DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : François LO JACOMO
STAGE : Montpellier 2012

Géométrie

- Énoncé des exercices vus en cours -

Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme, O un point intérieur tel que $\widehat{AOB}+\widehat{COD} = 180°$. Montrer que $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$.

Exercice 2 (problème 2 de l'Olympiade Internationale 1997)

L'angle $\widehat{A}$ est le plus petit dans un triangle ABC. Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit U un point intérieur à l'arc délimité par B et C qui ne contient pas A.

Les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ rencontrent la droite (AU) respectivement en V et W. Les droites (BV) et (CW) se coupent au point T. Montrer que $AU = TB + TC$.

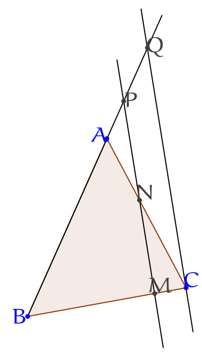
- Théorème de Ménélaüs -

Soit ABC un triangle, M, N, P trois points sur les côtés du triangle : $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$. M, N, P sont alignés si et seulement si : $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Remarquons d'abord que chacun des sommets du triangle doit apparaître une fois au numérateur et une fois au dénominateur. Comme M, B, C sont alignés, on peut faire le quotient des mesures algébriques, et ce quotient est indépendant du sens positif choisi sur la droite : $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} < 0$ si M est entre B et C, > 0 sinon.

La démonstration peut se faire à l'aide du théorème de Thalès. Supposons les trois points alignés, et menons par C une parallèle à cette droite, qui coupe

(AB) en Q. D'après Thalès, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}}$, et $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}$, donc : $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}} \times \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.



Pour prouver la réciproque, à savoir que si le produit vaut 1, les trois points sont alignés, supposons que le produit vaut 1 et considérons le point P', intersection de (MN) et (AB). D'après le théorème direct, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = 1$ et d'après l'hypothèse, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$. On en déduit que $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}}$, ce qui n'est possible que si $P = P'$, donc si M, N, P sont alignés, car la fonction qui à un point P de la droite (AB) associe $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ est monotone et bijective lorsque P parcourt la droite.

- Théorème de Céva -

L'énoncé du théorème de Céva ressemble au théorème de Ménélaüs, mais la démonstration est moins immédiate.

Soient M, N, P trois points des côtés $(BC), (CA), (AB)$ d'un triangle ABC. Les trois droites $(AM), (BN), (CP)$ sont concourantes si et seulement si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$.

Il s'agit du même produit que dans le théorème de Ménélaüs, chacun des points A, B, C apparaissant une fois au numérateur et une fois au dénominateur, mais ce produit est égal à -1 et non 1. Notamment, si les droites se coupent à l'intérieur du triangle, chacun des rapports $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}, \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}, \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ est négatif, car M est entre B et C, N entre C et A et P entre A et B.

La démonstration la plus naturelle de ce théorème utilise la notion de "barycentre". Rappelons que sur une droite (AB), un point P est barycentre de A et B affectés de coefficients α et β si et seulement si : $\alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$, ce qui équivaut à $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Les coefficients sont donc définis à proportionnalité près.

Dans le plan, Q est barycentre de A, B, C affectés de coefficients α, β, γ si et seulement si : $\alpha.\overrightarrow{QA} + \beta.\overrightarrow{QB} + \gamma.\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$. Tout point Q du plan peut être défini comme barycentre de A, B et C affectés de bons coefficients (de somme non nulle) - qu'on appelle coordonnées barycentriques de Q -, et trois coefficients (de somme non nulle) définissent le point Q de manière unique car pour un point quelconque fixé O du plan, $\overrightarrow{OQ} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{OC}$. L'étape importante, c'est la composition des barycentres : si P est barycentre de A et B affectés de coefficients α et β et Q barycentre de P et C affectés de coefficients λ et μ, Q est barycentre de A, B, C affectés de coefficients $\lambda\alpha, \lambda\beta, \mu(\alpha+\beta)$. Il en résulte notamment que si Q est barycentre de A, B, C affectés de coefficients α, β, γ et si les droites $(AQ), (BQ), (CQ)$ coupent respectivement $(BC), (CA), (AB)$ en M, N, P, M est barycentre de B, C affectés des coefficients β, γ, N de C, A affectés de γ, α et P de A, B affectés de α, β. Il est clair que ce résultat équivaut au théorème de Céva, dans le sens direct : soit Q de coordonnées barycentriques α, β, γ et M, N, P les intersections de $(AQ), (BQ), (CQ)$ avec $(BC), (CA), (AB)$ respectivement. Alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1$. Réciproquement, si pour M, N, P le produit vaut -1, appelons Q l'intersection de (AM) et (BN), et P' l'intersection de (CQ) et (AB). P' vérifie, d'après le théorème direct, la même relation que P. Donc $\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ ce qui entraîne que $P' = P$, soit en définitive que $(AM), (BN)$ et (CP) sont concourantes.

