DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Noé DE RANCOURT
STAGE : Montpellier 2012

Principe de l'extremum

- 1. Principe du minimum. -

Axiome 1 (Principe du minimum)**.** Tout ensemble non vide de nombres naturels possède un minimum.

Dans de nombreux problèmes, en particulier en arithmétique et en combinatoire, il est souvent utile de considérer une valeur minimale dans un certain ensemble. S'il s'agit d'entiers naturels, on peut le faire en utilisant le principe du minimum. Il est rare qu'on puisse résoudre un problème en utilisant uniquement ce principe ; en fait, celui-ci permet souvent de se ramener à certains cas particuliers d'un problème dont l'étude est plus simple que le cas général. Il se combine souvent bien avec le raisonnement par l'absurde : pour montrer qu'un objet n'existe pas, on suppose qu'il existe et on considère, dans un certain sens, le plus petit ; puis on montre qu'à partir de celui-ci, on peut en construire un encore plus petit, ce qui amène à une contradiction. Ceci sera illustré par les exercices 2 et 3, par exemple. Il existe aussi un principe analogue, assurant que tout ensemble non vide et majoré d'entiers admet un maximum. Attention, l'hypothèse de majoration est ici indispensable.

Exercice 1 On considère une feuille quadrillée infinie. On suppose que dans chaque case est inscrit un entier naturel, et que cet entier est toujours supérieur ou égal à la moyenne arithmétique de ses quatres voisins. Montrer que chaque case contient le même entier.

Solution de l'exercice 1 Notons a le plus petit entier parmi tous ceux écrits dans au moins une case. Alors si une case contient le nombre a, ses quatre voisins contiennent forcément aussi le nombre a. C'est aussi le cas des voisins de ses voisins, et des voisins des voisins de ses voisins, etc. Ainsi, en partant d'une case contenant a, on montre, de proche en proche, que toutes les cases contiennent a.

Exercice 2

Un carré est partitionné en $n > 1$ rectangles de côtés parallèles à ceux du carré. On suppose que toute droite parrallèle aux côtés du carré, qui coupe l'intérieur du carré, coupe également l'intérieur d'au moins un des rectangles de la partition. Montrer qu'il y a un rectangle qui ne touche pas les côtés du carré.

(Problème C1 *de la liste étendue de l'OIM* 2007.*)*

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

On note $ABDC$ le carré et on appelle horizontale et verticale les directions (AB) et (AC) respectivement. On suppose par l'absurde qu'il existe une partition sans rectangle intérieur. On en choisit une qui possède le nombre minimal de rectangles. On note a et b les rectangles situés au voisinage de A et B respectivement. Quitte à échanger A et B, on peut supposer que a a une hauteur inférieure à b. On note c l'unique rectangle qui partage un côté vertical avec a, et d l'unique rectangle qui touche a et c. On distingue trois cas.

$\mathrm{largeur}(a) = \mathrm{largeur}(c)$. Dans ce cas on peut recoller a et c et obtenir une partition avec moins de rectangles. Exclu par minimalité.

$\mathrm{largeur}(c) < \mathrm{largeur}(a)$. Alors d ne peut pas toucher ni (AB) (bloqué par a), ni (AC) (bloqué par c). Puisque $\mathrm{hauteur}(a) < \mathrm{hauteur}(b)$, d ne peut pas toucher (BD) non plus : il est bloqué par b. La seule possibilité restante est que d touche (CD). Mais, dans ce cas, on peut fusionner c, d, et tous les rectangles situés dans la zone délimitée par le coté bas de c, le coté gauche de d, et les droites (AC) et (CD), ce qui produit une partition convenable avec strictement moins de rectangles. Donc ce cas est impossible.

$\mathrm{largeur}(c) > \mathrm{largeur}(a)$. Alors d ne peut toucher ni (AC) (bloqué par a), ni (CD) (bloqué par c), ni (BD) (bloqué par b). La seule solution restante est qu'il touche (AB), mais alors on peut le fusionner avec a, ce qui fournit une partition convenable avec un rectangle de moins. Absurde.

- 2. Lien avec les principes de récurrence et de descente infinie -

Exercice 3

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

<u>Solution de l'exercice 3</u>

Première méthode : principe du minimum. Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ ne pouvant pas s'écrire comme produit de nombres premiers. On suppose alors que n est le plus petit entier vérifiant cette propriété. L'entier n n'est donc pas premier ; il existe donc des entiers k et l tous deux strictement inférieurs à n tels que $n = kl$. Par minimalité de n, les entiers k et l sont produits de nombres premiers, donc n aussi, contradiction. Donc tout entier est produit de nombres premiers.

