DOMAINE : Algèbre — AUTEUR : Matthieu LEQUESNE et Roxane MOREL
NIVEAU : Débutants — STAGE : Montpellier 2013
CONTENU : Cours et exercices

Algèbre, coefficients binomiaux

- Introduction -

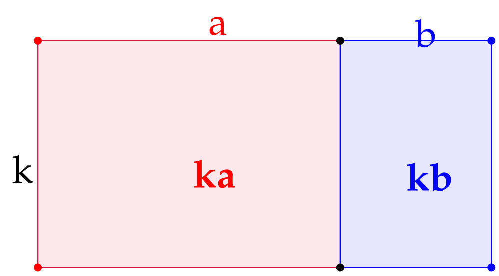
Le mot *algèbre* vient de l'arabe *al-djabr* qui signifie "restauration" au sens de "la réunion de ce qui a été cassé". Ce mot est apparu pour la première fois dans l'ouvrage *Ilm al djabr w'al muqàbalah* en 830 par un astronome arabe, Al-Khwarizmi (v. 780 - v. 850). La restauration (*al djabr*) et la confrontation (*al muqàbalah*) dont il s'agit sont des "rééquilibrages" des deux membres d'une équation, comme pour une balance.

Ce cours portera donc sur les façons de modifier des expressions littérales, en utilisant développement, factorisation et identités remarquables.

On notera $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

- Développement / factorisation -

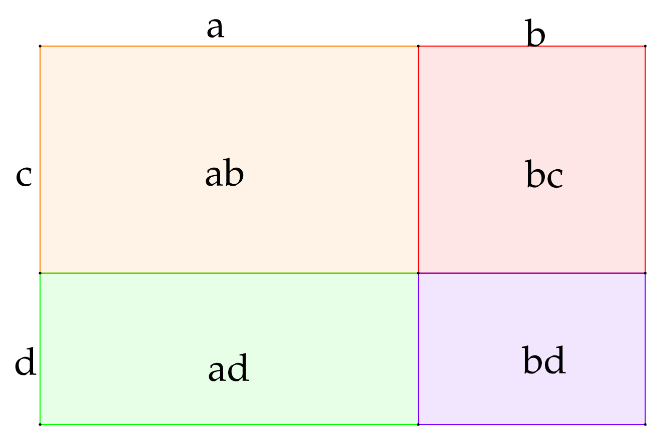
Proposition 1 (La factorisation simple). $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$



Démonstration.

□

Proposition 2 (La factorisation du rectangle). $(a+b)\times(c+d) = ac+ad+bc+bd$



Démonstration.

□

Exercice 1 Touver toutes les solutions de l'équation $ab - a - b = 1$ avec $a > b > 0$ entiers.

Solution de l'exercice 1 On factorise avec $(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1$ qui donne $(a-1)(b-1) = 2$ d'où l'unique solution $(3, 2)$.

Exercice 2 Trouver les solutions entières de $a^2b^2 = a^2 + b^2$.

Solution de l'exercice 2 Toujours avec la factorisation du rectangle, l'équation devient

$$(a^2-1)(b^2-1) = 1.$$

Or 2 n'est pas un carré, la seule solution est donc $(0, 0)$.

Exercice 3 Soient a et b deux nombres vérifiant

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1.$$

Montrer que $a^3 + b^3 = a + b$.

Solution de l'exercice 3 On met sur le même dénominateur, ce qui donne $a(1+a)+b(1+b) = (1+a)(1+b)$ donc en simplifiant $a^2+b^2 = 1+ab$. En multipliant par $(a+b)$ de chaque côté on obtient l'égalité voulue.

Exercice 4 Trouver k tel que $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) + k\,abc$.

Solution de l'exercice 4 Il suffit de développer les deux membres : $(a+b)(b+c)(c+a) = (ab+ac+b^2+bc)(c+a) = a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc$, $(a+b+c)(ab+bc+ca)+kabc = a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+3abc+kabc$ donc $k = -1$.

