égalité s'obtient lorsque tous les α_i sont égaux, i.e. lorsque $P(x)$ est de la forme $P(x) = c(X-a)^n$.

Solution de l'exercice 8 On a déja résolu le problème lorsque le degré de P est au plus $n-1$ grâce aux interpolateurs de Lagrange. Si le degré de P est supérieur ou égal à n, notons L le polynôme interpolateur associé aux a_i et b_i. Le polynôme $P-L$ s'annule en $a_1, \dots, a_n$. On a donc

$$P(X) = c_1 \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j} + c_2(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n).$$

Solution de l'exercice 9 Un polynôme à coefficients rationnels est clairement solution. Réciproquement, si P est un polynôme de degré n vérifiant cette propriété, alors en interpolant en $n+1$ points rationnels, on remarque que P est à coefficients rationnels.

Solution de l'exercice 10

1. Soit $i \geqslant n$. Alors
$$\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (i-k) = \binom{i}{n} \in \mathbb{Z}.$$
On traite similairement le cas $i < 0$.

2. On remarque que $H_n(n) = 1$ et $H_n(i) = 0$ pour des entiers $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons n le degré de P et soit
$$Q(X) = P(X) - \sum_{i=0}^{n} P(i) H_i(X).$$
Le polynôme Q est de degré n et possède $n+1$ racines $0, 1, \dots, n$. On en déduit que Q est nul. Les polynômes cherches sont donc des combinaisons linéaires entières des polynômes de Hermite.

3. (i) On a
$$\begin{aligned} X^k = (X+1-1)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (X+1)^i (-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j \right) (-1)^{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} \right) X^j. \end{aligned}$$
Ainsi, en identifiant les coefficients, la somme cherchée est nulle pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et vaut 1 pour $j = k$.

(ii) Pour prouver que 1. implique 2., si P est de degré n, on peut écrire

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(i) H_i(X).$$

On a alors pour tout entier $j \geqslant 0$.

$$P(j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{j}{k} P(k)$$

et

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) = \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} P(k).$$

D'après ce qui précède, cette somme est nulle pour $i \geqslant n+1$.
Pour montrer que 2. implique 1., on voit que le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} u_i H_i(X)$$

convient en utilisant un raisonnement similaire.

Solution de l'exercice 11 On met P sous forme canonique : $P = a(x-b)^2 + c$. On translate de b selon l'axe des abscisses, de $-c$ selon l'axe des ordonnées, et on applique une homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Solution de l'exercice 12 Soit (x, y, z) une solution. Visiblement, aucun de ces nombres n'est nul. En retranchant la troisième équation à la deuxième équation, on en déduit que $zx = xy$, puis, en simplifiant par x (qui est non nul), on obtient que $z = y$. En retranchant la troisième équation à la première équation, on obtient : $y^2 - xy = 8$, ou encore $xy = y^2 - 8$. La deuxième équation se réécrit $y^2 x + xy = 4$. Il vient donc :

$$y(y^2 - 8) + y^2 - 8 = 4,$$

ou encore $y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$. On remarque que $y = 3$ est une solution. En effectuant la division euclidienne de $y^3 + y^2 - 8y + 12$ par $y - 3$, on trouve :

$$y^3 + y^2 - 8y - 12 = (y-3)(y^2 + 4y + 4) = (y-3)(y+2)^2.$$

On en déduit que $y = z = 3$ ou $y = z = -2$. Dans le premier cas, $x = \frac{1}{3}$ et dans le deuxième cas, $x = 2$. Réciproquement, les triplets $(2, -2, -2)$ et $(\frac{1}{3}, 3, 3)$ sont solution et ce sont donc les seules.

Solution de l'exercice 13 Supposons que $ax^2 - (a+3)x + 2 = 0$ admette deux racines de signe opposé, notées z_1, z_2. Alors d'après les relations de Viète, $z_1 z_2 = 2/a$. Or z_1 et z_2 sont de signe opposés si, et seulement si, $z_1 z_2 < 0$. On en déduit que $a < 0$. Réciproquement, si a<0, alors le discriminant de l'équation vaut $a^2 - 2a + 9$. Pour montrer qu'il est positif, utilisons la forme canonique en écrivant $a^2 - 2a + 9 = (a-1)^2 + 8 \geqslant 0$. Ainsi, lorsque $a < 0$, il y a deux solutions réelles notées z_1, z_2. D'après les relations de Viète, $z_1 z_2 = 2/a < 0$, de sorte que z_1 et z_2 sont de signe opposés.

Remarquons que dans la preuve de la réciproque, il a d'abord fallu montrer que le polynôme avait deux racines réelles avant d'utiliser les relations de Viète.