Seconde méthode : par récurrence. On montre le résultat par récurrence forte sur n. Si n est premier, c'est vrai ; si n n'est pas premier, on écrit $n = kl$ avec k et l des entiers strictement inférieurs ou égaux à n ; par hypothèse de récurrence, ils s'écrivent comme produits de nombres premiers, donc n aussi.

Troisième méthode : descente infinie. Supposons qu'il existe un entier n_0 ne pouvant pas s'écrire comme produit de nombres premiers. On va montrer qu'on peut en construire un strictement plus petit, n_1, vérifiant la même propriété. L'entier n_0 s'écrit $n_0 = kl$, où k et l sont des entiers strictement plus petits que n_0. Au moins l'un des deux, par exemple k, ne peut pas s'écrire comme produit de nombres premiers, sinon n_0 pourrait aussi s'écrire sous cette forme. On pose alors $n_1 = k$.

En réitérant ce procédé, on peut construire un entier naturel $n_2 < n_1$ qui ne s'écrit pas comme produit de nombres premiers, puis $n_3 < n_2$ de la même façon, et ainsi de suite... Ainsi, on construit une suite (n_i) d'entiers naturels strictement décroissante. Une telle suite ne peut pas exister, ce qui permet de conclure.

En fait, les trois méthodes utilisées pour cette preuve sont rigoureusement identiques : seule la formulation change. Le principe de récurrence est en fait équivalent au principe du minimum, et toute preuve par récurrence peut être reformulée en utilisant le principe du minimum combiné avec un raisonnement par l'absurde. Ces deux principes sont équivalents à un troisième principe que nous allons maintenant aborder : le principe de descente infinie.

Axiome 2 (Principe de descente infinie)**.** Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

Théorème 1. On a équivalence entre :

(1) Le principe du minimum ;

(2) Le principe de récurrence ;

(3) Le principe de descente infinie.

Démonstration. **(1) ⇒ (2)** Soit $P(n)$ une propriété telle que $P(0)$ est vraie et, pour tout $n \geqslant 0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. On pose $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \textit{ est fausse}\}$. Par l'absurde, supposons E non-vide. Par le principe du minimum, E admet alors un minimum n_0. $P(n_0)$ est donc fausse, donc $n_0 > 0$. Par mnimalité de n_0, $P(n_0-1)$ est vraie. Donc $P(n_0)$ est vraie aussi, contradiction. On en déduit que E est vide, donc que $P(n)$ est vraie pour tout n.

(2) ⇒ (1) Soit E un ensemble d'entiers naturels qui n'a pas de minimum ; on va montrer que E est vide. On note $P(n)$ la propriété « E ne contient aucun entier inférieur ou égal à n ». Comme E n'a pas de minimum, $0 \notin E$, donc $P(0)$ est vraie. De plus, si $P(n)$ est vraie, alors $n+1$ n'appartient pas à E, sinon ce serait le minimum de E ; $P(n+1)$ est donc vraie. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n ; ainsi E est vide.

(1) ⇒ (3) Soit (u_n) une suite d'entiers naturels. Par le principe du minimum, il existe un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit minimal. On a alors $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, et la suite (u_n) n'est pas strictement décroissante.

(3) ⇒ (1) Supposons qu'il existe un ensemble non vide d'entiers naturels, E, n'admettant pas de minimum. Pour tout $n_i \in E$, il existe donc $n_{i+1} \in E$ tel que $n_{i+1} < n_i$. En partant d'un entier $n_0 \in E$, on construit ainsi une suite strictement décroissante d'entiers naturels, dont l'existence contredit le principe de descente infinie.

□

Toute preuve pouvant être faite avec l'un des trois principes précédents peut se reformuler avec les deux autres. Néanmoins, contrairement à l'exercice 3, dans la plupart des cas, l'utilisation de l'un d'eux est beaucoup plus simple que celle des deux autres.

- 3. Utilisation de la descente infinie. -

Le principe de descente infinie s'utilise généralement de la manière suivante. On veut montrer qu'une propriété $P(n)$ n'est satisfaite par aucun entier naturel n. Pour cela, on commence par montrer que si la propriété est vérifiée par un entier n_i, alors elle est aussi vérifiée par un entier naturel $n_{i+1} < n_i$. Ainsi, en supposant l'existence d'un entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie, on arrive à construire une suite strictement décroissante d'entiers naturels vérifiant la propriété P, ce qui contredit le principe de descente infinie. Ce type de raisonnement, utilisé pour la première fois par Fermat, est très utile dans la résolution d'équations diophantiennes.

