DOMAINE : Non olympique
NIVEAU : Avancé++
CONTENU : Cours

AUTEUR : Thomas BUDZINSKI
STAGE : Montpellier 2014

Théorème de Cauchy-Lipschitz

1 Présentation du théorème et idée de la preuve

Le théorème de Cauchy-Lipschitz porte sur les équations différentielles : on se fixe $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie des hypothèses à préciser plus tard, et on cherche toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \text{ pour tout } t \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

Définition 1. On dit que f est *continue* si pour toutes suites $(t_n) \longrightarrow t$ et $(y_n) \longrightarrow y$, on a $f(t_n, y_n) \longrightarrow f(t, y)$.

Définition 2. On dit que f est c-*lipschitzienne en* y si il existe c telle que pour tous t, y_1 et y_2 :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant c|y_1 - y_2|$$

Théorème 3. (Théorème de Cauchy-Lipschitz)
Si f est continue et lipschitzienne en y, alors l'équation différentielle (1) admet une unique solution.

Remarque 4. L'hypothèse lipschitzienne en y est très contraignante. Par exemple, elle exclut $f(t, y) = y^2$. La raison est que les solutions non nulles de $y' = y^2$ tendent vers $+\infty$ en temps fini. La version générale du théorème permet de parler de solutions "locales", i.e définies sur des intervalles plus petits que $\mathbb{R}$, mais on n'en parlera pas ici.

Exercice 1 Montrer que pour $f(t, y) = y^{1/3}$ et $y_0 = 0$, on n'a pas unicité. Cela montre que même avec f pas trop méchante, il peut y avoir des contre-exemples : on a besoin de plus que la continuité de f.

Solution de l'exercice 1 $y(t) = 0$ est bien sûr solution. On cherche d'autres solutions de la forme $y(t) = ct^\alpha$: $y'(t) = \alpha c t^{\alpha-1}$ et $y(t)^{1/3} = c^{1/3}t^{\alpha/3}$. Il faut $\alpha - 1 = \frac{\alpha}{3}$ d'où $\alpha = \frac{3}{2}$, et $\frac{3}{2}c = c^{1/3}$ donc $c^{2/3} = \frac{2}{3}$ donc $c = \sqrt{\frac{8}{27}}$ et $c = -\sqrt{\frac{8}{27}}$ marchent : on a trois solutions.

L'idée de la preuve consiste à voir les fonctions qui nous intéressent comme des éléments d'un (très gros) espace : on va s'intéresse de manière globale à l'ensemble par exemple de toutes les fonctions continues d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

2 Espaces de Banach

Définition 5. Un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est un ensemble muni d'une addition $+ : E^2 \longrightarrow E$ et d'une multiplication $\cdot : E \times \mathbb{R} \longrightarrow E$ telles que :
- $+$ est associative et commutative
- il existe $0 \in E$ tel que $0 + x = x$ pour tout x
- pour tout $x \in E$, il existe $-x \in E$ tel que $x + (-x) = 0$
- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$ on a :
  - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
  - $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
  - $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
  - $1x = x$

Remarque 6. Moralement, il s'agit juste d'un ensemble dont on peut gentiment additionner les éléments et les multiplier par un réel. Pour ce qui nous intéresse, il n'est pas nécessaire de tout retenir en détail, mais la définition suivante est plus importante car elle permet de calculer des distances :

Définition 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une *norme* est une application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, alors $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- Si $x, y \in E$, alors $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace E muni d'une norme est appelé *espace vectoriel normé* (EVN pour les intimes).

Exercice 2 $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. Vérifier que les applications suivantes sont des normes :
- $\|x\| = max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

- $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Définition 8. Soient E un EVN, (x_n) une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. On dit que (x_n) *converge vers* ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geqslant N$, $\|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 9. C'est presque la même définition que pour des suites réelles.

Définition 10. Soient E un EVN et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que (x_n) est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour $m, n \geqslant N$ on ait $\|x_m - x_n\| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 11. Cette définition signifie que les termes de la suite sont confinés dans des zones de plus en plus petites, dont le diamètre tend vers 0. En d'autre termes, une suite de Cauchy est une suite qui "devrait converger", étant donnés les distances entre ses différents terme.

Définition 12. Un *espace de Banach* est un EVN dans lequel toute suite de Cauchy converge. On dit aussi qu'il est *complet*.

Remarque 13. Un même espace vectoriel peut être un Banach pour certaines normes mais pas pour d'autres. Trouver la bonne norme pour avoir un Banach est ainsi un problème très fréquent.