Exercice 3

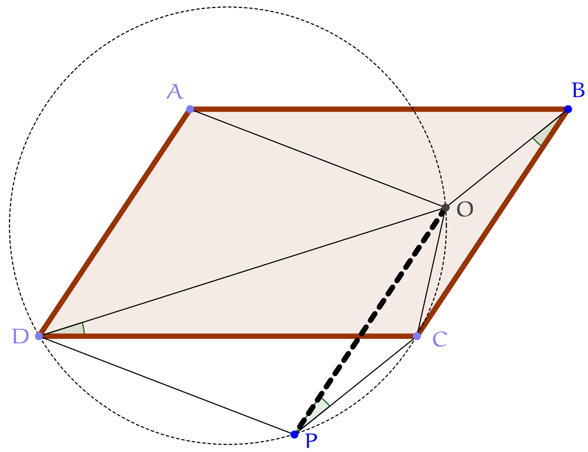
a) Soit ABC un triangle équilatéral, et M un point quelconque du plan. Montrer que $MA \leqslant MB + MC$. A quelle condition a-t-on l'égalité ?

b) Soit ABC un triangle quelconque, et M un point quelconque du plan. Montrer que $MA.BC \leqslant MB.CA + MC.AB$. A quelle condition a-t-on l'égalité ?

- Solution des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Pour bien utiliser la relation de l'énoncé, il faut y voir deux angles inscrits de part et d'autre de (CD). Mais pour ce faire, il faut translater le point O d'un vecteur $\overrightarrow{BC}$: considérons donc le point P tel que $OPCB$ soit un parallélogramme. Le triangle PDC est translaté, donc isométrique, du triangle OAB. Les angles $\widehat{DPC}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires, de part et d'autre de (CD), donc les quatre points C, D, O, P sont cocycliques. On en déduit que les angles inscrits $\widehat{ODC}$ et $\widehat{OPC}$ sont égaux. Or dans le parallélogramme $OPCD$, $\widehat{OPC} = \widehat{OBC}$, d'où le résultat.

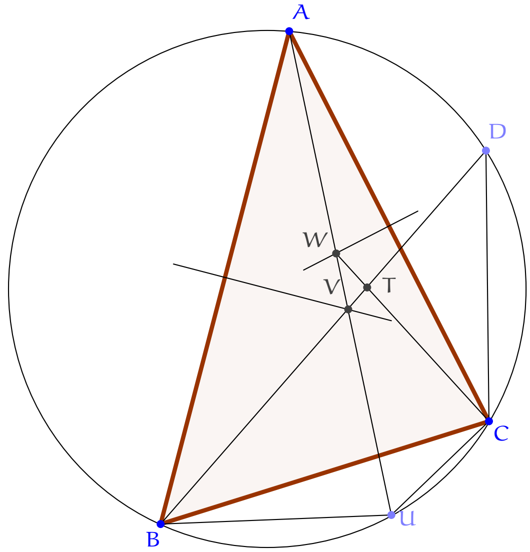


On notera qu'il est difficile de faire une figure juste en se basant sur la seule hypothèse, car peu de points O vérifient cette hypothèse. Mais on peut s'aider de la conclusion, donc tracer des angles $\widehat{ODC}$ et $\widehat{OBC}$ égaux pour construire une figure juste.

Solution de l'exercice 2

Comme dans beaucoup de problèmes, il faut faire apparaître sur la figure un élément supplémentaire, en l'occurrence un point, qui permette de mieux tirer profit de la relation $AU = TB + TC$. Il faudrait un point D sur (TB) tel que $TD = TC$ (T étant entre C et D) et $AD = AU$. Il se trouve que ce point D est sur le cercle circonscrit à ABC.