Exercice 4 Montrer que $\sqrt{2}$ est irationnel.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Supposons par l'absurde qu'il existe $a,b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Alors on a $2b^2 = a^2$. On déduit que a est pair, notons-le $a = 2 \cdot a_1$. Alors $2b^2 = 4a_1^2$, donc $b^2 = 2a_1^2$. Comme b est pair, on le note $2b_1$ et on trouve $4b_1^2 = 2a_1^2$, d'où $2b_1^2 = a_1^2$. Ceci fournit un couple (a_1, b_1) vérifiant la même propriété que (a, b), avec $b_1 < b$. En continuant, on trouve une suite infinie de couples $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ telle que $b > b_1 > b_2 > \cdots$. Le principe de descente infinie contredit l'existence d'une telle suite (b_i), donc il n'existe pas de couple (a, b) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Exercice 5 Montrer que l'unique solution dans $\mathbb{Z}^3$ de l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ est $(0, 0, 0)$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit (x_0, y_0, z_0) un triplet solution. Alors x_0 est pair, et on peut poser $x_0 = 2x_1$. On a alors $4x_1^3 + y_0^3 = 2z_0^3$. Donc y_0 est pair, on pose $y_0 = 2y_1$, et on a $2x_1^3 + 4y_1^3 = z_0^3$. Donc z_0 est pair, et on peut poser $z_0 = 2z_1$; le triplet (x_1, y_1, z_1) est donc solution de la même équation que (x_0, y_0, z_0). On peut donc construire une suite (x_i, y_i, z_i) de triplets solutions, avec $x_i = 2x_{i+1}$, $y_i = 2y_{i+1}$, et $z_i = 2z_{i+1}$ pour tout i. Si l'un des entiers x_0, y_0 ou z_0 était non-nul, par exemple x_0, alors la suite $(|x_i|)$ serait une suite d'entiers naturels strictement décroissante, contradiction. Donc $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

- 4. Extréma d'un ensemble fini. -

Proposition 2. Un ensemble fini de réels admet un maximum et un minimum.

Démonstration. Par récurrence sur le cardinal de l'ensemble.

□

Même si trivial, ce résultat peut constituer le point de départ pour une solution. Avant d'essayer des techniques plus sophistiquées, il faut penser à considérer un élément extrémal.

Exercice 6 Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Dans un système solaire il y a exactement $2n+1$ planètes, qui abritent toutes de la vie, et qui se trouvent à des distances deux à deux distinctes. Les habitants de chaque planète lancent une expédition sur la planète la plus proche. Montrer qu'il existe une planète qui n'est pas visitée.

Solution de l'exercice 6 Par récurrence sur n. Considérons les deux planètes les plus proches dans le système solaire, que l'on notera A et B. Celles-ci s'explorent réciproquement. Il reste $2n-1$ planètes.

- Si $n = 1$ *(initialisation de la récurrence)* il reste une seule planète qui explore soit A, soit B, et qui n'est donc pas explorée.
- Si $n \geqslant 2$ *(hérédité)* alors on distingue deux cas. Soit au moins l'une des planètes restantes explore A ou B ; ces planètes sont au nombres de $2n-1$, et peuvent donc être explorées par au plus $2n-2$ expéditions, donc l'une d'elles n'est pas explorées. Soit les $2n-1$ planètes restantes s'explorent entre elles, et par hypothèse de récurrence, l'une d'elles n'est pas explorée.

Exercice 7 On se donne un ensemble fini de points dans le plan, de cardinal pair, trois quelconques d'entre eux non alignés. Montrer qu'on peut les relier par des segments sorte que chaque point soit relié à exactement un autre et que les segments ne se coupent pas.

Solution de l'exercice 7 Considérons la façon de relier les points qui minimise la somme des longueurs des segments, avec pour unique contrainte que chaque point soit extrémité d'exactement un segment. Supposons, par l'absurde, que l'on a deux segments AD et BC qui se coupent en un point O (par hypothèse, celui-ci est forcément différent de A, B, C, et D). Si, à la place des segments AD et BC on choisit CD et AB, alors tout point est relié à exactement un autre. Par minimalité de la somme des longueurs, on en déduit :

$$AD + BC \leqslant AB + CD. \tag{1}$$

Pour la même raison, on a :

$$AD + BC \leqslant AC + BD. \tag{2}$$

En sommant les deux équations, on trouve

$$2 \cdot (AD + BC) \leqslant (AC + CD) + (AB + BD) \tag{3}$$

Par l'inégalité triangulaire dans les triangles AOB, BOD, DOC et COA, on a :

$$AC+AB+BD+DC \leqslant CO+OA+OA+OB+OB+OD+OD+OC = 2\cdot(AD+BC), \tag{4}$$

et on n'a pas égalité sinon A, B, et O seraient alignés, donc A, B, et C aussi, ce qui est exclu par l'hypothèse. Ainsi on a une contradiction avec l'équation (3). Donc dans la solution minimale, il n'y a pas de segments qui se coupent.

