DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2013

Produit scalaire, géométrie du triangle

Si ABC est un triangle, on note $a = BC, b = AC, c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}, \widehat{B} = \widehat{ABC}, \widehat{C} = \widehat{ACB}$. On note S l'aire de ABC, H son orthocentre, G son centre de gravité, I le centre de son cercle inscrit, O le centre de son cercle circonscrit et R le rayon de son dernier.

- Mini-cours sur le produit scalaire -

Rappels sur les vecteurs Un vecteur du plan $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur. On note $\overrightarrow{0}$ le vecteur nul. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\|u\|$, est la longueur de $\overrightarrow{u}$. Deux points A et B du plan définissent un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Si O est un point fixé du plan, à un vecteur $\overrightarrow{u}$ on peut associer de manière unique un point, noté $P_{\overrightarrow{u}}$, tel que $\overrightarrow{OP_{\overrightarrow{u}}} = \overrightarrow{u}$.

Si $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère (pas forcément orthogonal ni orthonormal) du plan, on dit que $\binom{x}{y}$ (ou indifféremment (x, y)) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ si $\binom{x}{y}$ sont les coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du point $P_{\overrightarrow{u}}$. On note alors $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$.

Si $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$ sont deux vecteurs, on note $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $\binom{x+x'}{y+y'}$, et pour tout réel λ on note $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$ (ou indifféremment $\lambda\overrightarrow{u}$) le vecteur de coordonnées $\binom{\lambda x}{\lambda y}$.

Pour tous points A, B du plan, on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et pour tous points A, B, C du plan on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles).

Définition du produit scalaire et premières propriétés À partir de maintenant, on travaille dans un repère **orthonormal** $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 1. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Voici quelques conséquences immédiaites de cette définition :

Proposition 2. (i) Pour tout nombre réel λ, $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Pour cette raison, on note ce nombre $\lambda\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(ii) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

(iii) Pour tout vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$. On écrit souvent $\vec{u}^2$ pour désigner ce nombre.

(iv) Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Par contre, la réciproque est fausse (par exemple si $\vec{u}\binom{1}{0}$ et $\vec{u}\binom{0}{1}$).

(v) Si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \left\|v\right\|^2$.

On utilisera très souvent la propriété (iii) pour écrire $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et utiliser ensuite le calcul vectoriel. Donnons maintenant différentes expressions du produit scalaire.

Théorème 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$.

(ii) Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ son non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Une conséquence importante de l'assertion (i) est que le produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

Démonstration. Pour (i), écrivons

$$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

Le résultat en découle.

Pour (ii), plaçons-nous dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}$ (on a vu que (i) implique que le produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée choisie). Alors, en notant $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$, on a $\vec{u}\binom{\left\|\vec{u}\right\|}{0}$ et $\vec{v}\binom{\left\|\vec{v}\right\|\cos(\alpha)}{\left\|\vec{v}\right\|\sin(\alpha)}$. Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos(\alpha)$, d'où le résultat. $\square$

On prouve de même que

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2, \qquad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$$

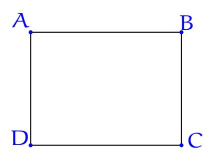
L'intérêt du Théorème 3 est d'exprimer la produit scalaire de manière "géométrique", c'est-à-dire sans faire intervenir les coordonnées. Un corollaire crucial est le suivant.

Théorème 4. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration. D'après le théorème de Pythagore, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. D'après le Théorème 3, ceci est équivalent au fait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. □

Ainsi, l'utilisation du produit scalaire est particulièrement adaptée lorsque nous sommes en présence de droites orthogonales (mais pas que !), comme l'illusteront les applications qui suivent.

Exemple 5. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $BC = 3$. Calculons $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

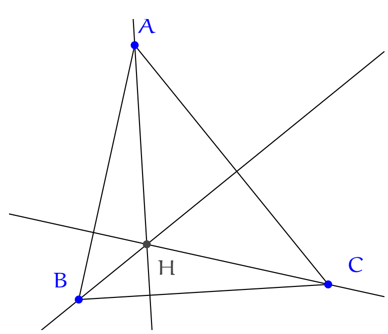


On a

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2 = 7.$$

On aurait également pu passer en coordonnées.

Exemple 6. Montrons que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en utilisant le produit scalaire. Soit H l'intersection des hauteurs issues de B et de C.



Nous allons montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Pour cela, on écrit :

$$0 = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

De même,

$$0 = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Or $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$. D'où $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$, et donc

$$\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0},$$

ce qui conclut.

Comme dans les exemples précédents, il est parfois utile de décomposer des vecteurs suivant des directions orthogonales pour calculer des produits scalaires.

Exercice 1 Soient $n \geqslant 3$ un entier et $A_1 A_2 \cdots A_n$ un polygône régulier inscrit dans un cercle Γ de centre O et de rayon R. Soit M un point de Γ. Prouver que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i M^2 = 2nR^2.$$

Concluons par une propriété très utile :

Proposition 7. Soient A, B, C, D des points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si, $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 \\ &= 2AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

On trouvera une jolie utilisation de ce résultat à l'Exemple 21.

Applications du produit scalaire Nous donnons ici quelques applications. On rappelle sans preuve la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}.$$

Formule d'Al-Kashi

Proposition 8 (Formule d'Al-Kashi)**.** Soit ABC un triangle. On a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Démonstration. On écrit :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} \begin{aligned}[t] &= AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

□

Identité du parallélogramme

Proposition 9 (Identité du parallélogramme)**.** Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Démonstration. En prenant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$, ceci provient du fait que

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = 2(\overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2).$$

□

Formule de la médiane

Proposition 10 (Formules de la médiane)**.** Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$(i)\quad AC^2+BC^2 = 2IC^2+\frac{1}{2}AB^2,\quad (ii)\quad AC^2-BC^2 = 2\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BA},\quad (iii)\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CI^2-\frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration. Pour (i), on écrit

$$AC^2+BC^2 = \overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})^2+(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC})^2 = 2IC^2+2(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI})\cdot\overrightarrow{IC}+AI^2+BI^2.$$

Comme $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$ et $AI^2 + BI^2 = AB^2/2$, le résultat en découle.

Les preuves des autres assertions sont similaires et sont laissées en exercice.

□

Géométrie analytique

Le produit scalaire est également utile en géométrie analytique pour calculer les coordonnées de divers points lorsque de l'orthogonalité est mise en jeu :

(i) Soient A, B, C trois points différents du plan. Comment trouver l'équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par (C) ? Un point M appartient à cette droite si, et seulement si, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Ainsi, si $A\binom{x_A}{y_A}$, $B\binom{x_B}{y_B}$ et $C\binom{x_C}{y_C}$, l'équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C est caractérisée par l'équation

$$(x - x_C)(x_B - x_A) + (y - y_C)(y_B - y_A) = 0.$$

(ii) Deux droites de coefficients directeurs respectifs k et k' sont perpendiculaires si, et seulement si, $kk' = -1$. On rappelle que le coefficient directeur d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $(-b, a)$. Ainsi, un vecteur orthogonal à cette droite (on dit aussi vecteur normal) est (a, b).

Relations trigonométriques

Rappelons sans preuve les relations suivantes (qu'on vérifie aisément grâce à un cercle trigonométrique). On a $\cos(-x) = \cos(x), \sin(-x) = -\sin(x)$,

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x),$$

ainsi que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

On rappelle également que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Les relations suivantes sont cruciales et absolument à connaître.

Théorème 11 (Formules d'addition trigonométriques)**.** (i) On a

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

(ii) On a

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b), \quad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

(iii) On a

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Démonstration. Pour (i), introduisons les points U et V de coordonnées $U\binom{\cos(a)}{\sin(a)}$ et $V\binom{\cos b}{\sin(b)}$. Ainsi, $b - a$ est l'angle (modulo 2π) orienté $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$. Comme

$\mathrm{OU} = \mathrm{OV} = 1$, en calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OU} \cdot \overrightarrow{OV}$, on obtient :

$$\cos(a-b) = \overrightarrow{OU} \cdot \overrightarrow{OV} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

La seconde relation s'en déduit en prenant $-b$ à la place de b.

Pour (ii), il suffit d'écrire que $\sin(a+b) = \cos(\pi/2 - a - b)$ et d'utiliser (i).

Finalement, (iii) est une conséquence de (i) et (ii), laissée en exercice. □

En particulier, noter que

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a), \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

et que

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Ces dernières formules s'appellent les *formules de duplication*. Noter aussi que le théorème 11 implique que

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{\,}\right.$$

et que

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad \sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right.$$

Exercice 2 Soit ABC un triangle.

(i) Prouver que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 - c^2/2$.

(ii) Prouver que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

(iii) Prouver que $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

- Puissance d'un point par rapport à un cercle -

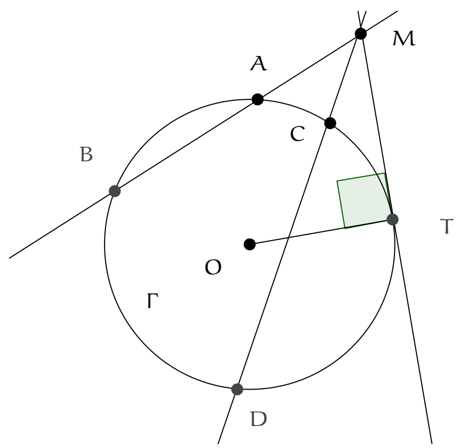
Si A, B, C sont trois points alignés, on rappelle que $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, produit algébrique des longeurs AB et AC, est égal par définition à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Définition et premières propriétés

Définition 12 (et propriété)**.** Soit Γ un cercle de centre O de rayon R. Soit M un point quelconque du plan. Si deux droites passant par M coupent Γ respectivement en A, B et C, D alors

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}.$$

Ce réel est aussi égal à $OM^2 - R^2$ et est appelé puissance du point M par rapport au cercle Γ et est noté $P_\Gamma(M)$.



