DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Victor QUACH
STAGE : Montpellier 2013

Exercices de combinatoire et double-comptage

- Exercices -

Exercice 1 Une araignée possède 8 chaussettes identiques et 8 chaussures identiques. Dans combien d'ordres différents peut-elle se chausser, sachant qu'évidemment, sur chaque patte, elle doit mettre la chaussure après la chaussette ?

Exercice 2 On considère n entiers positifs $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 2n$ tels que le plus petit commun multiple de n'importe quelle paire prise parmi eux est strictement supérieur à $2n$. Montrer que $a_1 > \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Exercice 3 (Théorème de Erdös-Szekeres) D'une suite $mn + 1$ nombres réels, montrer qu'on peut extraire

– une sous-suite croissante de $m + 1$ réels
– ou une sous-suite décroissante $n + 1$ réels.

Exercice 4 On considère plusieurs cercles de longueur totale 10 dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe une droite qui intersecte au moins quatre de ces cercles.

Exercice 5 Soient n points dans le plan. Montrer qu'on peut en choisir au moins $\sqrt{n}$ d'entre eux tels qu'ils ne forment pas de triangle équilatéral.

Exercice 6 Soient 2013 points dans le plan tels que toute droite passant par deux de ces points passe par un troisième. Montrer que trois d'entre eux ne peuvent jamais former de triangle équilatéral.

Exercice 7 Etant donné un graphe, montrer qu'il existe une coloration des sommets en noir et blanc tel que chaque sommet blanc a au moins autant de voisins noirs que de voisins blancs, et que similairement, chaque sommet noir a au moins autant de voisins blancs que de voisins noirs.

Exercice 8 (Identités de Vandermonde et d'anti-Vandermonde) Soient a, b,n des entiers. On choisit la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$. Montrer que :

1. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}$$

Exercice 9 Soient m et n deux entiers strictement positifs. Soient $a_1, \cdots a_m$ des entiers distincts pris parmi $\{1, \cdots n\}$ vérifiant la condition suivante : si pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, on a $a_i + a_j \leqslant n$, alors il existe k, $1 \leqslant k \leqslant m$ tel que $a_i + a_j = a_k$. Montrer alors que :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}$$

Exercice 10 Dans un tournoi, chaque participant joue un match contre chaque autre participant. Le gagnant d'un match gagne 1 point, le perdant 0 point, et si le match est nul les deux joueurs gagnent un demi-point. À la fin du tournoi, les participants sont classés selon leur score (en cas d'égalité, l'ordre est aribtraire). On remarque alors que chaque participant a remporté la moitié de ses points contre les dix derniers du classement. Combien de personnes participaient au tournoi ?

Exercice 11 Dans une école, il y a 2013 filles et 2013 garçons. Chaque élève rejoint au plus 100 clubs dans l'école. On suppose par ailleurs que pour chaque paire composée d'un garçon et d'une fille, ils ont au moins un club en commun. Montrer qu'il y a un club avec au moins 11 garçons et 11 filles.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$ cercles de même rayon tel que chacun intersecte au moins un autre cercle. On suppose par ailleurs que deux de ces cercles ne sont jamais tangents. Montrer que le nombre p des points d'intersection ainsi formés est supérieur à n.

Exercice 13 On considère un tableau $M \times N$ (de M lignes et N colonnes), qui contient plus de colonnes que de lignes ($N > M$). On place des étoiles dans certaines cases du tableau, et on suppose que chaque ligne et chaque colonne contient au moins une étoile. Montrer qu'il existe une case contenant une étoile tel que le nombre d'étoiles sur sa ligne est strictement plus grand que le nombre d'étoiles sur sa colonne.

Exercice 14 Soient m et n des entiers strictement positifs. On se donne un rectangle $a \times b$ et on suppose qu'il peut être pavé en utilisant uniquement des tuiles horizontales $1 \times m$ et des tuiles verticales $n \times 1$. Montrer qu'il peut être pavé en utilisant uniquement un de ces types de tuiles.