La droite (BT) recoupe le cercle en D. La symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$ transforme A en B, V en lui-même, donc (AU) en (BD), et elle transforme le cercle en lui-même car la médiatrice d'une corde $[AB]$ passe nécessairement par le centre du cercle. Donc elle transforme U en D, ce qui entraîne : $AU = BD$. Reste à prouver que $TD = TC$. L'angle inscrit $\widehat{BDC}$ $= \widehat{BAC}$. Or W étant sur la médiatrice de $[AC]$, le triangle WAC est isocèle : $\widehat{TCA} = \widehat{WAC}$. Et $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{BAV}$ car le triangle VAB est lui aussi isocèle. Donc en additionnant, $\widehat{TCD} = \widehat{BAC} = \widehat{TDC}$: le triangle TCD est isocèle, ce qui entraîne $TD = TC$. D'où $TB + TC = BD = AU$.



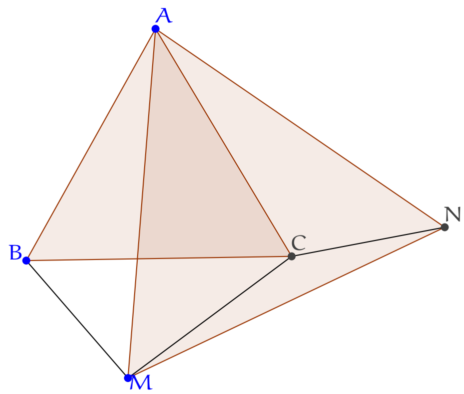
On pouvait s'en sortir sans faire apparaître ce point D, en étudiant soigneusement les angles et les côtés du triangle TBC. Appelons ϕ l'angle $\widehat{ABU}$, donc $\pi - \phi$ l'angle $\widehat{ACU}$, et α l'angle $\widehat{BAC}$. $\widehat{ABV} = \widehat{BAV}$ et $\widehat{UBC} = \widehat{UAC}$, donc $\widehat{TBC} = \phi - \alpha$. De même, $\widehat{WCA} = \widehat{WAC}$, $\widehat{UCB} = \widehat{UAB}$ donc $\widehat{TCB} = \pi - \phi - \alpha$. Il en résulte que $\widehat{BTC} = 2\alpha$. D'où $\frac{TB}{\sin(\pi-\phi-\alpha)} = \frac{TC}{\sin(\phi-\alpha)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$ car si l'on appelle R le rayon du cercle circonscrit, dans le triangle ABC, $BC = 2R\sin\alpha$. D'où :

$$TB + TC = \frac{R}{\cos\alpha}\left(\sin(\phi+\alpha) + \sin(\phi-\alpha)\right) = 2R\sin\phi$$

ce qui est bien égal à AU.

Solution de l'exercice 3

Dans le cas du triangle équilatéral : la rotation de centre A et d'angle 60° qui envoie B en C envoie M en un point N tel que le triangle AMN soit équilatéral. On a donc $MB = NC$ et $AM = NM$: l'inégalité à démontrer équivaut donc à l'inégalité triangulaire $NM \leqslant NC + CM$. Il y a égalité lorsque M, N, C sont alignés (C entre M et N), donc lorsque l'angle $\widehat{ACM}$ et l'angle $\widehat{ACN} = \widehat{ABM}$ sont supplémentaires, ce qui équivaut à : A, B, M, C sur un même cercle, avec B et C de part et d'autre de (AM), donc M appartient au cercle circonscrit à ABC, et plus précisément à l'arc BC ne contenant pas le point A.



Dans le cas du triangle quelconque, la démonstration est similaire. Ce n'est plus une rotation de centre A qui transforme B en C, mais une similitude, composée d'une rotation et d'une homothétie. Soit N le transformé de M par cette similitude. L'important est que les triangles ABM et ACN sont semblables, donc $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$, et les triangles ABC et AMN sont eux aussi semblables, donc $\frac{MA}{MN} = \frac{AB}{BC}$. L'inégalité triangulaire $NM \leqslant NC + CM$ s'écrit donc : $\frac{MA.BC}{AB} \leqslant \frac{MB.AC}{AB} + MC$, ce qui équivaut à la relation de l'énoncé. Une fois encore, l'égalité a lieu lorsque les points sont alignés dans le bon ordre, donc $\widehat{ACM}$ et $\widehat{ACN} = \widehat{ABM}$ supplémentaires, c'est-à-dire lorsque M est sur le cercle circonscrit à ABC, plus précisément sur l'arc BC ne contenant pas le point A. C'est le théorème de Ptolémée : dans un quadrilatère convexe inscriptible, la produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.