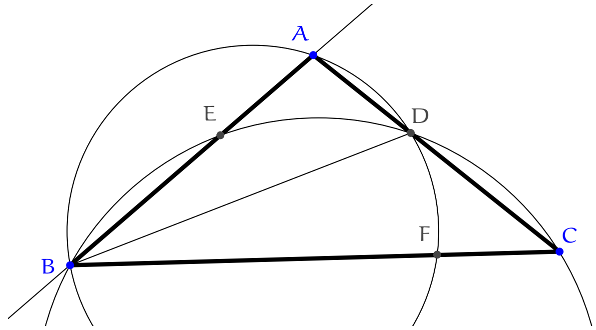
Démonstration. Soit A' le point diamétralement opposé à A sur Γ, de sorte que $\widehat{MBA'} = \pi/2$ et $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO}$. Alors

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = OM^2 - R^2.$$

On montre exactement de la même manière que $\overline{MC} \cdot \overline{MD} = OM^2 - R^2$. □

Remarque 13. $P_\Gamma(M) = 0$ si, et seulement si, $M \in \Gamma$ et $P_\Gamma(M) > 0$ si, et seulement si, M est à l'exterieur de Γ. Par ailleurs, si M est à l'extérieur de Γ et T est le point de contact avec Γ d'une tangente à Γ issue de M, alors $P_\Gamma(M) = MT^2$.

Exemple 14 (Olympiade de Saint-Pétersbourg 1996)**.** À titre d'exemple, résolvons le problème suivant. Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de $\widehat{B}$. On note E le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle de BDC avec (AB) et F le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle ABD avec (BC). Montrons que $AE = CF$.



En calculant de deux manières possibles les puissances, on a

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC, \qquad CB \cdot CF = CD \cdot CA.$$

On en déduit que

$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD \cdot CB}{AB \cdot CD}.$$

Or $AD/CD = AB/CB$ car (BD) est la bissectrice de $\widehat{B}$.

Réciproquement, les assertions suivantes sont vérifiées (leur preuve est laissée en exercice).

Proposition 15. (i) Soient A, B, C, D des points distincts non alignés. Si (AB) et (CD) sont sécantes en un point M tel que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ alors les points A, B, C, D sont cocycliques.

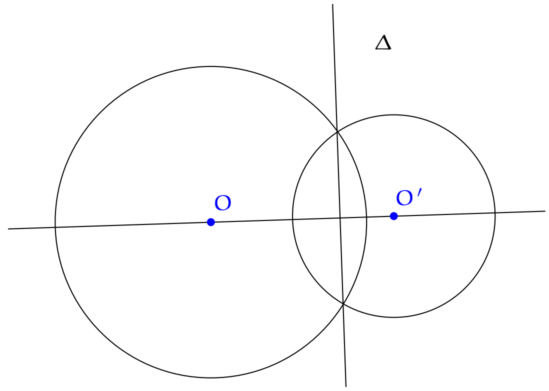
(ii) Soit ABT un triangle. Si un point M de la droite (AB) vérifie $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MT^2$, alors (MT) est tangente au cercle Γ circonscrit au triangle ABT.

Axe radical

Définition 16 (et propriété)**.** Soient Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs O et O' distincts, de rayons respectifs R et R'. Alors l'ensemble des points M qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite Δ perpendiculaire à (OO'). Par ailleurs, le point d'intersection P des droites Δ et (OO') vérifie

$$2\overline{OO'} \cdot \overline{\omega P} = R^2 - R'^2,$$

où ω est le milieu de $[OO']$. La droite Δ est appelée axe radical des deux cercles Γ et Γ'.



Démonstration. L'égalité $P_\Gamma(M) = P_{\Gamma'}(M)$ est équivalente à $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$. Or

$$MO^2 - MO'^2 = (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) = \overrightarrow{O'O} \cdot (2\overrightarrow{M\omega} + \overrightarrow{\omega O'} + \overrightarrow{\omega O}) = 2\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{M\omega}.$$

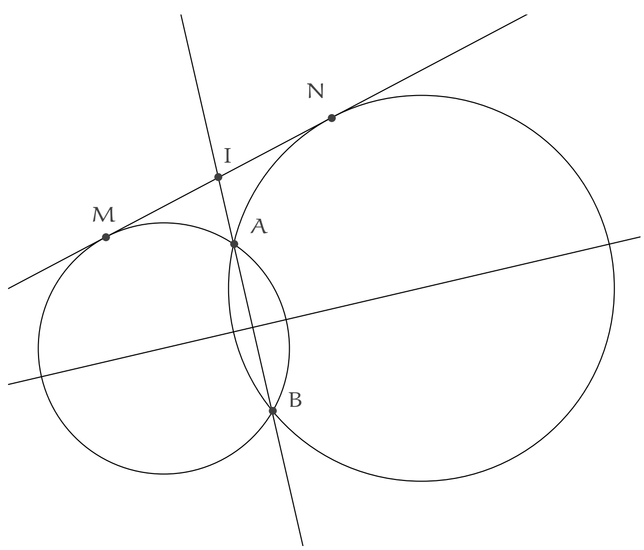
Ainsi, l'ensemble des points M tels que $P_\Gamma(M) = P_{\Gamma'}(M)$ est l'ensemble des points M tels que

$$2\overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{M\omega} = R^2 - R'^2.$$

Le résultat en découle. □

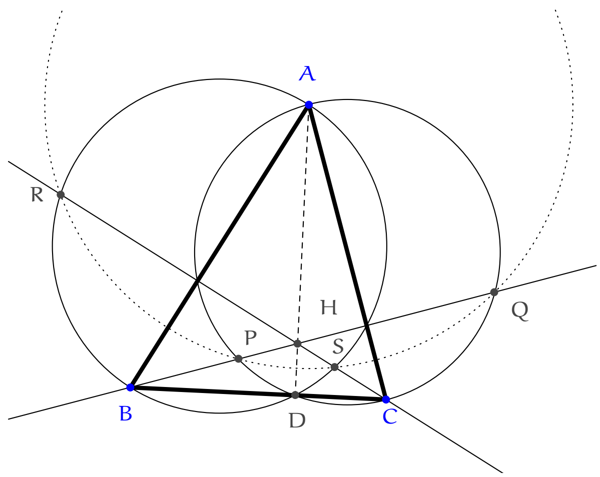
Remarque 17. Si Γ et Γ' sont sécants, leur axe radical est la droite passant par leurs points d'intersection.

Exemple 18. Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles qui se coupent en A et en B. Soit Δ une droite tangente aux deux cercles en M et en N. Montrons que (AB) coupe le segment $[MN]$ en son milieu.



La puissance de I par rapport au premier cercle vaut $IM^2 = IA \cdot IB$. La puissance de I par rapport au deuxième cercle vaut $IA \cdot IB = IN^2$. On en déduit que $IM^2 = IN^2$, d'où $IM = IN$.

Exemple 19. Soit ABC un triangle acutangle. La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe le cercle de diamètre $[AC]$ en P et Q, et la droite perpendiculaire à (AB) passant par C coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en R et S. Montrons que P, Q, R, S sont cocycliques.

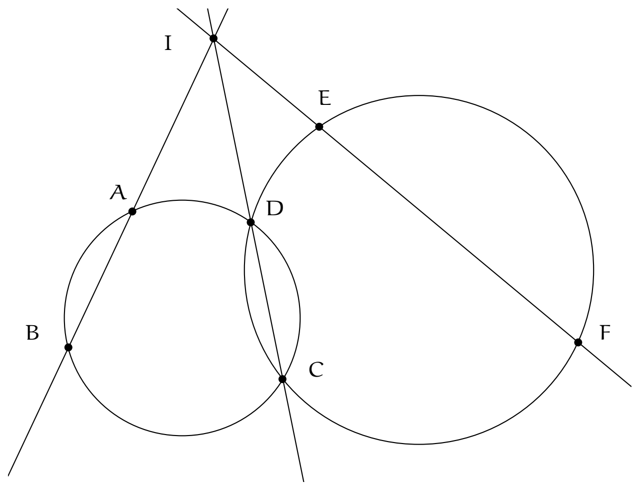


Soit D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et soit H son orthocentre. Le point D appartient au cercle de diamètre $[AB]$, donc $HS \cdot HR = HA \cdot HD$. De même, D appartient au cercle de diamètre $[AC]$, donc $HP \cdot HQ = HA \cdot HD$. Donc $HP \cdot HQ = HR \cdot HS$, ce qui implique que P, Q, R, S sont cocycliques.

Théorème 20. Soient $ABCD$ et $CDEF$ deux quadrilatères inscrits dans deux cercles Γ_1, Γ_2. On suppose que parmi les droites (AB), (CD) et (EF) il n'y en a pas deux qui soient parallèles. Alors les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes si, et seulement si, les points A, B, E et F sont cocycliques.