Solution de l'exercice 14 On pose $P = \sum a_k X^k$, et on appelle n le degré de P. La somme des racines de $P^{(k)}$ vaut $\frac{a_{n-1}(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{a_n n(n-1)\dots(n-k+1)} = \frac{a_{n-1}(n-k)}{a_n n}$. La suite est donc arithmétique, de raison $\frac{-a_{n-1}}{n a_n}$.

Solution de l'exercice 15 Indication : introduire $\sigma_1 = x+y$ et $\sigma_2 = xy$, puis écrire les équations correspondantes pour σ_1 et σ_2, puis les résoudre.

Solution de l'exercice 16 On a clairement $x/(x+y) + y/(x+y) = 1$ et

$$\frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{x+y} = \frac{xy}{x^2 + 2xy + y^2} = 1.$$

Ainsi, $x/(x+y)$ et $y/(x+y)$ sont les racines de $t^2 - t + 1 = 0$, de sorte que les sommes $S_k = (x/(x+y))^k + (y/(x+y))^k$ vérifient $S_0 = 2$, $S_1 = 1$ et

$$S_{k+2} = S_{k+1} - S_k$$

pour $k \geqslant 0$. On en déduit que la suite (S_k) est période de période 6, ses valeurs étant successivement $2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, \dots$. On en déduit que $S_{2013} = -2$.

Solution de l'exercice 17 On écrit les relations de Newton :

$$S_1 - \sigma_1 = 0, \qquad S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0, \qquad S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 = 0.$$

Ainsi, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$. On en tire que x, y, z sont racines de $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Or $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$. Donc $x = y = z = 1$.

Solution de l'exercice 18 Voir le TD.

Solution de l'exercice 19 Écrivons

$$P(P(x)) - Q(Q(x)) = (Q(P(x)) - Q(Q(x))) + S(P(x)),$$

où $S(x) = P(x) - Q(x)$. Suppsons que $S \neq 0$. Soient k le degré de S et n le degré de Q. On voit aisément que le degré de $Q(P(x)) - Q(Q(x))$ est $n^2 - n + k$ et que le degré de $R(P(x))$ est kn.

Si $k \geqslant 1$, on a $kn < n^2 - n + k$, et donc le degré de $P(P(x)) - Q(Q(x))$ est $n^n - n + k$, absurde.

Si $k = 0$, S est constant. Écrivons $S = c$. On obtient alors que $Q(Q(x) + c) = Q(Q(x) - c)$. Ainsi, $Q(z + c) = Q(z) - c$ pour une infinité de réels z, et donc $Q(x + c) = Q(x) - c$. Donc $Q(kc) = Q(0) - kc$ pour tout entier k, et donc $Q(x) = Q(0) - x$. Ceci contredit le fait que Q est unitaire.

Solution de l'exercice 20 Écrivons $P(x) = x^n Q(x)$ pour un certain entier $n \geqslant 0$ et $Q(x)$ un polynôme tel que $Q(0) \neq 0$. Alors Q vérifie la propriété de l'énoncé. Si Q n'est pas constant, en faisant tendre x vers l'infini, on voit que forcément $Q(0) = 0$, absurde. Donc Q est constant est P est de la forme $P(x) = cx^n$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 0$. Réciproquement, on vérifie que les polynômes de la forme $P(x) = cx^n$ avec $|c| \leqslant 1$ et $n \geqslant 0$ conviennent.

Solution de l'exercice 21 Soit $P(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = (1 - x^n)/(1 - x)$. Ainsi, $P(x)$ divise $P(x^2)$ si et seulement si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$\frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = Q(x)\frac{1 - x^n}{1 - x},$$

ou encore

$$(1 + x^n) = Q(x)(1 + x).$$

Ainsi, $P(X)$ divise $P(X^2)$ si et seulement si -1 est racine de $1 + X^n$, autrement dit si et seulement si n est impair.

Solution de l'exercice 22 La première assertion est vraie (utiliser le théroème de Bézout pour les nombres entiers avec 7 et 12). La seconde assertion est fausse (prendre $x = 2^{1/3}$).

Solution de l'exercice 23 Supposons par l'absurde que P admette une racine réelle, α. Alors $\alpha^2 + \alpha + 1$ est une autre racine du polynôme, strictement supérieure à la précédente. On construit ainsi une infinité de racines distinctes, contradiction. Donc toutes les racines de P sont complexes, donc P est de degré pair.

Solution de l'exercice 24 On écrit P comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$. P est le produit de polynômes de degrés 2 de discriminant négatifs et de polynômes de la forme $(x-a)^{2k}$ (en effet si la multiplicité d'une racine était impaire, au voisinage de cette racine on pourrait rendre P négatif). Pour exprimer la partie complexe comme somme de carrés, on la sépare en deux termes conjugués l'un de l'autre (en séparant les termes $(X-z)$ des $(X-\bar{z})$). Cela termine, car $(P-iQ)(P+iQ) = P^2+Q^2$.

