DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Margaret BILU
STAGE : Montpellier 2014

Identités remarquables, inégalités

1 Généralisation des identités remarquables

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser les identités remarquables vues dans le cours précédent.

Généralisation de $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: Si on regarde bien, on remarque un point commun entre $a^2 - b^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(a+b)$ et $a^3 - b^3 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(a^2 + ab + b^2)$, à savoir le facteur $(a - b)$. On peut donc imaginer que dans l'identité remarquable qui donne plus généralement $a^n - b^n$ pour n quelconque, ce facteur apparaisse également. Il suffit donc d'intuiter l'autre facteur. Pour cela, regardons déjà un peu ce qui se passe pour $n = 4$:

Tout d'abord, pour obtenir un terme a^4, il faut nécessairement un a^3 dans le second facteur. On a donc :

$$(a^4 - b^4) = (a - b)(a^3 + \dots) = a^4 - a^3 b + \dots$$

Cependant, on voit qu'en développant, ce dernier donne également un terme $-a^3 b$. Pour annuler ce dernier, nous allons ajouter un terme $a^2 b$ dans le facteur cherché, qui grâce au a du premier facteur, donne bien $a^3 b$:

$$(a^4 - b^4) = (a - b)(a^3 + a^2 b + \dots) = a^4 + a^3 b - a^3 b - a^2 b^2 + \dots = a^4 - a^2 b^2 + \dots$$

Cependant, encore à cause du b, ce terme $a^2 b$ fait apparaître un terme $-a^2 b^2$ dans le développement. Pour annuler ce dernier, on utilise la même astuce, en ajoutant un terme ab^2 dans le facteur cherché

$$\begin{aligned}(a^4 - b^4) &= (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + \dots) \\ &= a^4 + a^3 b + a^2 b^2 - a^3 b - a^2 b^2 - ab^3 + \dots \\ &= a^4 - ab^3 + \dots\end{aligned}$$

Il reste maintenant un terme $-ab^3$ « parasite », que nous allons évacuer grâce à un b^3 dans le facteur cherché... et cela nous donne notre factorisation !

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3).$$

C'est exactement le même genre de considérations qui nous permet de généraliser à n quelconque :

Proposition 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Alors

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Démonstration. On développe le côté droit, ce qui donne :

$$(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^3b^{n-3}+a^2b^{n-2}+ab^{n-1})-(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n)$$

Pour tout i dans $\{1,\ldots,n-1\}$, la première parenthèse fournit un terme a^ib^{n-i}, qui est annulé par un terme $-a^ib^{n-i}$ provenant de la deuxième parenthèse. Il reste donc bien a^n-b^n. □

Généralisation de $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ **:** Maintenant, notre but est de donner une manière de développer $(a+b)^n$ pour tout entier n. Nous allons pour cela nous servir des notions de combinatoire abordées lors du cours précédent. Commençons encore une fois par regarder ce que cela donne pour n petit :

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

On observe plusieurs choses :

- Pour tout n, le développement est donné par des termes de la forme a^ib^{n-i} pour $i\in\{0,\ldots,n\}$ (rappelons que $a^0=1$), accompagnés de coefficients.
- Les coefficients en question sont symétriques, c'est-à-dire que celui devant a^ib^{n-i} est le même que celui devant $a^{n-i}b^i$, ce qui n'est pas étonnant vu que a et b jouent des rôles symétriques : $(a+b)^n=(b+a)^n$.
- Les termes a^n et b^n ont des coefficients 1.

Commençons par regarder le cas $n=2$. Il s'agit de comprendre le développement du produit $(a+b)(a+b)$. Chaque terme du développement s'obtient en choisissant a ou b dans chaque parenthèse. Si on choisit a dans les deux, on obtient le terme a^2, et c'est la seule manière d'obtenir a^2, d'où le coefficient 1 devant a^2. Il en est de même pour le terme b^2 Si on choisit a dans la première parenthèse et b dans la deuxième, on obtient ab, mais c'est également le cas si on choisit b dans la première et a dans la deuxième. Ainsi, il y a un coefficient 2 devant le terme ab, qui correspond au nombre de possibilités de choisir une fois a et une fois b dans les deux parenthèses.