Ce résultat dit que les axes radicaux de trois cercles sont soit concourants, soit parallèles.

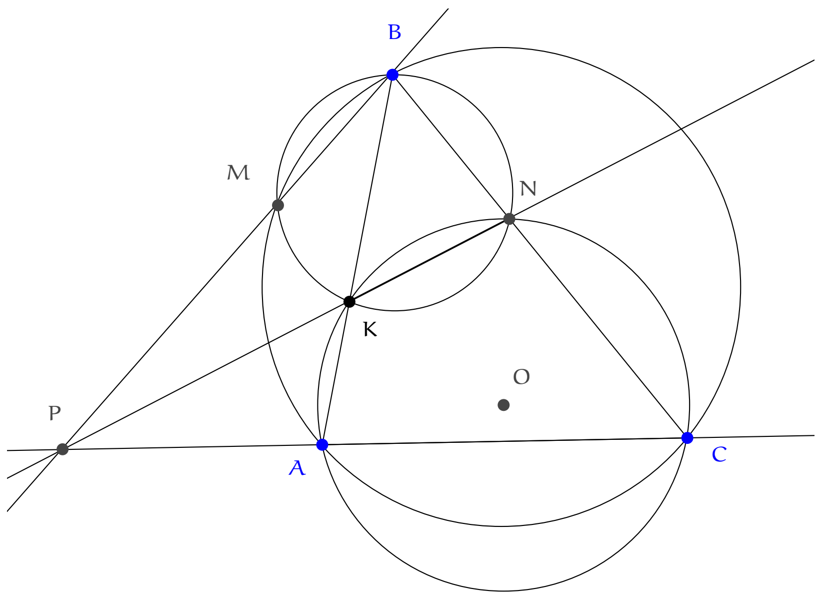
Démonstration.



Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes. Alors la puissance de I par rapport au cercle de gauche vaut $IA \cdot IB = ID \cdot IC$. La puissance de I par rapport au cercle de droite vaut $ID \cdot IC = IE \cdot IF$. On en déduit que $IA \cdot IB = IE \cdot IF$, et donc que A, B, F, E sont cocycliques.

Réciproquement, si A, B, F, E sont cocycliques, notons I le point d'intersection des droites (AB) et (EF). La puissance de I par rapport au cercle circonscrit à $ABFE$ vaut $IA \cdot IB = IE \cdot IF$. Donc I a même puissance par rapport aux deux cercles de la figure. I est donc sur leur axe radical, qui est (DC). Les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont donc concourantes en I. $\square$

Exemple 21. (IMO 1985/5) Un cercle de centre O passe par les points A et C d'un triangle ABC et recoupe les segments $[AB]$ et $[BC]$ en respectivement K et N ($K \neq N$). On suppose que les cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN se recoupent en un point M différent de B. Prouvons que l'angle $\widehat{OMB}$ est un angle droit.



Soit P l'intersection des trois axes radicaux $(AC), (KN)$ et BM. D'après la Proposition 7, pour prouver que (OM) et (BP) sont perpendiculaires, il suffit de vérifier que $OB^2 - OP^2 = MB^2 - MP^2$.

Comme $\widehat{PCN} = \widehat{AKN} = \widehat{BMN}$, les points P, C, N, M sont cocycliques. En notant r le rayon du cercle circonscrit de AKC, il vient :

$$PM \cdot PN = PC \cdot PA = OP^2 - r^2.$$

De même,

$$BM \cdot BP = BN \cdot BC = OB^2 - r^2.$$

Ainsi,

$$OB^2 - OP^2 = BM \cdot BP - PM \cdot PB = BP(BM - PM) = (BM + PM)(BM - PM) = BM^2 - PM^2,$$

d'où le résultat.

Exercices d'application **Exercice 3** Soit ABC un triangle isocèle en B. Les tangentes en A et B au cercle circonscrit Γ de ABC se coupent en D. Soit E le second point d'intersection de (DC) avec Γ. Prouver que (AE) coupe $[DB]$ en son milieu.

Exercice 4 Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 5 (IMO 2000/1) Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles qui se coupent en M et en N. Soit Δ la tangente commune aux deux cercles, qui est plus proche de M

que de N. Δ est tangente à Ω_1 en A et à Ω_2 en B. La droite passant par M et parallèle à Δ rencontre Ω_1 en C et Ω_2 en D. Soient E l'intersection des droites (CA) et (BD), P le point d'intersection de droites (AN) et (CD) et Q le point d'intersection des droites (BN) et (CD). Montrer que $EP = EQ$.

Exercice 6 (USAMO 1998) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles concentriques, avec Γ_2 à l'intérieur de Γ_1. Soient A, B deux points appartenant à respectivement Γ_1 et Γ_2 tels que (AB) est tangente à Γ_2. Soit C le deuxième point d'intersection de (AB) avec Γ_1 et soit D le milieu de $[AB]$. Une droite passant par A coupe Γ_2 en E et F de sorte que les médiatrices de $[DE]$ et $[CF]$ se coupent en un point M de la droite (AB). Calculer le rapport AM/MC.

Exercice 7 Soient ABC un triangle et D, E deux points appartenant respectivement à $[AB]$ et $[AC]$ tels que (DE) et (BC) soient parallèles. Soit P un point à l'intérieur du triangle ADE. Soient F et G les points d'intersection de (DE) avec respectivement les droites (BP) et (CP). Soit Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits des triangles PDG et PFE. Prouver que les points A, P, Q sont alignés.

Exercice 8 (IMO 1995) Soient A, B, C, D quatre points distincts d'une droite (dans cet ordre). Les cercles de diamètre $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en X et Y. La droite (XY) coupe (BC) en Z. Soit P un point de la droite (XY) autre que Z. La droite (CP) recoupe le cercle de diamètre $[AC]$ en M, et la droite (BP) recoupe le cercle de diamètre $[BD]$ en N. Prouver que les droites $(AM), (DN)$ et (XY) sont concourantes.

Exercice 9 (Chine 1997) Soient A, B, C, D quatre points sur un cercle Γ. On suppose que les droites (AB) et (DC) se coupent en P et que les droites (AD) et (BC) se coupent en Q. Soient E et F les deux points de tangence des tangentes à Γ issues de Q. Prouver que P, E, F sont alignés.

- Quelques configurations à connaître en géométrie du triangle -

Rappels On rappelle sans démonstration les résultats suivants :

- les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses côtés appartiennent à son cercle circonscrit (on peut le retrouver en faisant une chasse aux angles).
- Si P est le pied de la bissectrice intérieure issue de A dans un triangle ABC, alors $PB/PC = AB/AC$ (on peut le retrouver en utilisant la loi des sinus).

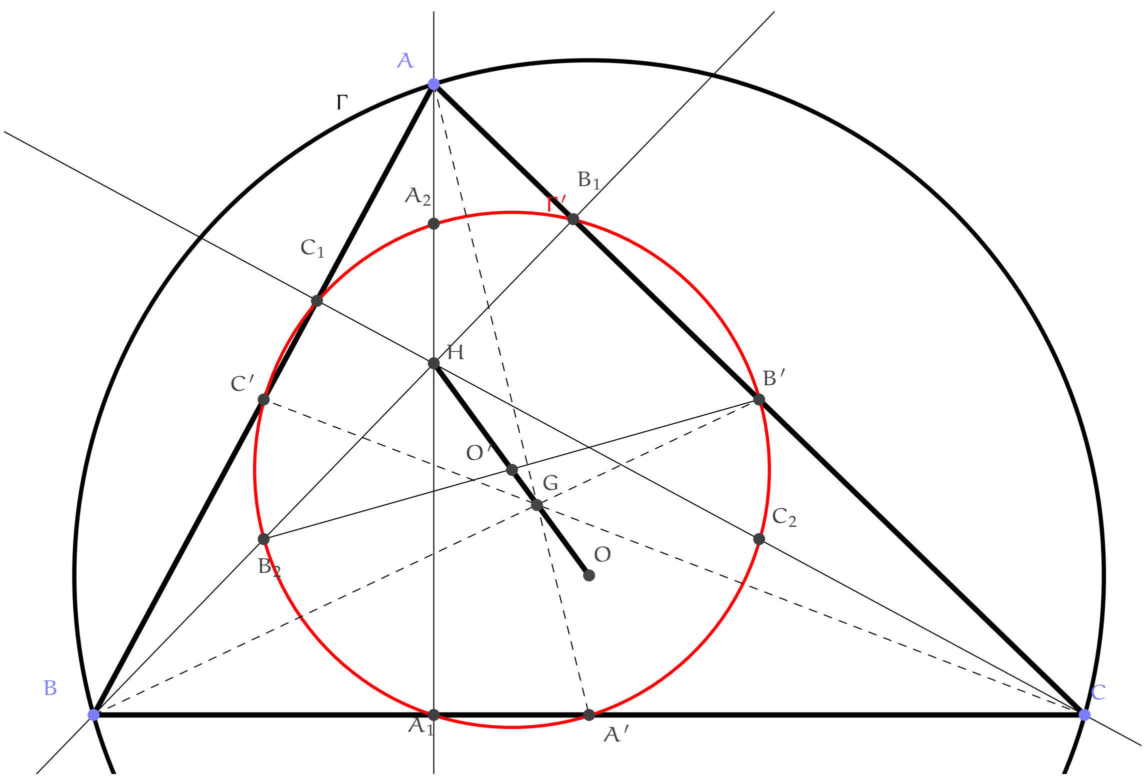
On rappelle qu'il est parfois utile de faire une esquisse de figure rapidement à main levée pour choisir la configuration initiale donnant la meilleure figure possible. Par meilleure, on entend une figure sans symétries ajoutées (comme des triangles isocèles qui n'en sont pas forcément), sans alignements supplémentaires, etc. Ensuite il est utile de travailler sur une grande figure tracée avec les instruments. Si des propriétés remarquables semblent apparaître (égalité de longueurs, alignements), il est utile de faire une figure dans une autre configuration pour voir s'il s'agit une coincidence ou non.