Solution de l'exercice 25 On démarre par diviser P par son contenu, ce qui ne modifie pas les hypothèses (car ce contenu est impair). Supposons par l'absurde que P a toutes ces racines rationnelles. Comme $c(P) = 1$, ces racines sont entières. Comme d est impair, ces trois racines sont impaires, et les relations coefficients racines montrent que b et c sont impairs, c'est absurde.

Solution de l'exercice 26 Supposons qu'il existe deux polynômes g et h, à coefficients entiers, tels que $f = gh$. Comme $f(0) = 3$, on peut supposer, sans perte de généralité que $|g(0)| = 3$ et on écrit : $g(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$ ($a_0 = \pm 3$). On s'inspire maintenant de la démonstration du critère d'Eisenstein : soit j le plus petit indice tel que a_j ne soit pas divisible par 3. On pose $h(x) = x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_0$ et $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0$, il apparaît que le coefficient $c_j = a_j b_0 + a_{j-1}c_1 + ...$ n'est pas divisible par 3 car $b_0 a_0 = 3$ et $a_0 = \pm 3$. Compte tenu de l'expression de $f, j \geqslant n-1$, donc $k \geqslant n-1$ donc $p \leqslant 1$ donc le polynôme h s'écrit $\pm x \pm 1$, ce qui est absurde car $f(\pm 1) = 0$.

Solution de l'exercice 27 On écrit P sous la forme $P(X) = Q(X)(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)+5$, et on suppose par l'absurde que $P(k) = 8$. Alors $Q(k)(k-a)(k-b)(k-c)(k-d) = 13$. Or $(k-a)$, $(k-b)$, $(k-c)$ et $(k-d)$ sont des entiers distincts, et comme 3 est premier, il ne peut pas être écrit comme produit de 4 entiers distincts, contradiction.

Solution de l'exercice 28 En injectant $a = b = c = 0$, on trouve $P(0) = 0$. En prenant $b = c = 0$, on obtient $P(2a) = 3P(a) + P(-a)$, et ce pour tout a. On suppose P de degré n. En examinant les coefficients dominants, on obtient $2^n = (-1)^n + 3$, donc n vaut 1 ou 2, et P est de la forme $aX^2 + bX$. On vérifie réciproquement que ces polynômes conviennent.

Solution de l'exercice 29 On remarque tout d'abord, en prenant $b = c = 0$, que P est pair, et ne contient donc que des termes de degré pair. En évaluant en zéro, on trouve que le terme constant doit être nul. On essaie ensuite $a = 6x$, $b = 3x$ et $c = -2x$. Cela donne $P(3x)+P(5x)+P(-8x) = 2P(7x)$. On note n le degré de P. En comparant les coefficients dominants, on trouve $3^n + 5^n + (-8)^n = 2 \cdot 7^n$.

C'est impossible pour $n \geqslant 5$. P est donc de la forme $aX^4 + bX^2$. On vérifie réciproquement que ces polynômes conviennent.

<u>*Solution de l'exercice 30*</u> Notons $c_n(k)$ le nombre de permutations de longueur n. Pour résoudre l'exercice, nous établissons une relation de récurrence sur les $c_n(k)$. Nous allons, pour cela, dénombrer les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\mathrm{cyc}(\sigma) = k$ en les comptant séparément selon la valeur de $\sigma(n)$. Si $\sigma(n) = n$, on remarque que se donner une telle permutation revient simplement à se donner une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$ ayant $(k-1)$ cycles (puisque n est tout seul dans son cycle). Il y a donc $c_{n-1}(k-1)$ permutations qui relèvent de ce cas.

Examinons maintenant le cas où $\sigma(n)$ est un entier m fixé strictement inférieur à n. L'entier n apparaît alors dans un cycle de σ qui est de longueur au moins 2 (puisqu'il contient au moins n et m) et on peut construire une permutation τ de $\{1, \dots, n-1\}$ simplement en retirant n de ce cycle et en laissant les autres cycles inchangés. Par construction, il est évident que τ a encore k cycles. Par ailleurs, on peut reconstruire σ à partir de τ et l'entier m comme suit : on regarde le cycle de τ qui contient m et, dans ce cycle, on insère l'entier n juste avant m. On déduit de cela qu'il y a $c_{n-1}(k)$ permutations à k cycles telles $\sigma(n)$ est égal à un entier $m < n$ fixé.

En mettant ensemble les deux raisonnements précédents, on aboutit à $c_n(k) = c_{n-1}(k-1) + (n-1)c_{n-1}(k)$. En tenant compte du fait que $c_{n-1}(0) = c_{n-1}(n) = 0$ trivialement, et en sommant l'égalité précédente pour k variant de 1 à n, il vient :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_n(k)x^k = \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-1}(k)x^{k+1} + (n-1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-1}(k)x^k = (x+n-1) \cdot P_{n-1}(x).$$

<u>*Solution de l'exercice 31*</u> À venir.