Plus généralement, quand on développe $(a+b)^n=\underbrace{(a+b)\ldots(a+b)}_{n\text{ fois}}$, le coefficient devant le terme a^ib^{n-i} sera exactement le nombre de manières de choisir i fois a et $n-i$ fois b dans ces n parenthèses. Cela revient exactement à choisir i parenthèses parmi n, dans lesquelles on gardera a. Vous avez appris au cours précédent que cela peut se faire de $\binom{n}{i}$ manières. D'où la proposition suivante :

Proposition 2. (Binôme de Newton)

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}a^0b^n.$$

Ainsi, les coefficients dans le développement de $(a+b)^n$ sont donnés exactement par les lignes du triangle de Pascal !

En particulier, si on se souvient que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$, on voit que les coefficients devant a^n et b^n sont égaux à 1, et les coefficients devant $a^{n-1}b$ et ab^{n-1} sont égaux à n. De plus, la propriété $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ assure la symétrie des coefficients.

Exercice 1 Retrouver les développements de $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$, et donner celui de $(a+b)^5$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Il suffit d'utiliser la bonne ligne du triangle de Pascal. Pour $n = 5$, on a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Exercice 2 Sans faire de gros calculs, calculer 11^5.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> D'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} 11^5 = (10+1)^5 &= 10^5 + 5 \times 10^4 + 10 \times 10^3 + 10 \times 10^2 + 5 \times 10 + 1 \\ &= 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 \\ &= 161051. \end{aligned}$$

Exercice 3 Pour tout $n \geqslant 1$, simplifier l'expression

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On utilise la proposition avec $a = b = 1$: la somme qui nous intéresse vaut donc $(1+1)^n = 2^n$.

Ainsi, la somme des coefficients de la n-ième ligne du triangle de Pascal vaut 2^n. On peut en donner une autre démonstration, par récurrence : la somme de la 0-ième ligne du triangle de Pascal est 1, d'où l'initialisation. Supposons que la somme des nombres de la n-ième ligne vaut 2^n et considérons la $n+1$-ième ligne. Chaque terme de cette ligne est somme de deux termes de la ligne précédente, et réciproquement, chaque terme de la ligne précédente intervient dans deux termes de la ligne suivante, donc la somme des termes a été multipliée par deux, et vaut 2^{n+1}, d'où le résultat.

Exercice 4 Déterminer (sans faire de gros calculs) combien vaut

$$\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}.$$

Généraliser en remplaçant 6 par n.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> En prenant $n = 6$, $a = 1$ et $b = -1$ dans la proposition, puisque $(-1)^k$ vaut 1 si k pair et -1 si k impair, on obtient que la première expression vaut $(1-1)^6 = 0$. Plus généralement, on obtient pour tout n que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

On peut résumer le résultat de l'exercice précédent en disant que la *somme alternée* des coefficients du triangle de Pascal vaut 0.

2 Inégalités

Ce paragraphe est une introduction aux inégalités, qui représentent une classe d'exercices non-négligeable aux olympiades. Il s'agit toujours de montrer qu'une certaine quantité dépendant d'une ou plusieurs variables, est plus grande qu'une autre quantité, lorsque les variables en question prennent des valeurs dans un certain ensemble (qui peut être $\mathbb{R}$, ou bien $\mathbb{R}^+$, ou bien encore autre chose). Souvent, il faut aussi déterminer les cas d'égalité, c'est-à-dire les valeurs des variables pour lesquelles ces deux quantités sont égales. Pour montrer des inégalités, on a le droit de se servir de certaines inégalités connues.

L'inégalité la plus simple et la plus connue est celle qui dit qu'un carré est toujours positif :

Proposition 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.