Cercle d'Euler

Théorème 22. (i) On a $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

(ii) Les points suivants sont tous cocyliques : les milieux des côtés du triangle ABC, les pieds des hauteurs de ABC, les milieux des segments $[AH], [BH], [CH]$. Le cercle passant par tous ces points est appelé *cercle d'Euler* de ABC. Par ailleurs, le rayon du cercle d'Euler vaut $R/2$.

(iii) Les triangles ABC, ABH, BCH et CAH ont même cercle d'Euler, et leurs cercles circonscrits ont tous même rayon.



Ce résultat, ainsi que sa preuve, sont à retenir.

Démonstration. (i) On a déjà vu que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Comme G est le centre de gravité de ABC, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Donc

$$\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GO}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG}.$$

(ii) Soit Γ le cercle circonscrit de ABC, notons A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [AC], [AB]$ et A_1, B_1, C_1 les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B, C.

Étape 1 : Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Étudions l'image de Γ par $\mathcal{H}$. Le centre de gravité étant situé au tiers de chaque médiane, $\mathcal{H}$ transforme A en A', B en B' et C en C'. Ainsi, l'image de Γ par $\mathcal{H}$ est le cercle circonscrit de $A'B'C'$ qu'on note Γ'. Ainsi, le rayon de Γ' est $R/2$. Soit O' son centre. On a donc $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Or $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. On en déduit que O' est le milieu de $[OH]$.

Étape 2 : Soit h l'homothétie de centre H et de rapport 2. D'après ce qui précède, h transforme un cercle de centre O' et de rayon r en un cercle de centre O et de rayon $2r$. On en déduit que h transforme Γ' en Γ. En particulier Γ' contient $h(A), h(B), h(C)$ et donc les milieux des segments $[AH], [BH], [CH]$ appartiennent à Γ'.

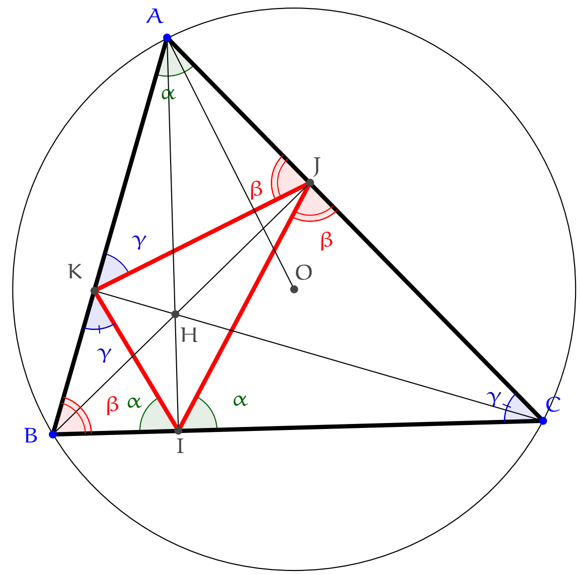
Étape 3 : Pour montrer que $A_1 \in \Gamma'$, montrons que $O'A_1 = O'A$.Soit O'_1 le projeté orthogonal de O' sur (BC). Comme $(HA_1) \parallel (OA')$ et comme O' est le mileu de $[OH]$, le théorème de Thalès assure que O'_1 est le milieu de $[A_1A']$. Il s'ensuit que O'_1 appartient à la médiatrice de ce dernier segment et donc $O'A_1 = O'A$. On montre de même que $B_1, C_1 \in \Gamma'$.

(iii) Le cercle Γ' passe par les milieux de tous ces triangles. Ils ont donc même cercle d'Euler et donc même rayon, car d'après (ii) ce rayon vaut $R/2$.

□

Triangle orthique et théorème de Nagel Soit ABC un triangle non rectangle. Soient I, J, K les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B, C. Le triangle IJK est appelé *triangle orthique* de ABC

Théorème 23. (i) On a les égalités d'angles suivantes :



(ii) Théorème de Nagel : les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{IAO}$ sont confondues.

(iii) Les droites $(OA), (OB), (OC)$ sont perpendiculaires aux côtés de IJK.

(iv) Les droites (IJ) et (IK) sont symétriques par rapport à la hauteur (AI).

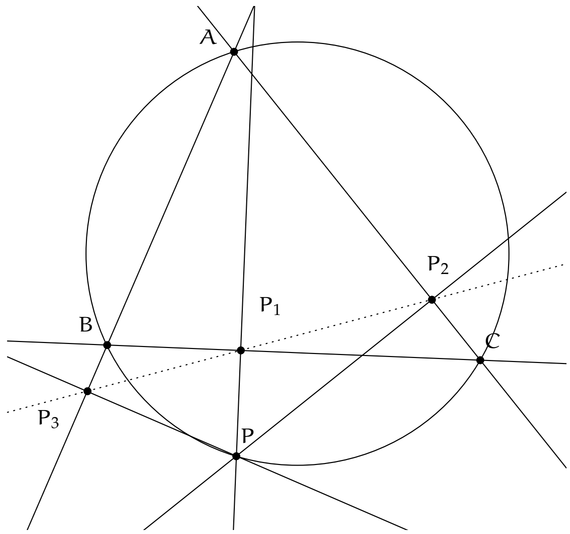
Démonstration. La première assertion provient d'une simple chasse aux angles. Les autres assertions sont alors des conséquences faciles (pour (ii), on utilise par exemple que $\widehat{OAC} = 90° - \beta/2 = \widehat{BAI}$). □

Droites de Simson et de Steiner On définit ici la notion importante de droite de Simson et étudions quelques unes de es propriétés. Dans cette partie, on garde les notations introduites dans les différents énoncés.

Théorème 24. Soit Γ un cercle et A, B, C trois points de Γ. Soit P un point du plan, P_1, P_2, P_3 ses projections respectives sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les points P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si P appartient à Γ.

Lorsque A, B, C, D sont cocycliques, la droite passant pas P_1, P_2, P_3 est appelée *droite de Simson*, et on la notera Δ_P.

Démonstration. On traitera le cas où les points sont dans la confiuration de la figure, les autres se traitent de façon similaire.

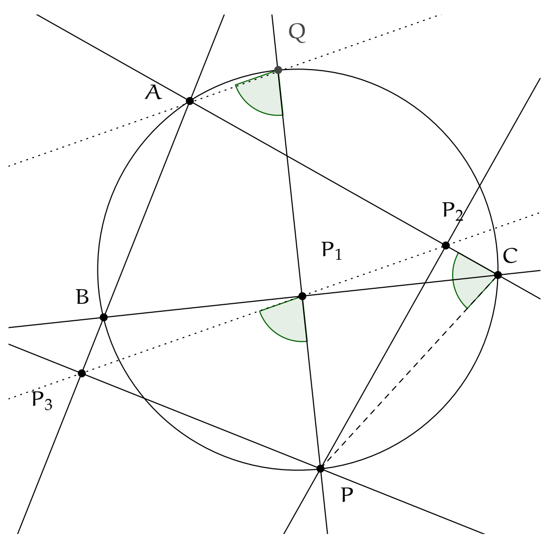


Les points P, P_1, B, P_3 d'une part, P, A, P_2, P_3 d'autre part sont cocycliques, d'où $\widehat{PP_3P_1} = \widehat{PBP_1} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PP_3P_2} = \widehat{PAP_2} = \widehat{PAC}$. Or les points P, Q, R sont alignés si et seulement si $\widehat{P_1P_3P_2} = 0$, soit $\widehat{PP_3P_1} = \widehat{PP_3P_2}$, donc si et seulement si $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, P sont cocycliques. □

Proposition 25. On reprend les notations du Théorème 24. On suppose que $P \in \Gamma$. Notons Q le point où (PP_1) recoupe Γ (si (PP_1) est tangente à Γ on pose $Q = P$).

Alors (AQ) et Δ_P sont parallèles.

Démonstration. On traitera le cas où les points sont dans la confiuration de la figure, les autres se traitent de façon similaire.