- Solutions -

Solution de l'exercice 1 Numérotons les pattes de l'araignée de 1 à 8. Appelons a_i l'action consistant à mettre une chaussette sur la i-ième patte, et b_i l'action consistant à mettre une chaussure sur la i-ième patte. Il y a 16! façons d'ordonner les 16 actions (a_i) et (b_i). Considérons l'un de ces ordres. À partir de cet ordre, on s'autorise à échanger, pour tout i, les positions des actions a_i et b_i, ce qui permet d'atteindre 2^8 ordres différents. Parmi ces ordres, seul un correspond à une façon correcte de se chausser : l'ordre pour lequel pour tout i, a_i apparaît avant b_i. L'araignée peut donc se chausser de $16!/2^8 = 81729648000$ façons différentes.

Solution de l'exercice 2 On suppose par l'absurde que $a_1 \leqslant \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Alors $3a_1 < 2n$. Les $n+1$ entiers positifs de l'ensemble $2a_1, 3a_1, a_2, \ldots, a_n$ appartiennent alors à $1, 2, \ldots, n$. Par le principe des tiroirs, deux d'entre eux ont la même partie impaire ce qui montre que l'un divise l'autre, ce qui est clairement impossible.

Solution de l'exercice 3 On note $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ ces nombres. On note c_k la longueur de la plus longue sous-suite croissante commençant par a_k, et d_k la longueur de la plus longue sous-suite décroissante commençant par a_k. Remarquons alors que si $k \neq l$ sont deux indices, $(c_k, d_k) \neq (c_l, d_l)$. En effet, dans la situation contraire, et quitte à suppose $k < l$ on traite deux cas :

- Si $a_k \leqslant a_l$, on peut prolonger la sous-suite croissante commençant par a_l en une sous-suite commençant par a_k de longueur $c_l + 1 > c_k$, ce qui contredit la maximalité de c_k.
- Sinon, on prolonge une sous-suite décroissante pour obtenir la une contradiction sur la maximalité de d_k.

Or, d'après le principe des tiroirs, les $mn+1$ couples (c_k, d_k) ne peuvent pas tous appartenir à $\{1, \ldots m\} \times \{1, \ldots n\}$. D'où le résultat.

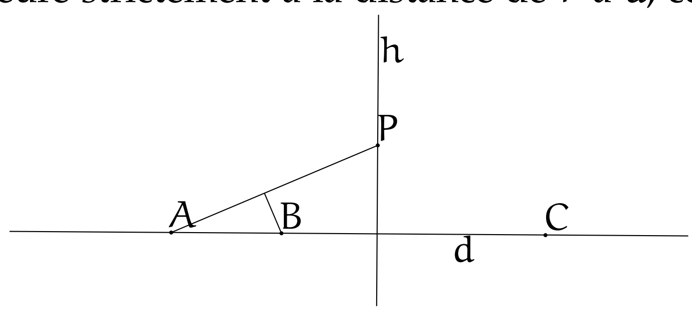
Solution de l'exercice 4 On fixe un côté du carré et on projette tous les cercles sur ce côté. Un cercle de circonférence l se projette sur un segment de longeur

l/π. La somme des projections de tous les cercles vaut donc $10/\pi$, qui a le bon goût de valoir plus de trois fois le côté du carré. Il existe donc un point de ce côté qui appartient aux projections d'au moins 4 cercles, et la perpendiculaire au côté passant par ce point convient.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On choisit un repère quelconque et on note (x_i, y_i) les coordonnées du point A_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$. En évitant un nombre fini de repères, on peut en trouver un tel que les x_i sont distincts et tels que les y_i sont distincts. Quitte à les renommer, on peut supposer les x_i ordonnés selon $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. D'après le théorème de Erdös-Szekeres, on peut trouver une sous-suite monotone de (y_n) de longueur $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Les points correspondants ne peuvent former de triangle équilatéral.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Ceci est une conséquence du théorème de Sylvester : *Soit S Un ensemble fini de points est tel que toute droite passant par deux de ces points passe par un troisième. Alors ces points sont alignés.*

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Parmi les couples (d, P) formées d'une droite d passant par deux points de S et un point P de S qui n'est pas sur d, il en existe un qui minimise la distance de P à d. Soit h la perpendiculaire à d passant par P. Elle divise d, qui contient par hypothèse trois points S, en deux demi-droites. D'après le principe des tiroirs, il y en a une qui contient deux points de S. Si on note A le plus éloigné et B le plus proche des h, la distance de B à (AP) est inférieure strictement à la distance de P à d, ce



qui fournit la contradiction voulue.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Parmi toutes les configurations possibles, choisissons une de celles qui maximisent le nombre d'arêtes bicolores. Montrons qu'elle convient. Par l'absurde, sans perte de généralité un sommet blanc A qui a strictement plus de voisins blancs que de voisins noirs. De ce sommet partent, plus d'arrêtes monocolores que d'arrêtes bicolores. En inversant la couleur de A on se retrouve donc dans un situation avec strictement plus d'arrêtes bicolores. Contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> La principale difficulté en double-comptage est de choisir la grandeur à double-compter.