Malgré ses airs inoffensifs, cette inégalité est très utile et permet de montrer pas mal de choses.

Exercice 5 (Inégalité arithmético-géométrique pour deux variables) Soient a et b des réels positifs. Montrer que

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Si on multiplie par 2 et qu'on met tout du même côté, on se ramène à montrer que $a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$. On reconnaît ici une identité remarquable, ce qui donne $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, cette dernière inégalité étant vraie car un carré est toujours positif. De plus, cela nous donne le cas d'égalité : si a et b sont des réels positifs, $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ si et seulement si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, donc si et seulement si $a = b$.

Exercice 6 Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> C'est une application directe de l'inégalité arithmético-géométrique. Il n'y a égalité que lorsque $x = \frac{1}{x}$, donc lorsque $x = 1$.

Exercice 7 (Inégalité géométrico-harmonique) Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Quel sont les cas d'égalité ?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> En multipliant tout par le dénominateur du côté droit, on se ramène à montrer

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geqslant 2.$$

Ceci est une application directe de l'inégalité $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ vue plus haut, et il y a égalité si et seulement si $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = 1$, donc lorsque $a = b$.

Remarque 4. Les quantités $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ sont respectivement les moyennes *arithmétique*, *géométrique* et *harmonique* de a et b. On a donc montré ci-dessus que la moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique, qui est elle même plus grande que la moyenne harmonique.

3 Exercices

Exercice 8 Montrer que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 9

1. Dans la somme
$$100 + 101 + 102 + \ldots + 198 + 199 + 200$$
on remplace tous les termes par 150. La somme diminue-t-elle ou augmente-t-elle ?
2. Dans le produit
$$100 \times 101 \times 102 \times \ldots \times 198 \times 199 \times 200$$
on remplace tous les facteurs par 150. Le produit diminue-t-il ou augmente-t-il ?

Exercice 10 Les moyennes arithmétique et harmonique de deux réels a et b valent 2. Combien valent a et b ?

Exercice 11 Calculer

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{2014 \times 2015}.$$

4 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 8 On met les fractions du côté droit au même dénominateur :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$, c'est-à-dire, comme k est positif, que $\frac{1}{k-1} \geqslant \frac{1}{k}$. Cette dernière inégalité est vraie car $k-1 \leqslant k$.

Solution de l'exercice 9

1. On remarque que dans la somme initiale, chaque nombre de la forme $150-k$ pour $k \in \{1, \ldots, 50\}$ peut être regroupé avec $150+k$. Puisque $150-k+150+k = 2 \times 150$, cela ne change pas la somme de remplacer tous les termes par 150.
2. La question précédente nous donne l'idée de regrouper dans le produit chaque facteur de la forme $150-k$ pour $k \in \{1, \ldots, 50\}$ avec $150-k$. Le produit initial peut donc s'écrire comme 150 fois le produit de facteurs $(150-k)(150+k) = 150^2 - k^2$ pour k variant entre 1 et 50. En remplaçant pour tout k les nombres $150-k$ et $150+k$ par 150, on remplace $(150-k)(150+k) = 150^2 - k^2 < 150^2$ par 150^2, et donc on augmente le produit.

Solution de l'exercice 10 D'après les inégalités entre les moyennes, nous avons

$$2 = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} = 2.$$

Il y a donc nécessairement égalité entre les trois moyennes, donc $a = b$. D'autre part, $2 = \frac{a+b}{2} = \frac{2a}{2} = a$. Finalement, a et b ne peuvent valoir que 2.

Solution de l'exercice 11 Pour cet exercice, il est utile de se souvenir que $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{1 \times 2} & = & 1 - \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2 \times 3} & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3 \times 4} & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
 & \vdots & \\
\frac{1}{2013 \times 2014} & = & \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \\
\frac{1}{2014 \times 2015} & = & \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}
\end{array}$$

On remarque que, quand on somme tout, quasiment tout se simplifie et il reste $1 - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$.