Les points Q, A, C, P étant cocycliques, on a $\widehat{AQP} = \widehat{ACP}$. Par ailleurs, les points P_1, P_2, C, P étant cocycliques (sur le cercle de diamètre $[CP]$), on a

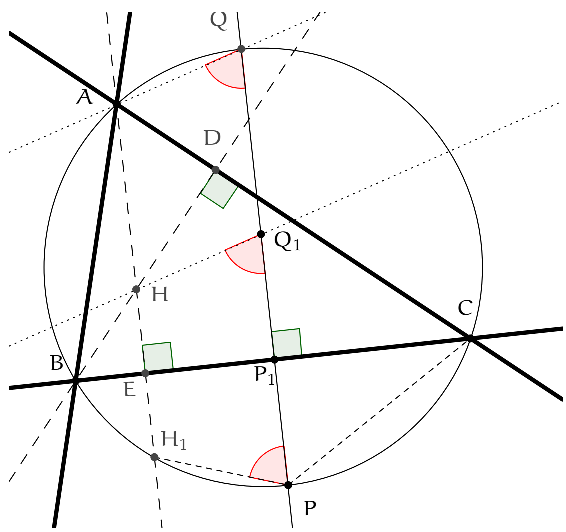
$\widehat{P_3P_1P} = \widehat{ACP}$. On en déduit que $\widehat{AQP} = \widehat{P_3P_1P}$, et donc que Δ_P et (AQ) sont parallèles. $\square$

Théorème 26. On suppose que $P \in \Gamma$. Notons respectivement Q_1, Q_2, Q_3 les symétriques de P par rapport aux droites $(BC), (AC), (AB)$.

(i) Les points Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés sur une droite notée $\mathcal{D}_P$ et appelée *droite de Steiner*. De plus Δ_P et $\mathcal{D}_P$ sont parallèles.

(ii) L'orthocentre H du triangle ABC appartient à la droite de Steiner $\mathcal{D}_P$.

Démonstration.

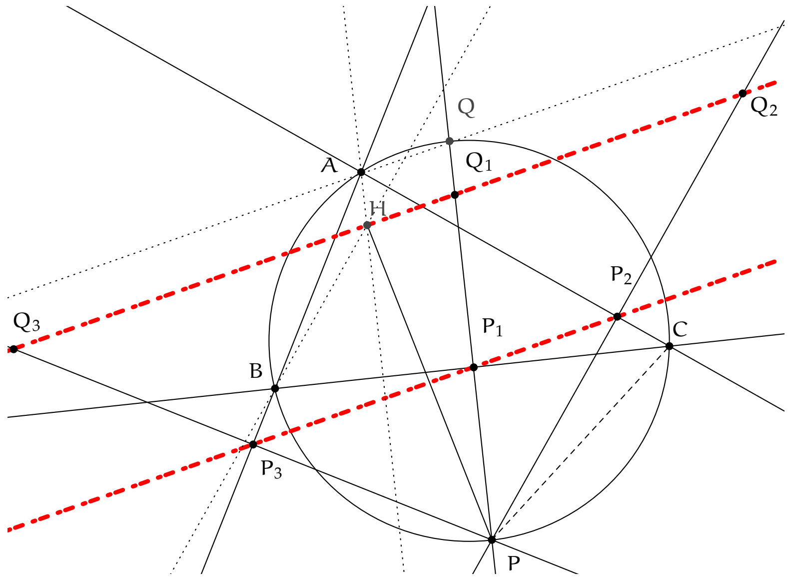


Comme la droite de Simson est parallèle à (AQ), il suffit de prouver que (HQ_1) est parallèle à (AQ) (on montrerait de même que (HQ_2) et (HQ_3) sont parallèles à (AQ)).

Notons H_1 le symétrique de H par rapport à (BC). On sait que H_1 appartient à Γ. Par symétrie, $\widehat{HQ_1P} = \widehat{Q_1PH_1}$. Comme H_1, A, P, Q sont cocycliques, on $\widehat{Q_1PH_1} = 180° - \widehat{HAQ}$. Comme (AH) et (QP_1) sont parallèles (car perpendiculaires à (BC)), il vient $180° - \widehat{HAQ} = \widehat{AQP_1}$. On en déduit que (AQ) et (HQ_1) sont parallèles, ce qui clôt la preuve. $\square$

Théorème 27. On suppose que $P \in \Gamma$. Le milieu de $[PH]$ appartient à la droite de Simson

Démonstration. Comme P_1, P_2, P_3 sont les milieux respectifs de $[PQ_1], [PQ_2], [PQ_3]$, la droite de Steiner est l'image de la droite de Simson par une homothétie de centre P et de rapport 2. Comme H appartient à la droite de Steiner, on en déduit que le milieu de $[HP]$ appartient à la droite de Simson.



□

Proposition 28. Soient $P, P' \in \Gamma$. Montrer que les droites de Simson de P et P' sont perpendiculaires si, et seulement si, P et P' sont diamétralement opposés sur Γ.

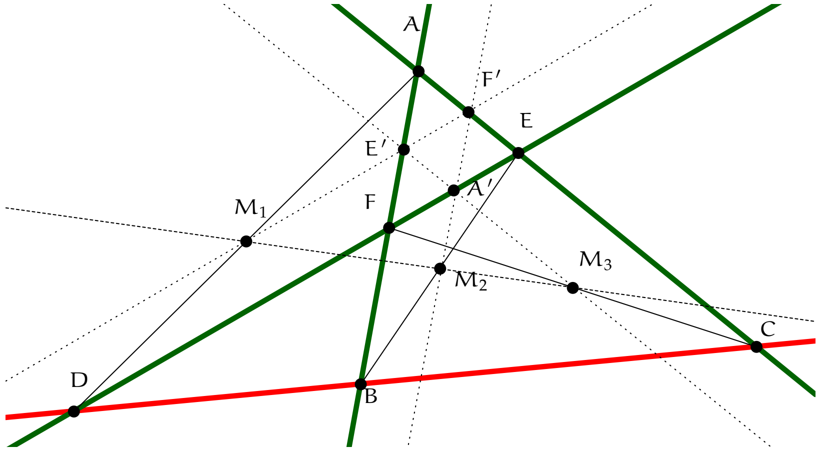
Démonstration. Notons Q' le point où $(P'P'_1)$ recoupe Γ. D'après la Proposition 25, il suffit de prouver que (AQ) et (AQ') sont perpendiculaires si, et seulement si, P et P' sont diamétralement opposés sur Γ. Or (AQ) et (AQ') sont perpendiculaires si, et seulement si, $[QQ']$ est un diamètre de Γ. On voit aisément que c'est le cas si, et suelement si, P et P' sont diamétralement opposés. □

Exercice 10 Soient $P, P' \in \Gamma$ deux points diamétralement opposés. Prouver que les droites de Simson de P et P' se coupent en un point du cercle d'Euler de ABC.

Quadrilatères complets On explore ici quelques propriétés des quadrilatères complets, qui sont des figures detérminées par quatre droites distinctes, sécantes deux à deux, l'intersection de trois quelconques d'entre elles étant vides. Plus précisément, soit ABC un triangle. On suppose qu'une droite Δ coupe $(BC), (CA), (AB)$ en respectivement D, E, F. On parle de quadrilatère complet $BCEF$.

Théorème 29 (Droite de Newton d'un quadrilatère complet)**.** Soient M_1, M_2, M_3 les milieux respectifs de $[AD], [BE], [CF]$. Les points M_1, M_2, M_3 sont alignés sur une droite appelée *droite de Newton* du quadrilatère complet.

Démonstration.



Soient A', E', F' les milieux respectifs de $[EF]$, $[FA]$, $[AE]$. Alors M_1, E', F' sont alignés, ainsi que M_2, F', A' et ainsi que M_3, A', E'. D'après le théorème de Thalès, les triplets M_1, E', F' et M_2, F', A' et M_3, A', E' sont constitués de points alignés.

Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle AEF et la droite passant par D, B, C

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = 1.$$

D'après le théorème de Thalès, on a $\overline{DE} = 2\overline{M_1F'}$, $\overline{DF} = 2\overline{M_1E'}$, $\overline{BF} = 2\overline{M_2A'}$, $\overline{BA} = 2\overline{M_2F'}$, $\overline{CA} = 2\overline{M_3E'}$, $\overline{CE} = 2\overline{M_3A'}$. On en déduit que

$$\frac{\overline{M_1F'}}{\overline{M_1E'}} \cdot \frac{\overline{M_3E'}}{\overline{M_3A'}} \cdot \frac{\overline{M_2A'}}{\overline{M_2F'}} = 1.$$

□

Théorème 30 (Point de Miquel d'un quadrilatère complet)**.**

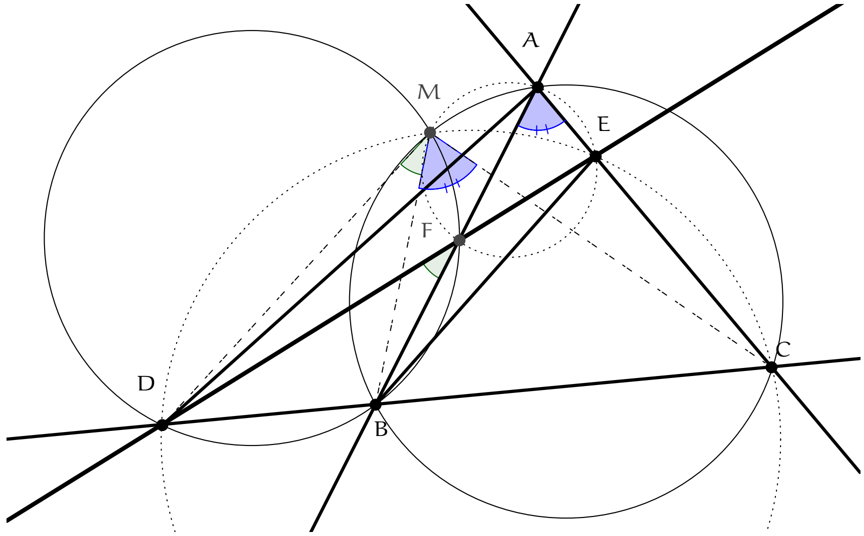
(i) Les quatres cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ circonscrits respectivement aux triangles ABC, DBF, AEF, DCE sont concourants en un point appelé *point de Miquel* du quadrilatère complet.

