DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Grésillon 2011

Stratégies de base : exercices

Exercice 1 (Coefficients binomiaux) Pour tout $k \leqslant n \in \mathbb{N}$ définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ de façon récurrente :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ pour tous } k < n$$

1. Montrer que
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
2. Montrer que
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
3. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

Exercice 2 (La suite de Fibonacci) La célèbre suite de Fibonacci est définie comme suit :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Soient φ et φ' les deux racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$F_n = \lambda \cdot \varphi^n + \mu \cdot \varphi'^n$$

Pouvez-vous généraliser le résultat à toutes les suites de type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$?

2. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

3. Montrer les formules suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

$$m|n \Rightarrow F_m|F_n$$

Exercice 3 (Tetraminos) Un tetramino est une figure constituée de 4 cases (pensez Tetris). Trouver les n tetraminos différents (on peut les pivoter mais pas les retourner). Peut-on paver une rectangle $4 \times n$ avec un exemplaire de chaque ?

Exercice 4 Soient $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ des entiers. Montrer qu'on peut trouver 11 nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_{11}$ à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$ non tous nuls tels que $\sum \lambda_i a_i$ soit divisible par 2011.

Exercice 5 On colorie tous les sommets d'un polygone à $2n+1$ côtés de sorte que deux sommets voisins ne soient jamais de la même couleur. Montrer qu'il est possible de diviser le polygones en triangles à l'aide de diagonales dont les extrémités sont de couleurs différentes et qui ne se croisent pas.

Exercice 6 On considère un cube $ABCDEFGH$ et on assigne à chaque sommet un entier naturel. À chaque tour on choisit une arête et on augmente de 1 les entiers aux deux extrémités. Si on part de la configuration où A et C sont à 1 et tous les autres à 0, montrer qu'on ne pourra jamais atteindre une configuration ou tous les sommets ont la même valeur.

Exercice 7 On considère 5 réels. Montrer que parmi eux on peut en trouver 2 a et b tels que

$$0 \leqslant \frac{a-b}{1+ab} \leqslant 1$$

- Correction -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> 1. Montrons par récurrence sur n que, pour tout entier $k < n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour $n = 0$, c'est vrai car

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}.$$

Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$. Si $k = 0$ ou $k = n+1$, c'est vrai, car par exemple pour $k = 0$ on a

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}.$$

Supposons donc k non nul. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} && \text{par définition} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right] \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!},
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

2. Montrons ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons le au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1},
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k} \\
&= 2 + \sum_{i=1}^{2n-2}\binom{2n-1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{i} \\
&= 2^{2n-1} \qquad \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> 1. Montrons par récurrence forte sur n que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^n$. On vérifie que c'est vrai pour n valant 0 ou 1. Supposons la propriété

vraie pour tout entier inférieur à n, et montrons-la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^{n-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n-1}(\varphi+1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^{n-1}(\varphi'+1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi'^{n+1}. \end{aligned}$$

La dernière étape de calcul vient du fait que φ et φ' sont racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On peut généraliser ce résultat : supposons que l'équation $x^2 - ax - b$ a deux racines ψ et ψ'. Alors u_n sera de la forme $u_n = \alpha\psi^n + \beta\psi'^n$, où α et β sont deux réels choisis tels que $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha\psi + \beta\psi'$.

2. En appliquant le résultat précédent, et en factorisant par $\varphi^{n+1}/\sqrt{5}$ au numérateur et par $\varphi^n/\sqrt{5}$ au dénominateur, on trouve que pour tout n on a

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \frac{1 + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n}.$$

Comme φ'/φ est strictement compris entre 0 et 1, on a bien la convergence recherchée.