- 5. Invariants monotones -

Exercice 8

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Considérons un parlement composé de n députés. On suppose que chaque député a exactement trois ennemis. On suppose que la relation d'inimitié est symétrique (si a est ennemi de b, alors b est ennemi de a). Montrer qu'il est possible de séparer le parlement en deux commissions telles que chaque député ait au plus un ennemi dans sa commission.

Solution de l'exercice 8

On va utiliser une méthode algorithmique pour former les deux commissions. On va commencer par former deux commissions au hasard. Puis, tant qu'il restera au moins un député ayant au moins deux ennemis dans sa commission, on s'autorisera l'opération suivante : changer ce député de commission. On continue à effectuer ces opérations tant qu'il reste un député ayant au moins deux ennemis dans sa commission. Si à partir d'un certain moment, il n'est plus possible d'effectuer de telles opérations, cela signifie qu'on a obtenu la situation voulue. Le problème est que rien ne garantit, a priori, que ces opérations vont s'arrêter un jour.

Pour prouver que c'est en fait le cas, on va introduire m le nombre de paires $\{a, b\}$ où a et b sont deux députés ennemis faisant partie de la même commission. Autrement dit, c'est le nombre de relations d'inimitié à l'intérieur des commissions. m est un entier positif, et à chaque fois qu'on effectue une opération autorisée, il diminue strictement : en effet, en changeant de commission un député ayant au moins deux ennemis dans sa commission, on casse au moins deux relations d'inimitiés, et on en crée au plus une (car ce député a au plus un ennemi dans l'autre commission). Au bout d'un certain temps, m atteindra donc forcément sa valeur minimale, et dès lors, aucune opération ne sera plus possible. Ceci signifiera que la situation attendue est obtenue.

L'entier positif m utilisé dans cette preuve est appelé un *invariant monotone*. Les invariants monotones interviennent dans de nombreux problèmes, pour montrer qu'une suite d'opérations se termine forcément et permet d'arriver à une certaine situation.

Exercice 9

À chaque sommet d'un pentagone régulier, on associe un entier relatif de telle sorte que la somme de ces cinq nombres soit strictement positive.

Si, à trois sommets consécutifs, correspondent les nombres x, y, et z avec $y < 0$, alors l'opération suivante est permise : « remplacer le triplet (x, y, z) par $(x+y, -y, y+z)$ ».

Cette opération est répétée tant qu'au moins un des cinq nombres est strictement négatif. Déterminer si ce processus prend nécessairement fin après un nombre fini d'opérations.

(Problème 3 *de l'OIM* 1986.*)*

Solution de l'exercice 9

L'idée est de trouver un invariant monotone, dont la valeur soit toujours un entier positif, et qui diminue strictement à chaque opération. Ici, en notant x_i l'entier associé au $i^{\text{ème}}$ sommet du pentagone (les indices étant pris modulo 5, et les sommets du pentagone ordonnés dans le sens direct), on va poser

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_{i-1} - x_{i+1}).$$

Supposons, par exemple, que $x_3 < 0$, et qu'on applique une opération autorisée au triplet (x_2, x_3, x_4). Celle-ci remplacera le quintuplet $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ par $Y = (x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_3 + x_4, x_5)$. Un calcul simple montre alors que $f(Y) - f(X) = 2x_3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) < 0$ (en effet, la somme $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ ne changeant pas au cours des opérations, elle reste strictement positive).

À chaque opération, la valeur de $f(X)$ diminue strictement, tout en restant positive. Lorsqu'elle atteindra sa valeur minimale, cela signifiera qu'aucune opération n'est plus possible, et donc que les nombres situés au sommets du pentagone sont tous positifs.

Remarque 3. On aurait pu aussi donner une autre formulation de cette solution, utilisant le principe du minimum : par l'absurde, supposons qu'il existe une suite infinie d'opérations autorisées. Alors on considère le quintuplet X obtenu au cours de cette suite d'opérations qui minimise la valeur de $f(X)$. En effectuant une opération supplémentaire, $f(X)$ diminue encore, absurde.