(ii) Les centres de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ appartiennent un même cercle $\mathcal{M}$, appelé *cercle de Miquel* du quadrilatère complet.

(iii) Le point de Miquel appartient au cercle de Miquel.

Démonstration. On fait les démonstrations dans les configurations des figures (sinon il faudrait utiliser des angles orientés).

(i)

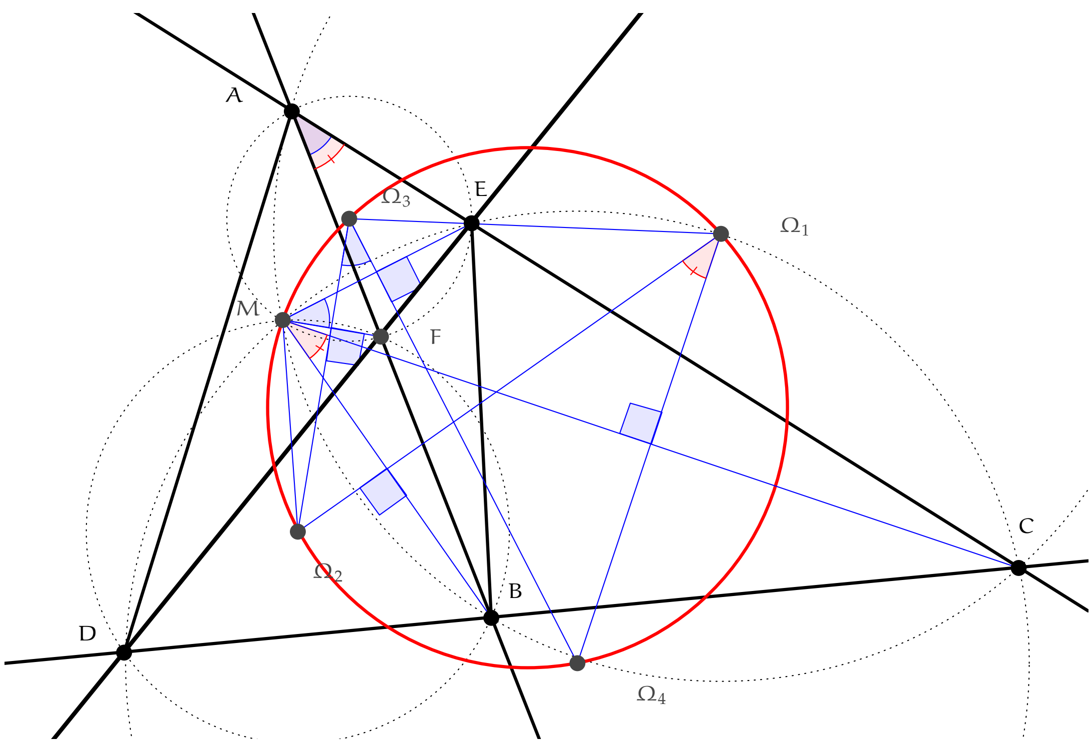


Soit M le point d'intersection des cercles circonscrits à ABC et DBF. Montrons que M appartient au cercle circonscrit de DEC (la preuve est similaire pour AEF). Par cocyclicité on a

$$\widehat{DMB} = \widehat{DFB}, \qquad \widehat{BMC} = \widehat{BAC}.$$

Donc $\widehat{DMC} = \widehat{FEC}$. On en déduit que D, M, E, C sont cocycliques.

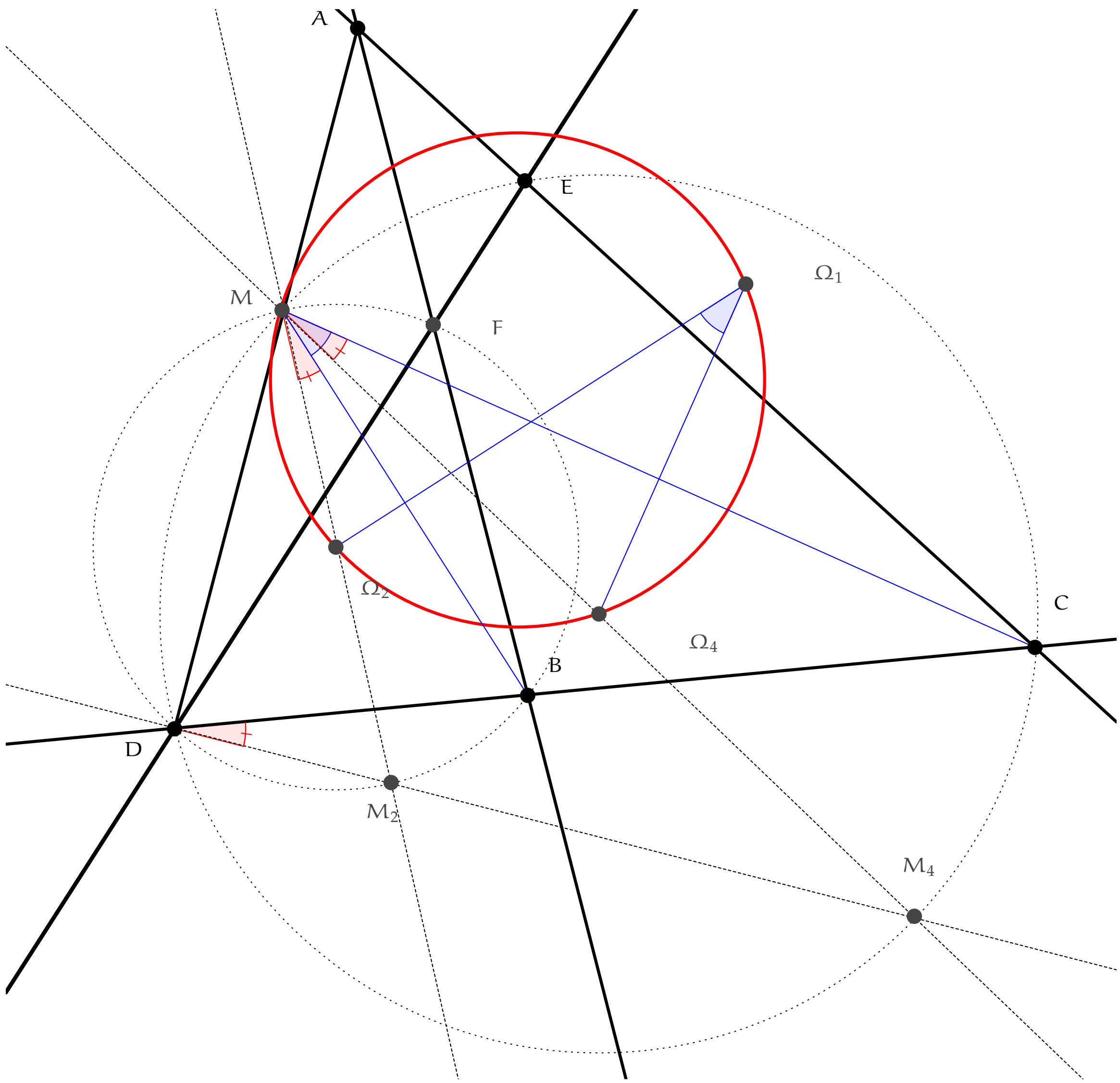
(ii)



Comme $(MF) \perp (\Omega_2\Omega_3)$ et $(\Omega_3\Omega_4) \perp (EM)$, on a $\widehat{FME} = \widehat{\Omega_2\Omega_3\Omega_4}$. De même, $\widehat{BMC} = \Omega_2\widehat{\Omega_1}\Omega_4$.

Or par cocyclicité de A, E, F, M, on a $\widehat{FME} = \widehat{FAE}$ et par cocyclicité de A, M, B, C on a $\widehat{FAE} = \widehat{BAC} = \widehat{BMC}$. Ainsi, $\Omega_2\Omega_3\Omega_4 = \Omega_2\widehat{\Omega_1}\Omega_4$, ce qui prouve que les quatre centres sont cocycliques.

(iii)



Montrons que $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4, M$ sont cocycliques. Pour cela, soient M_2 et M_4 les points diamétralement opposés de M sur respectivement Ω_2 et Ω_4.Alors $\widehat{MDM_2}$ et $\widehat{MDM_4}$ sont des angles droits, et donc D, M_2, M_4 sont alignés. On en déduit que

$$\widehat{\Omega_2MB} = \widehat{M_2MB} = \widehat{M_2DB} = \widehat{M_4DC} = \widehat{\Omega_4MC}.$$

Il s'ensuit que $\Omega_2M\Omega_4 = \widehat{BMC}$. Or on a vu dans la preuve de (ii) que $\widehat{BMC} = \Omega_2\widehat{\Omega_1}\Omega_4$. Ceci conclut.