- Identités remarquables de degré 2 -

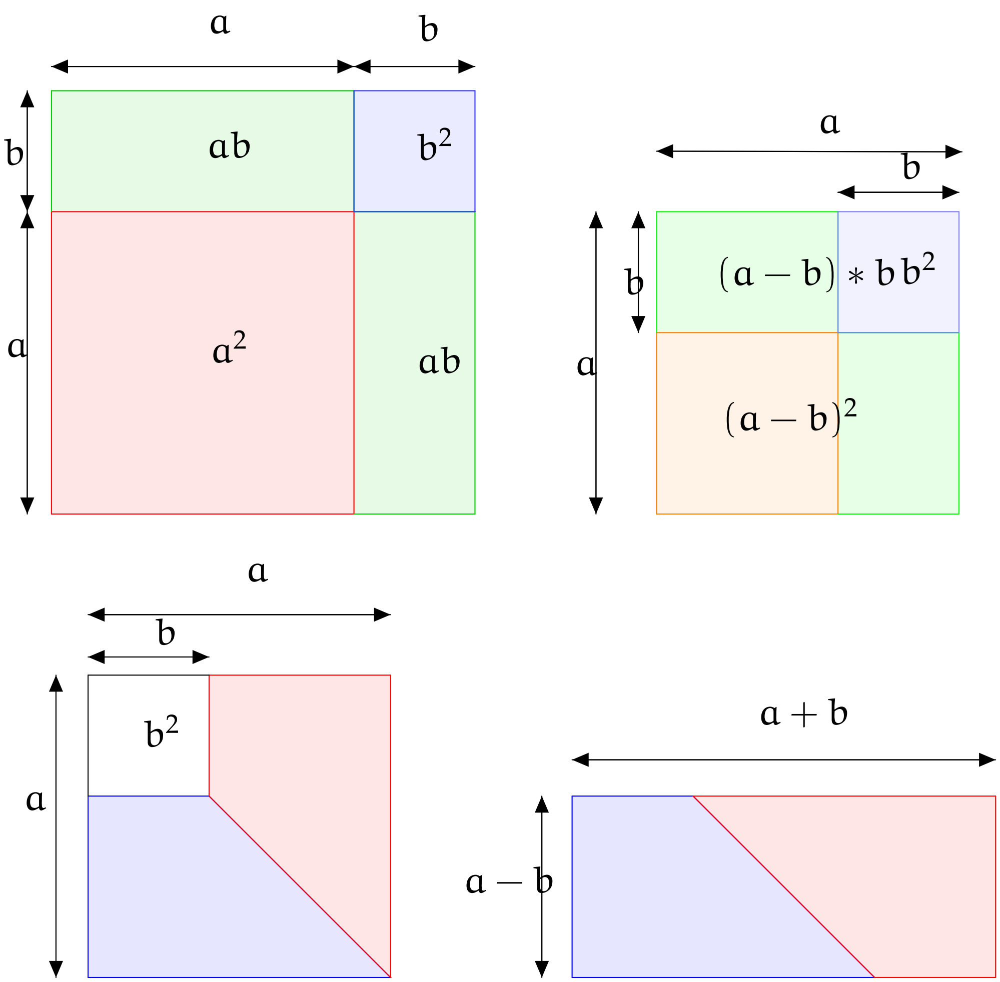
Proposition 3 (Identités remarquables de degré 2)**.**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Démonstration.



□

Exercice 5 Trouver k tel que $4n^2 + kn + 9$ soit un carré pour tout n.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> $(2n+3)^2 = 2n^2 + 6n + 9$, $(2n-3)^2 = 2n^2 - 6n + 9$ donc k peut valoir -12 ou 12.

Exercice 6 Calculer (sans calculatrice) $1001^2 - 999^2$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> $1001^2 - 999^2 = (1001 + 999) * (1001 - 999) = 2 * 2000 = 4000$.

Exercice 7 Soient a et b deux nombres positifs tels que $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} = 1$. Montrer que $\dfrac{a}{1+b^2} - \dfrac{b}{1+a^2} = a - b$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> L'égalité donne $ab = 1$. Alors, en multipliant le numérateur et dénominateur de $\frac{a}{1+b^2}$ par a, et en simplifiant, on a $\frac{a}{1+b^2} = \frac{a^2}{a+b}$ et de même en multipliant le numérateur et dénominateur de $\frac{b}{1+a^2}$ par b, et en simplifiant, on a $\frac{b}{1+a^2} = \frac{b^2}{a+b}$. D'où $\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = a - b$.

Exercice 8 Montrer que $n^4 + 4$ n'est jamais un nombre premier (pour $n \geqslant 2$).

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> $n^4+4 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2+2+2n)(n^2+2-2n)$

- Identités remarquables de degré 3 -

Proposition 4 (Identités remarquables de degré 3)**.**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercice 9 Soient a et b deux réels. On pose $s = a + b$ et $p = ab$. Exprimer $a^3 + b^3$ en fonction de s et p.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ donc $a^3 + b^3 = s^3 - 3sp$.

- Degré n -

On cherche à généraliser les résultats précédents pour un degré n quelconque.

Remarque 5 ($a^n - b^n$)**.** On a vu :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

En calculant $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, on peut intuiter la généralisation :

Proposition 6. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Démonstration. On développe le membre de droite et on obtient :

$$\begin{aligned}
&a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n \\
&= a^n + a^{n-2}b + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n \\
&\vdots \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

□

Remarque 7 ($(a+b)^n$)**.** On a :

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

On voit apparaître des coefficients qui sont symétriques. De plus tous les termes sont homogènes. Cherchons comment obtenir ces coefficients.

Examinons de plus près le cas $n = 4$. Écrivons $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$. Un terme du développement s'obtient en sélectionnant dans chacune des parenthèses soit "a" soit "b".

- Par exemple, "a^4" s'obtient en sélectionnant à chaque fois "a".
- Mais si on veut obtenir "ab^3", il faut choisir un "a" puis sélectionner "b" dans les autres parenthèses. On a quatre possibilités pour choisir le "a" : le coefficient devant "ab^3" est donc 4.
- De même, pour obtenir "a^2b^2", il faut choisir deux "a" et sélectionner "b" dans les deux autres parenthèses. En explicitant à la main les différentes configurations, on trouve qu'il y a six façons de choisir deux "a" parmi les quatre : le coefficient devant "a^2b^2" est 6.