1. Ici, il paraît assez naturel de double-compter le nombre de mannières de choisir n personnes parmi a filles et b garçons. Dans un premier temps, ce nombre vaut $\binom{a+b}{n}$. D'autre part, si on commence par choisir k filles parmi a, il ne reste plus que $n-k$ garçons parmi b. En faisant varier k entre 0 et n, on partitionne toutes les possibilités. D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

2. De la même façon, on double compte le nombre de mannières de choisir $a+b+1$ personnes parmi $n+1$ individus : $\binom{n+1}{a+b+1}$. Maintenant, au lieu de partitionner selon le nombre de filles, on partitionne selon le choix du $a+1$-ième élément en notant ce paramètre $k+1$. Une fois ce choix fait, il reste a personnes à choisir par k puis b parmi $n-k$. Il reste à faire varier $k+1$ entre 1 et $n+1$ pour conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}$$

Solution de l'exercice 9 Quitte à les renommer, on peut supposer les a_i ordonnés de façon croissante. Quelques essais amènent à conjecturer que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$.
Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit alors $j \leqslant n/2$ tel que $a_j + a_{m+1-j} \leqslant n$. Par hypothèse, il existe donc $1 \leqslant k \leqslant m$ tel que $a_j + a_{m+1-j} = a_k$, avec $m+1-j < k \leqslant m$ car les a_i sont croissants et strictement positifs. De la même façon, les j sommes suivantes

$$a_1 + a_{m+1-j}, a_2 + a_{m+1-j}, \dots, a_j + a_{m+1-j}$$

sont inférieures ou égales à n tout en étant distinctes et supérieures strictement à a_{m+1-j}. Chacune de ces sommes vaut donc a_l pour un certain $l > m+1-j$, ce qui ne fait que $j-1$ choix. Contradiction.

Solution de l'exercice 10 Nous procédons par double-comptage sur le nombre de points distribués dans le tournoi. Chaque match correspond à la distribution de 1 point, et donc le score total obtenu par k dans les matchs qu'ils jouent entre eux est de $k(k-1)/2$. Ainsi, le score total des participants est de $n(n-1)/2$.

D'autre part, le 10 derniers participants ont obtenu 45 points en jouant entre eux. Leur score total dans le tournoi est donc de 90 points. Les autres $n-10$

participants ont obtenu $(n-10)(n-11)/2$ points en jouant entre eux, et donc un total de $(n-10)(n-11)$ points. Le score de tous les participants est donc de $90+(n-10)(n-11)$ points. En comparant ces deux valeurs, on obtient l'équation $n^2-41n+400=0$, qui a deux solutions : 16 et 25.

Le tournoi ne pouvait pas contenir 16 participans. En effet, dans ce cas, le score total des 10 derniers participants est 90, et celui des 6 premiers est 30. Les dix derniers ont donc obtenu en moyenne plus de points que les premiers, ce qui est absurde. Le tournoi ne pouvait donc avoir que 25 participants.

Solution de l'exercice 11 Raisonnons par l'absurde en suppose que tout club qui contient au moins 11 garçons contient au plus 10 filles. Procdéons par double-comptage sur le nombre S de triplets (g, f, c) où c est un club qui auquel participe le garçon g et la fille f. Pour chaque paire d'un garçon et d'une fille, au moins un club convient. D'où $S \geqslant 2013^2$.

Considérons maintenant X l'ensemble des clubs avec au plus 10 garçons, et Y les clubs avec au moins 11 garçons, donc au plus 10 filles. Alors $|X| \leqslant 2013 \times 100 \times 10$. En effet, le choix d'une fille (2013 mannières) réduit le nombre de choix de club de X à au plus 100, chacun contenant au plus 10 garçons. De même, $|Y| \leqslant 2013 \times 100 \times 10$.