□

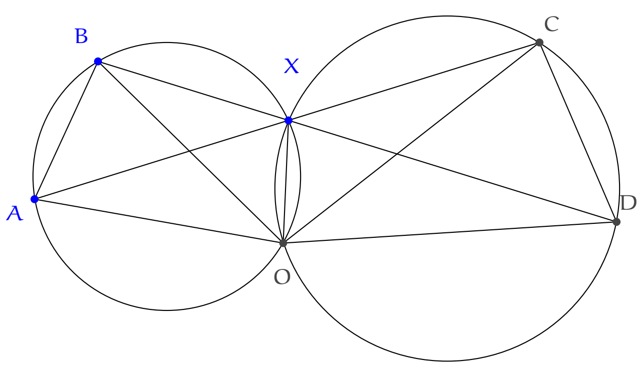
Finalement, le fait suivant, utile et à retenir, est laissé en exercice.

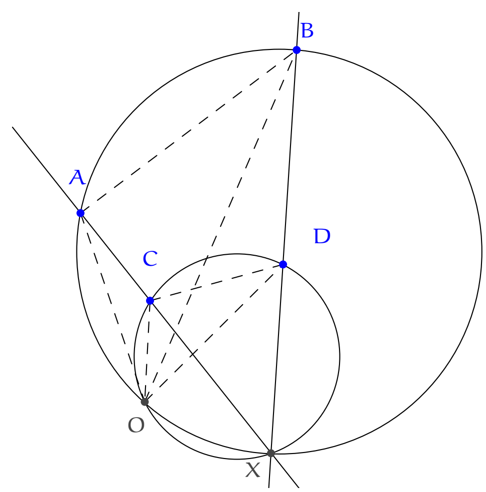
Exercice 11 En gardant les notations précédentes, montrer que le point M appartient à la droite (AD) si, et seulement si, les points B, F, E, C sont cocycliques.

Nous concluons cette section par une autre propriété utile du point de Miquel, qui permet de retrouver le centre d'une similitude connaissant un segmet et son image. On rappelle qu'une similitude directe de centre O est la composée d'une rotation et d'une homothétie (les deux de centre O) et que si $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, il existe une unique similitude directe envoyant A sur B et C sur D.

Théorème 31. Soient A, B, C, D quatre points du plan tels que (AC) et (BD) ne soient pas parallèles. Soit X le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Soit O le second point d'intersection des cercles circonscrits des triangles ABX et CDX. Alors O est le centre de la similitude directe envoyant A sur C et B sur D, ainsi que le centre de la similitude direction envoyant A sur B et C sur D.

Démonstration.



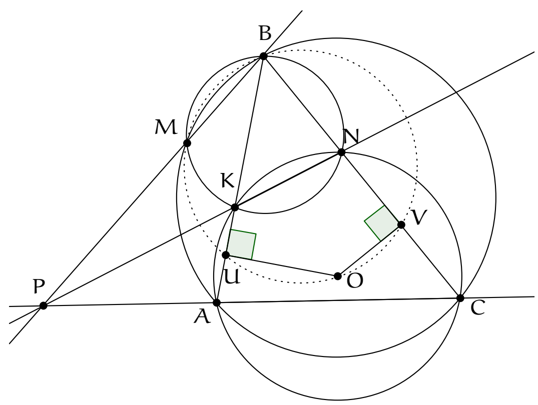


Ceci provient d'une simple chasse aux angles, qui montre que les triangles AOC et BOD sont semblables, ainsi que les triangles AOB et CPD. □

En particulier, si O est le centre d'une similitude directe qui envoie A sur C et B sur D (ou A sur B et C sur D), alors si M est le point de Miquel du quadrilatère $ABDC$ et X est le point d'intersection de (AC) et (BD), alors A, B, M, X sont cocycliques ainsi que C, D, O, M.

Une conséquence immédiate du théorème précédent est que le point de Miquel M d'un quadrilatère $ABCD$ est le centre de la similitude directe qui envoie A sur D et B sur C, ainsi que le centre de la similitude directe qui envoie A sur B et D sur C.

À titre d'illustration, démontrons l'affirmation de l'Exemple 21 en utilisant ce résultat. Rappelons son contenu : un cercle de centre O passe par les points A et C d'un triangle ABC et recoupe les segments $[AB]$ et $[BC]$ en respectivement K et N ($K \neq N$). On suppose que les cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN se recoupent en un point M différent de B. Il s'agissait de prouver que l'angle $\widehat{OMB}$ est un angle droit.



Comme dans l'Exemple 21 (ou en utilisant l'exercice 11), les droites (MB), (KN) et (AC) sont concourantes en un point P. Notons U et V les milieux respectifs de $[AK]$ et $[CN]$. M est le centre de la similitude directe envoyant $[AK]$ sur $[NC]$. M est donc aussi le centre de la similitude directe envoyant $[KU]$ sur $[NV]$, ce qui implique que les points M, B, U, V sont cocycliques. Or, puisque $\widehat{OUB} = \widehat{OVB} = 90°$, les points U, B, V, O appartiennent au cercle de diamètre $[BO]$. Donc M appartient également à ce dernier cercle, ce qui implique que $\widehat{OMB} = 90°$.

Pour approfondir cette partie, nous conseillons vivement la lecture de http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf

Bissectrices, cercles inscrit et exinscrits

Théorème 32. Soit I le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC et I_a le centre de son cercle exinscrit Γ_a "de l'angle $\widehat{A}$". Soit A' le milieu de $[BC]$ et soient D et D_1 les points de contacts respectifs du cercle inscrit de Γ_a avec (BC).

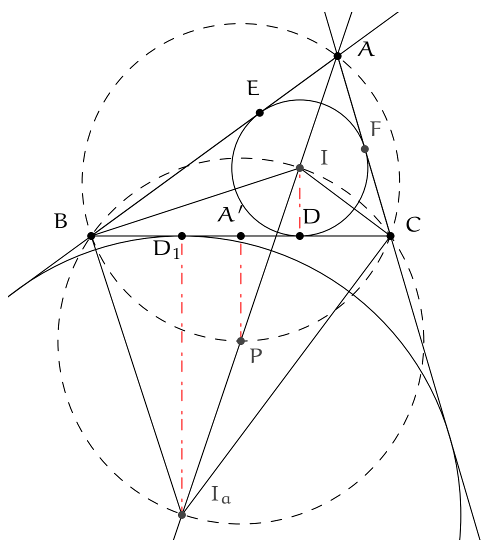
(i) D et D_1 sont symétriques par rapport à A'.

(ii) Notons E, F les points de contacts respectifs du cercle inscrit avec $[AB]$ et $[AC]$. En notant $p = (a+b+c)/2$, on a

$$CD_1 = BD = p - b, \quad BD_1 = CD = p - c, CE_1 = p - b.$$

On calcule similairement les autres longueurs faisant intervenir les points de contacts du cercle inscrit et des autres cercles circonscrits.

Démonstration.



(i) Soit P le milieu de $[II_a]$. Prouvons que P appartient au cercle circonscrit de ABC. Comme $\widehat{I_aBI} = \widehat{I_ACI} = 90°$, P est le centre cercle passant par B, I, C, I_a. En particulier, P appartient à la médiatrice de $[BC]$. Or il est bien connu que la médiatrice de $[BC]$ coupe (IA) en un point appartenant au cercle circonscrit de ABC.

point d'intresection de la droite (AI) avec le cercle circonscrit de ABC. Il est bien connu que P appartient à la médiatrice de $[BC]$. Par ailleurs, comme $\widehat{I_aBI} = \widehat{I_ACI} = 90°$, $[II_a]$ est le diamètre du cercle passant par B, I, C, I_a. En particulier, le projeté orthogonal de P sur (BC) est A'. Puisque les projetés orthogonaux sur (BC) de I_a et I sont respectivement D_1 et D, A' est bien le milieu de D_1D, d'où le résultat.

(ii) Posons $x = AE = AF, y = BF = BD, z = CD = CE$. Comme $BD + DC = BC$, on a $y + z = a$. De même, $z + x = b$ et $x + y = c$. On en déduit que $x + y + z = p$, puis $x = p - a$, $y = p - b$ et $z = p - c$. Comme D_1 et D sont symétriques par rapport à A', on a aussi $CD_1 = BD = p - b$ et $PD_1 = CD = p - c$.

□

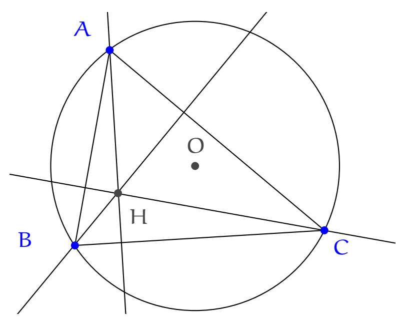
- Solution des exercices -

Solution de l'exercice 1 En remarquant que $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$, écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A_iM^2 &= \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA_i})\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA_i})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(2R^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)\\ &= 2nR^2-2\overrightarrow{OM}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)=2nR^2,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2



(i) On écrit :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos\widehat{AOB}=R^2\cos(2\widehat{C})=R^2(1-2\sin^2(\widehat{C}))=R^2-c^2/2,$$

où pour la dernière égalité on a utilisé le fait que $2R=c/\sin\widehat{C}$ d'après la loi des sinus.

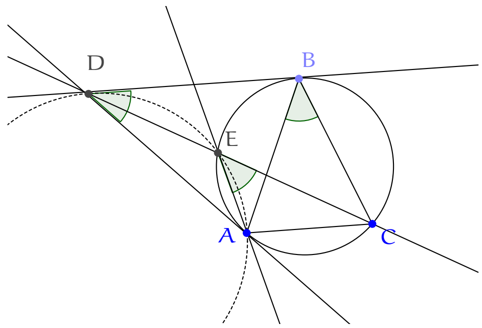
(ii) Il suffit de vérifier que si le point H' est défini par la relation $\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, alors $\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH'}\cdot\overrightarrow{AC}$, ce qui se fait exactement comme dans l'Exemple 6.

