DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Vincent MOULY
STAGE : Montpellier 2013

Exercices d'arithmétique

- Énoncés -

Exercice 1 Montrer qu'il n'existe pas d'entiers non nuls x, y, z tels que $x^4+y^4 = z^4$.

Exercice 2 Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$.

Exercice 3 Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs telles que $a^b = b^{(a^2)}$.

Exercice 4 Soit P un polynôme non constant à coeficients entiers, montrer que l'ensemble E des nombres premiers divisant $P(n)$ pour au moins un n est infini.

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 On montre en fait la propriété plus forte qu'il n'est pas possible d'avoir $x^4 + y^4 = z^2$.

Par l'absurde, on suppose que (x, y, z) est la solution de l'équation avec z^2 minimal. On a alors que $x \wedge y \wedge z = 1$. D'après la forme générale des triplets pythagoriciens, on pose

$$x^2 = 2mn \qquad (1)$$
$$y^2 = m^2 - n^2 \qquad (2)$$
$$z = m^2 + n^2 \qquad (3)$$

Avec m et n non nuls, premiers entre eux et de parité opposée. De même, grâce à (2), on a m impair et n pair, donc on pose

$$m = u^2 + v^2$$
$$n = 2uv$$
$$y = u^2 - v^2$$

Avec u et v non nuls, premiers entre eux et de parité opposée. Donc (1) se réécrit

$$x^2 = 4uv(u^2 + v^2)$$

Comme u, v et $u^2 + v^2$ sont deux à deux premiers entre eux, chacun est un carré. On note $u = \tilde{x}^2$, $v = \tilde{y}^2$ et $u^2 + v^2 = \tilde{z}^2$. On a alors

$$\tilde{x}^4 + \tilde{y}^4 = \tilde{z}^2$$

et $\tilde{z} < x^2 < z$, ce qui contredit la minimalité de la solution (x, y, z).

Solution de l'exercice 2 On constate que n est impair. $n = 1$ est solution. Si $n > 1$, on pose p_0 le plus petit diviseur premier de n. Soit $\omega_{p_0}(2)$ l'ordre de 2 modulo p_0. On a

$$\omega_{p_0}(2) \mid 2n$$
$$\omega_{p_0}(2) \nmid n$$
$$\omega_{p_0}(2) \mid p_0 - 1$$

Par minimalité de p_0, n est premier avec $p_0 - 1$, donc $2n \wedge (p_0 - 1) = 2$, donc $\omega_{p_0}(2) \mid 2$, donc $\omega_{p_0}(2) = 2$. Donc $p_0 \mid (2^2 - 1)$ donc $p_0 = 3$.

D'après le théorême LTE, $v_3(2^n + 1^n) = v_3(2 + 1) + v_3(n)$, donc $v_3(n^2) \leqslant 1 + v_3(n)$, donc $v_3(n) \leqslant 1$, donc $v_3(n) = 1$. On note $n = 3m$. On constate que $m = 1$ donne $n = 3$, qui est bien solution.

Sinon, on pose p_1 le plus petit diviseur premier de m. $m^2 \mid \frac{8^m+1}{9}$. Donc

$$\omega_{p_1}(8) \mid 2m$$
$$\omega_{p_1}(8) \nmid m$$
$$\omega_{p_1}(8) \mid p_1 - 1$$

donc, comme précedemment, $\omega_{p_1}(8) = 2$, donc $p_1 \mid 63$, donc $p_1 = 7$.

Il suffit alors de constater que $7 \nmid \frac{8^m+1}{9}$.

Les deux seules solutions sont donc $n = 1$ et $n = 3$.

Solution de l'exercice 3

Lemme 1. Si $a^b \geqslant b^a$, alors $b \geqslant a$ ou $b = 2$ ou $b = 1$. Dans le deuxième cas, on a de plus $a \leqslant 4$.

Démonstration.

$$a^b \geqslant b^a \Leftrightarrow b\ln(a) \geqslant a\ln(b) \Leftrightarrow \frac{b}{\ln(b)} \geqslant \frac{a}{\ln(a)}$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ est strictement croissante pour $x \geqslant e$, et $f(2) = f(4)$, ce qui conclut la preuve. □

Si $a = 1$, alors $b = 1$ et réciproquement. Par la suite, on suppose que $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$.

On a $(a^2)^b \geqslant a^b = b^{(a^2)}$, donc, d'après le lemme, $b \geqslant a^2$ ou ($b = 2$ et $a^2 = 3$) ou ($b = 2$ et $a^2 = 4$). $a^2 = 3$ est absurde, et $(2, 2)$ n'est pas solution.

Si $b \geqslant a^2$, et p est un nombre premier, on a $b.\nu_p(a) = a^2.\nu_p(b)$, donc $\nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)$.

Donc $a \mid b$. On pose $b = ac$, on a alors $a^{ac} = (ac)^{(a^2)}$, donc $a^{c-a} = c^a$. c^a est entier, donc $c-a \geqslant 0$. On a donc $a^{c-a} \geqslant (c-a)^a$, donc, comme précedemment, soit $(c-a) \leqslant 2$, soit $c - a \geqslant a$, donc $a \mid c$. Si $c - a = 0$, on retrouve la solution $(1, 1)$, et $c - a \in \{1, 2\}$ abouti à une absurdité.

On note donc $c = da$. On a alors $a^{a(d-1)} = (ad)^a$ soit $a^{d-2} = d$. Cela implique $d \leqslant 4$.

$d = 2$ donne $1 = 0$, ce qui est absurde.

$d = 3$ donne $a = 3$, on a alors $b = 27$, qui est bien solution.

$d = 4$ donne $a = 2$, on a alors $b = 16$, qui est bien solution.

Solution de l'exercice 4 Si $P(0) = 0$, pour tout p, $p \mid P(0)$.

Si $P(0) = 1$, on suppose par l'absurde que $E = p_0, p_1, \ldots, p_k$ est fini. On note alors $\Pi = \prod p_i$. Comme P est non constant, $P(\Pi X)$ non plus, donc il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $P(\Pi s)$ ne soit ni 1 ni -1. De plus, $P(\Pi s) \equiv 1[p_i]$ pour tout i. Soit q un diviseur premier de $P(\Pi s)$, $q \notin E$, d'où contradiction.

Sinon, on pose $a = P(0)$ et on s'intéresse au polynôme $\tilde{P}(X) = \frac{P(aX)}{a}$. $\tilde{P}$ est non constant, à coeficients entiers et tout diviseur de $\tilde{P}(n)$ est dans E, de plus, $\tilde{P}(0) = 1$.