Pour pouvoir généraliser, il va donc falloir calculer le nombre de façons de choisir k "a" parmi n, d'où la nécessité d'introduire les bases de la combinatoire.

- Combinatoire : apprendre à compter -

Exercice 10 Combien existe-t-il de mots de 5 lettres ?

Solution de l'exercice 10 Il y a 26 lettres dans l'alphabet, donc 26 choix possibles pour la première lettre du mot, puis 26 pour la seconde, etc... D'où 26^5 mots différents.

Proposition 8. Soit A un ensemble à n éléments. Il existe n^k combinaisons de k éléments de A ordonnés.

Définition 9. On définit la factorielle d'un entier naturel n, notée $n!$ (lire "factorielle n"), comme le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n.

En d'autres termes : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$.

Exercice 11 Combien existe-t-il de nombres formés avec les chiffres de 1 à 4, dont tous les chiffres sont différents.

Solution de l'exercice 11 On distingue les nombres à 1, 2, 3 ou 4 chiffres. S'il y a 1 seul chiffre, on a 4 possibilités. S'il y en a deux, on a 4 possibilités pour le premier chiffre et 3 pour le deuxième puisque les chiffres doivent être différents, donc 12 possibilités au total. De même s'il y a trois chiffres, on a $4 \times 3 \times 2$ possibilités et $4!$ s'il y en a quatre.

Finalement il y a $4 + 12 + 24 + 24 = 64$ nombres.

Proposition 10. Il existe $n!$ façon d'ordonner n éléments différents.

Démonstration. On choisit tout d'abord l'objet qui sera placé au rang 1, ensuite celui qui sera au rang 2, etc... Lorsque l'on choisit celui qui aura le rang 1, on dispose de n objets : on a donc n choix. Au rang 2, il nous reste $n-1$ objets donc $n-1$ choix et ainsi de suite jusqu'au rang n où il ne nous reste plus qu'un seul objet, donc un seul choix. Ainsi, le nombre de possibilités est $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$ □

Proposition 11 (Arrangements)**.** Il existe $\frac{n!}{(n-k)!}$ façon de choisir k éléments ordonnés parmi n.

Démonstration. On dispose de n objets et on les choisit un par un jusqu'à en avoir k. De façon similaire à la démonstration précédente : on a n choix pour le premier objet, $n-1$ pour le deuxième et lorsqu'on veut choisir le k^e, il reste $n-k+1$ objets donc $n-k+1$ choix. Ainsi le nombre de possibilités est $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. □

Exercice 12 Quelle est la probabilité que deux stagiaires soient nés le même jour (pas nécessairement la même année) ? Rappel : Il y a 62 stagiaires.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> On va déterminer la probabilité du contraire, donc la probabilité qu'on ne puisse trouver deux personnes nées le même jour. Dans ce cas, on doit choisir 62 jours différents parmi les 365 du calendrier, avec ordre puisque deux stagiaires ne sont pas interchangeables : c'est un arrangement. Il y a donc $\frac{365!}{(365-62)!}$ cas dans lesquel on ne peut trouver deux stagiaires étant nés le même jour. Le nombre de possibilités total est de 365^{62}. Ainsi la probabilité que deux stagiaires soient nés le même jour est de $1 - \frac{1}{365^{62}} \times \frac{365!}{(365-62)!} = 99.59095749\%$.

Proposition 12. Il existe $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ façon de choisir k éléments parmi n sans tenir compte de l'ordre. On note $\binom{n}{k}$ cette quantité.

Démonstration. On sait qu'il y a $k!$ façon d'ordonner les k éléments choisis. Donc lorsqu'on compte le nombre de façons de choisir k éléments parmi n avec ordre, on en compte $k!$ fois trop. Ainsi il faut diviser $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ par $k!$ et on obtient bien $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

Proposition 13 (Binôme de Newton)**.**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Exercice 13

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = ?$$

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> On reconnaît un binôme de Newton pour lequel $a = 1$ et $b = 1$. La réponse est donc 2^n.

Exercice 14

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = ?$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Comme pour l'exercice précédent, il s'agit de reconnaître un binôme de Newton mais cette fois avec $a = 1$ et $b = -1$. On trouve donc $(1-1)^n = 0$.

Corollaire 14.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Proposition 15 (Formule de Pascal)**.**
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration. On veut choisir k éléments parmi n. On isole un élément. Soit cet élément fait partie des choisis, soit il n'en fait pas partie. Dans le premier cas, il faut encore choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants, dans le deuxième cas, on doit choisir k éléments parmi les $n-1$restants. Ainsi
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$
□

Corollaire 16. Pour trouver la valeur de $\binom{n}{k}$ pour des petits n on écrit le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Il suffit d'écrire des "1" sur les côtés du triangle, puis chaque nombre est égal à la somme des deux nombres au dessus, d'après la proposition précédents. On trouve ainsi facilement les valeurs des coefficients binomiaux.