Exemple 14. $\mathbb{R}$ est complet. Ce n'est pas un fait trivial car il nécessite de construire $\mathbb{R}$, mais "ça se voit bien".

Exercice 3 En admettant que $\mathbb{R}$ est complet, montrer que $\mathbb{R}^n$ muni d'une des normes de l'exercice précédent est un Banach.

3 Théorème de point fixe

Définition 15. Soient E un Banach et $f : E \longrightarrow E$. On dit que f est *contractante* si il existe $c \in [0, 1[$ (c<1 ! ! !) tel que pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\|x - y\|$.

Théorème 16. (Théorème du point fixe de Picard)
Si E est un Banach et f est contractante, alors f admet un unique point fixe.

Démonstration. L'unicité est facile : si p_1 et p_2 sont deux points fixes, $\|p_1 - p_2\| = \|f(p_1) - f(p_2)\| \leqslant c\|p_1 - p_2\|$, ce qui n'est possible que si $\|p_1 - p_2\| = 0$, soit $p_1 = p_2$.

Pour l'existence, on construit une suite récurrente en espérant que sa limite soit un point fixe : soient $x_0 \in E$ quelconque et $x_{n+1} = f(x_n)$. Par une récurrence immédiate $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant c^n\|x_1 - x_0\|$ donc pour $n \geqslant m$:

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|x_n - x_{n-1}\| + ... + \|x_{m+1} - x_m\| \leqslant (c^m + ... + c^{n-1})\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{c^m}{1-c}\|x_1 - x_0\|$$

Soit $\varepsilon > 0$: pour m et n plus grand qu'un certain N, le membre de droite est plus petit que ε, donc (x_n) est une suite de Cauchy, donc elle converge vers une limite ℓ car E est un Banach.

$x_n \longrightarrow \ell$ donc, comme $\|f(x_n) - f(\ell)\| \leqslant c\|x_n - \ell\|$, $f(x_n) \longrightarrow f(\ell)$, i.e $x_{n+1} \longrightarrow f(\ell)$. Mais $x_{n+1} \longrightarrow \ell$, donc $f(\ell) = \ell$: on a bien trouvé un point fixe ! □

Remarques 17.
- Attention ! $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ mais elle n'est pas contractante ! D'ailleurs, elle n'a pas de point fixe.
- Pour $E = \mathbb{R}$, ce théorème est facile grâce au théorème des valeurs intermédiaires. Pour $E = \mathbb{R}^2$, c'est déjà beaucoup moins évident.

4 L'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$

Théorème 18. (Admis)

Une fonction continue f sur un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a < b$ est bornée et atteint ses bornes. Par exemple, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Définition 19. $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Remarque 20. Si une suite de fonctions converge pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, on dit qu'elle converge *uniformément*. C'est une propriété bien plus forte que le simple fait d'avoir $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout x.

Théorème 21. $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la "norme infini" est un espace de Banach.

Démonstration. On commence par vérifier que $\|f\|_\infty$ est bien une norme :

– Pour tout x, $|(\lambda f)(x)| \leqslant \lambda \|f\|_\infty$ donc $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \|f\|_\infty$. De plus, soit x_0 tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$: $|(\lambda f)(x_0)| = |\lambda||f(x_0)| = |\lambda|\|f\|_\infty$ donc on a bien égalité.
– Soient f et g : pour tout x, $|f(x) + f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, donc $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
– Si $\|f\| = 0$ alors $|f(x)| = 0$ pour tout x donc $f = 0$.

La partie plus difficile est bien sûr de montrer que notre espace est complet. Soit donc (f_n) une suite de Cauchy : pour tous m, n et x on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty$, donc pour tout x fixée, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers une limite notée $f(x)$. Il reste maintenant à montrer d'une part qu'on a la convergence pour $\| \cdot \|_\infty$ et pas seulement point par point, et d'autre part que la limite est bien une fonction continue.

Soit donc $\varepsilon > 0$ et N tel que pour $m, n \geqslant N$ on ait $\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout x, $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ donc en faisant tendre m vers $+\infty$ à n fixé, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout x, donc $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, et on a bien convergence uniforme.