3. a) On montre le résultat par récurrence sur n. Il est clairement vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai au rang n. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2$. Par hypothèse de récurrence, cette quantité est égale à $F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2$, et on conclut facilement.

b) On montre par récurrence forte sur n le résultat suivant :

– si n est pair, on écrit $n = 2k$, et alors $F_n = F_k^2 + 2F_{k-1}F_k$,

– si n est impair, on écrit $n = 2k-1$, et alors $F_n = F_k^2 + F_{k+1}^2$.

c) Soit m un entier. On montre par récurrence forte sur n la formule suivante :

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n.$$

Cette formule nous permet ensuite de montrer par récurrence sur k que F_m divise F_{km} (on applique la formule avec $n = (k-1)m$).

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On colorie notre rectangle en blanc et en noir, comme dans un échiquier. On essaie de placer chacun des 7 tetraminos dessus. On remarque que toutes les pièces colorient autant de cases blanches que de cases

noires, sauf le tétramino en T qui colorie trois cases d'une couleur et une seule de l'autre. Ainsi, tout placement des 7 tetraminos recouvrera un nombre différent de cases blanches et de cases noires. Comme le rectangle comporte autant de cases blanches que de cases noires, il ne peut pas être recouvert complètement par les tetraminos.

Solution de l'exercice 4 Il y a 3^{10} possibilités pour choisir les λ_i, ce qui est supérieur à 2011. Par principe des tiroirs, il y a deux possibilités telles que $\sum_{i=1}^{10} \lambda_i a_i$ ait le même reste modulo 2011, appelons les $(\lambda_1, \dots, \lambda_{10})$ et $(\lambda_1', \dots, \lambda_{10}')$. On peut supposer que pour tout i, soit λ_i est différent de λ_i', soit $\lambda_i = \lambda_i' = 0$ (en effet, si on a $\lambda_i = \lambda_i'$, on peut les remplacer tous les deux par 0 sans changer l'égalité des sommes modulo 2011). Ainsi, la famille $(\lambda_1 - \lambda_1', \dots, \lambda_{10} - \lambda_{10}')$ a tous ses termes dans $\{-1, 0, 1\}$, et convient donc.

Solution de l'exercice 5 Le cas $n = 1$ est trivial. Maintenant essayons de montrer le cas général par récurrence.

Une première idée est de chercher une "petite" diagonale (deux sommets séparés par un seul sommet intermédiaire) dont les sommets sont de couleurs différentes et de considérer le polygone restant. Le problème est que le polygone restant a un nombre pair de côtés et on ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence. La solution est de chercher *deux* petites diagonales dont les extrémités sont de couleurs différentes et qui ne se croisent pas. Je laisse au lecteur le soin de montrer l'existence de deux telles diagonales et de rédiger la fin de la récurrence.

Solution de l'exercice 6 On sépare les sommets du cube en deux ensembles tels que deux éléments du même ensemble ne soient jamais reliés par une arête : on partage entre $E_1 = (A, C, F, H)$ et $E_2 = (B, D, E, G)$. Appelons S_1 (resp. S_2) la somme des entiers écrits sur les sommets de E_1 (resp. E_2). À chaque étape, on augmente de 1 les deux sommes S_1 et S_2. Ainsi, la quantité $S_1 - S_2$ est invariante. Elle vaut deux au début, donc elle ne s'annule jamais, donc on ne peux jamais atteindre une configuration où tous les sommets on la même valeur (cette configuration annule $S_1 - S_2$).

Solution de l'exercice 7 On reconnaît la formule d'addition des tangentes :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

On écrit nos 5 réels $(r_1, \dots, r_5)$ sous la forme $(\tan \alpha_1, \dots, \tan \alpha_5)$, où les α_i sont choisis entre $0°$ et $180°$. On découpe cet intervalle en quatre boîtes de taille

45°, et par principe des tiroirs il y a deux α_i dans un de ces intervalles. Mais alors on a trouvé i et j tels que $\alpha_i - \alpha_j$ soit compris entre 0° et 45°. Ainsi, $\frac{r_i - r_j}{1 + r_i r_j} = \tan(\alpha_i - \alpha_j)$ est compris entre 0 et 1.