D'où $2013^2 \leqslant S \leqslant 2 \times 100 \times 10 \times 2013 = 2000 \times 2013$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 12 Notons $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ces points d'intersection et $C_1, C_2, \ldots C_n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, notons a_i le nombre de cercles auxquels A_i appartient.

Soit $X = \{(i,k) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\} | A_i \in C_k\}$. Double-comptons la somme suivante en procédant selon les points d'intersection :

$$\sum_{(i,k)\in X} \frac{1}{a_i} = \sum_{i_0=1}^{p} \left(\sum_{(i_0,k)\in X} \frac{1}{a_{i_0}} \right) = \sum_{i_0=1}^{p} 1 = p$$

...puis selon les cercles :

$$\sum_{(i,k)\in X} \frac{1}{a_i} = \sum_{k_0=1}^{n} \left(\sum_{(i,k_0)\in X} \frac{1}{a_i} \right) \geqslant \sum_{k_0=1}^{n} 1 \geqslant n$$

où la pénultième inégalité se justifie ainsi.

Fixons-nous un cercle C_{k_0} et considérons m l'indice d'un point d'intersection tel que $(m, k_0) \in X$ et a_m maximal. Ce point existe car C_{k_0} intersecte au moins un cercle. A_m appartient à $a_m - 1$ autres cercles qui intersectent de nouveau C_{k_0} en $a_m - 1$ points distincts car les cercles sont de même rayon, et non tangents. Ainsi, par minimalité de $1/a_m$,

$$\sum_{(i,k_0)\in X} \frac{1}{a_i} \geqslant a_m \frac{1}{a_m} \geqslant 1$$

Cela conclut.

Notons que cela revient à écrire $1/a_i$ dans un tableau $p \times n$ puis à sommer par lignes ou par colonnes.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> On numérote toutes les cases étoilées $E_1, E_2, \dots, E_p$ et pour chaque case E_i on note c_i le nombre de cases étoilées dans sa colonne et l_i dans sa ligne. Supposons par l'absurde que pour tout i, $c_i \geqslant l_i$. On va alors considérer les deux sommes :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{l_i}$$

Calculons la première somme selon les colonnes.

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{E_i \in k^e \text{colonne}} \frac{1}{c_i} \right) = \sum_{k=1}^{N} 1 = N$$

où l'avant-dernière égalité découle de la définition de c_i et de ce que chaque colonne contient au moins une étoile.

De la même mannière, on calcule la somme des $1/l_i$, ce qui permet d'écrire :

$$N = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{l_i} = M$$

Cela constitue la contradiction souhaitée.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> L'existence d'un pavage avec des tuiles entières montre que a et b sont entiers. Il suffit alors de montrer que m divise b ou que n divise a.

Découpons le rectangle en carré unitaire (côté 1) où on numérote les lignes de 0 à $a-1$ et les colonnes de 0 à $b-1$. On pose $\omega_m = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ et $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et dans la case (i,j) du tableau, on note le nombre $\omega_n^i \omega_m^j$.

Considérons une tuile horizontale qui commence par exemple à l'indice (i_0, j_0). La somme des nombres sous cette tuile vaut alors :

$$\omega_n^{i_0}\omega_m^{j_0} + \omega_n^{i_0}\omega_m^{j_0+1} + \dots \omega_n^{i_0}\omega_m^{j_0+m-1} = \omega_n^{i_0}\omega_m^{j_0} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^k \right) = \omega_n^{i_0}\omega_m^{j_0} \frac{1-\omega_m^m}{1-\omega_m} = 0$$

De même, le somme des nombres sous une tuile verticale vaut 0.

Or, le rectangle est pavé uniquement à l'aide de ces deux types de tuile. La somme des tous les nobmres écrits dans le rectangle, qui est donc nulle, se calcule d'autre part selon :

$$(\omega_n^0 + \omega_n^1 + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{a-1})(\omega_m^0 + \cdots + \omega_m^{b-1}) = \frac{1-\omega_n^a}{1-\omega_n}\frac{1-\omega_m^b}{1-\omega_b} = 0$$

L'un des deux facteurs est donc nul, ce qui signifie bien que n divise a ou m divise b.