Il ne reste plus qu'à vérifier que f est bien dans notre espace. Soit donc $x \in [a, b]$, et $\varepsilon > 0$: on veut que pour $|x - x'|$ assez petit, $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$. Soit n tel que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(x')| \end{aligned}$$

Par continuité de f_n, pour $|x - x'|$ assez petit, $|f_n(x) - f_n(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, donc pour $|x - x'|$ assez petit, $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$, et f est bien continue, donc (f_n) converge bien pour la norme de notre espace vers un élément de notre espace, donc $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est bien un Banach. □

5 Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz

On rappelle que l'équation qui nous intéresse est :

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \text{ pour tout } t \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Tout d'abord, si on a une unique solution sur tout intervalle $[-a, a]$, alors pour $b > a$ la restriction à $[-a, a]$ de la solution sur $[-b, b]$ est solution, donc par unicité les solutions sur $[-a, a]$ et $[-b, b]$ sont égales sur $[-a, a]$: les solutions sur différents intervalles sont "compatibles" entre elles et permettent de construire une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il suffit donc de montrer le théorème en remplaçant $\mathbb{R}$ par un intervalle $[-a, a]$.

On remarque que l'équation équivaut à dire que pour tout t :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$$

Autrement dit, une solution de notre équation différentielle est un **point fixe** de l'application A de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ dans lui-même, qui à y associe $A(y) : t \longrightarrow y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$. Il semble donc naturel de chercher à montrer que A est contractante. Notons L tel que f soit L-lipschitzienne en y :

$$\begin{aligned}
|A(y_1)(t) - A(y_2)(t)| &= y_0 + \int_0^t f(s, y_1(s))ds - y_0 - \int_0^t f(s, y_2(s))ds \\
&\leqslant \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|ds \\
&\leqslant L \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|ds \\
&\leqslant Lt\|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\|A(y_1) - A(y_2)\|_\infty \leqslant La\|y_1 - y_2\|_\infty$. Horreur ! ! ! Ce n'est pas forcément contractant car peut-être que $La \geqslant 1$. Il va donc falloir ruser en itérant A ! Si on réutilise notre dernière inégalité on trouve :

$$\begin{aligned}
|A^2(y_1)(t) - A^2(y_2)(t)| &= y_0 + \int_0^t f(s, A(y_1)(s))ds - y_0 - \int_0^t f(s, A(y_2)(s))ds \\
&\leqslant \int_0^t |f(s, A(y_1)(s)) - f(s, A(y_2)(s))|ds \\
&\leqslant L \int_0^t |A(y_1)(s) - A(y_2)(s)|ds \\
&\leqslant L \int_0^t Ls\|y_1 - y_2\|_\infty ds \\
&\leqslant L^2 \frac{t^2}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Puis itérons une nouvelle fois :

$$\begin{aligned}|A^3(y_1)(t) - A^3(y_2)(t)| &\leqslant L\int_0^t |A^2(y_1)(s) - A^2(y_2)(s)|ds \\ &\leqslant L\int_0^t \frac{L^2s^2}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty ds \\ &\leqslant L^3\frac{t^3}{6}\|y_1 - y_2\|_\infty\end{aligned}$$

On commence à voir ce qu'il se passe : en intégrant s^p, on obtient un $\frac{t^{p+1}}{p+1}$ qui vient s'ajouter au dénominateur déjà existant. En faisant p fois ce qu'on vient de faire trois fois, on obtient par récurrence sur p :

$$|A^p(y_1)(t) - A^p(y_2)(t)| \leqslant \frac{L^pt^p}{p!}\|y_1 - y_2\|_\infty$$

d'où $\|A^p(y_1) - A^p(y_2)\|_\infty \leqslant \frac{(aL)^p}{p!}\|y_1 - y_2\|_\infty$. Or, quand p tend vers $+\infty$, $\frac{(aL)^p}{p!}$ tend vers 0, donc pour p assez grand, $\frac{(aL)^p}{p!} < 1$ et A^p est contractante ! ! !

On peut donc appliquer le théorème de point fixe : A^p admet un unique point fixe, qu'on note z. Un point fixe de A est point fixe de A^p, donc il est immédiat que A admet au plus un point fixe. Il ne reste plus qu'à vérifier que z est point fixe de A :

$$\|A(z) - z\|_\infty = \|A(A^p(z)) - A^p(z)\|_\infty = \|A^{p+1}(z) - A^p(z)\|_\infty \leqslant c\|A(z) - z\|_\infty$$

avec $c < 1$ car A^p est contractante. Cela n'est possible que si $\|A(z) - z\| = 0$, i.e $A(z) = z$, d'où le théorème.

Remarque 22. D'une certaine manière, le théorème est constructif : en itérant A à partir d'une fonction quelconque, on est sûr de converger vers une solution. En particulier, si on étudie l'équation :

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t) \text{ pour tout } t \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

en partant de la fonction y constante égale à 1, on obtient :

$$A(y)(t) = 1 + t$$

$$A^2(y)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$A^3(y)(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

et ainsi de suite, mais on sait que l'unique solution est la fonction exponentielle d'où la formule :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$