(iii) On écrit :

$$OH^2=\overrightarrow{OH}^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=3R^2+2(R^2-a^2/2)+2(R^2-b^2/2)+2(R$$

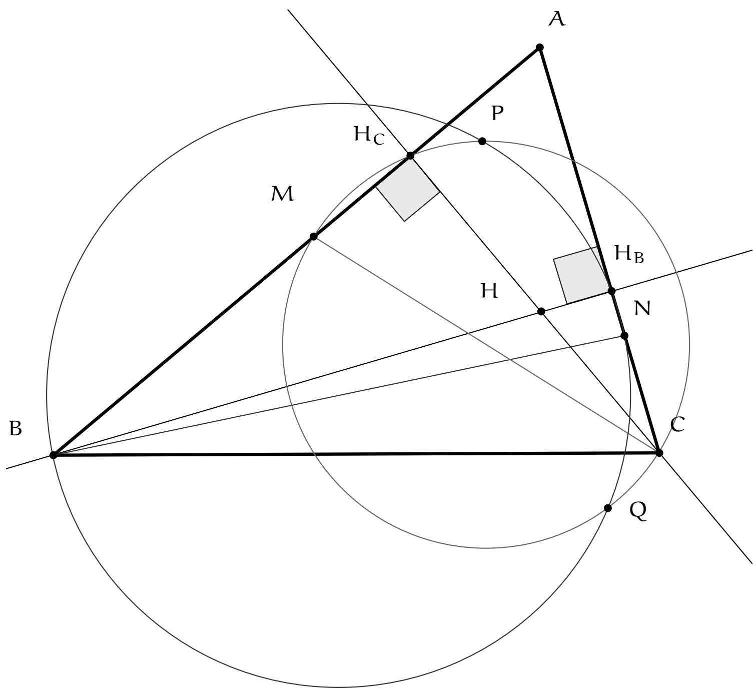
d'où le résultat.

Solution de l'exercice 3



D'après l'Exemple 18, il suffit de vérifier que le cercle circonscrit de ADE est tangent à (DB). Ceci provient d'une petite chasse aux angles : $\widehat{ADB} = 180° - 2\widehat{ABD} = \widehat{ABC} = \widehat{AEC}$.

Solution de l'exercice 4

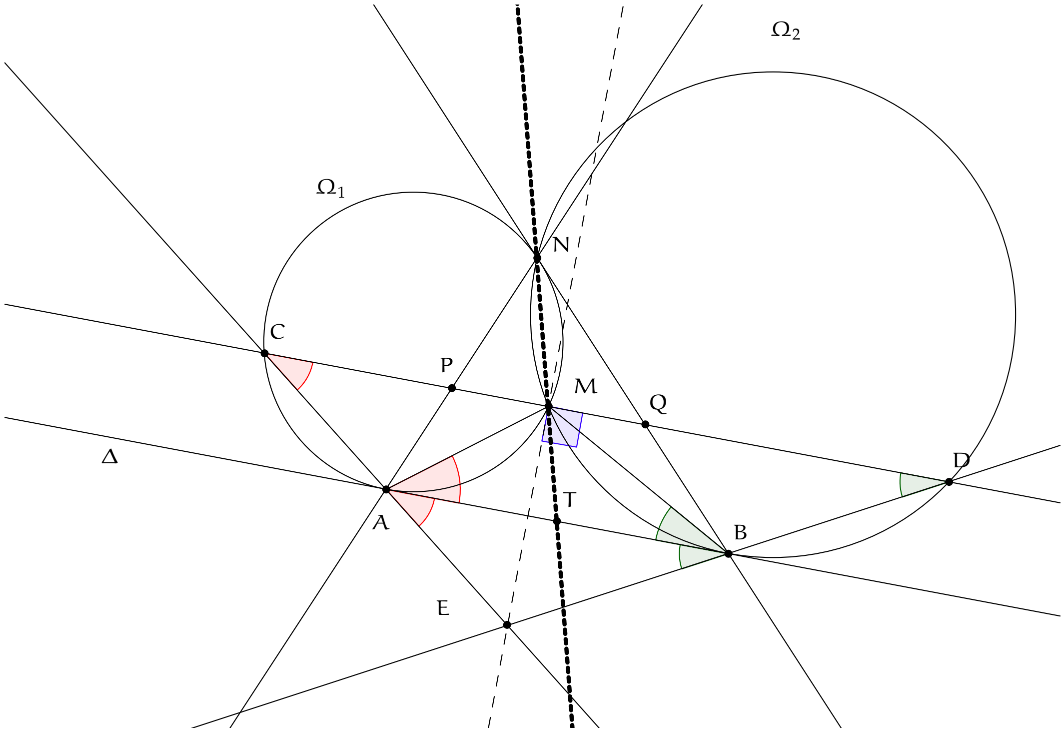


Nous allons montrer que H a la même puissance par rapport aux deux cercles de la figure, ce qui impliquera que H est sur leur axe radical, qui est (PQ).

Pour cela, comme $(BH_B) \perp (AC)$, H_B est sur le cercle de diamètre $[BN]$. La puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BN]$ vaut donc $-HB \cdot HH_B$. De même, la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ vaut $-HC \cdot HH_C$.

Or les points B, H_C, H_B, C sont cocycliques : ces points sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$. On en déduit que $-HB \cdot HH_B = -HH_C \cdot HC$, ce qui conclut.

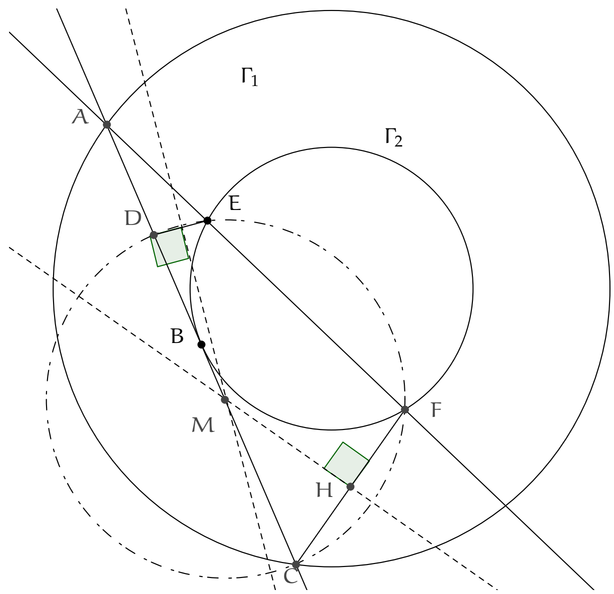
Solution de l'exercice 5



Il suffit d'être logique, qualité qui permet de résoudre nombre d'exercices de géométrie : une chasse aux angles s'impose, et montre que $\widehat{ABE} = \widehat{CDE} = \widehat{MBA}$, la dernière égalité étant d'une importance capitale. De même, $\widehat{BAE} = \widehat{MAB}$. Ces égalités impliquent que M et E sont images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la droite (AB). Les droites (ME) et (AB) sont orthogonales, puis les droites (ME) et (PQ) sont orthogonales.

Il faut également savoir reconnaître les situations classiques : ici, en notant T l'intersection des droites (MN) et (AB), il faut savoir que $TA = TB$ (voir Exemple 18). Le théorème de Thalès montre alors que M est le milieu de $[PQ]$. En somme, (ME) est la médiatrice de $[PQ]$. E est donc bien équidistant de P et de Q.

Solution de l'exercice 6

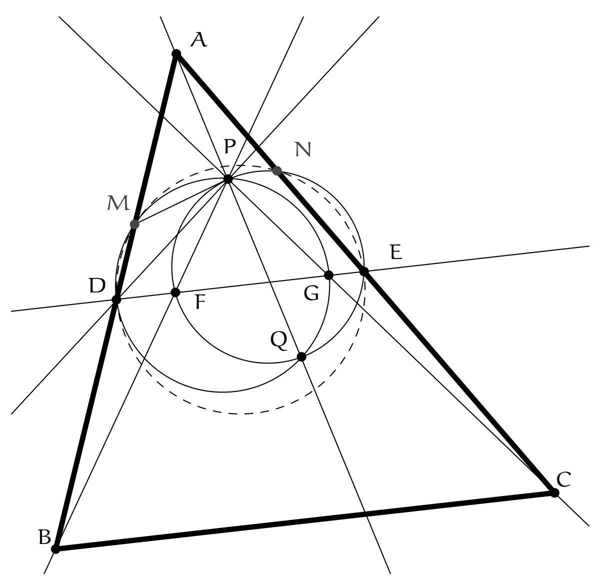


En calculant la puissance de A par rapport à Γ_1, on obtient $AE \cdot AF = AB^2 = AD \cdot AC$. Donc D, C, F, E appartiennent à un même cercle Ω, de sorte que M est le centre de Ω. On en déduit que $[DC]$ est un diamètre de Ω puis que M est le milieu de $[DC]$. D'où :

$$\frac{MC}{AC} = \frac{DC}{2AC} = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}.$$

Donc $AM/MC = 3/5$.

Solution de l'exercice 7



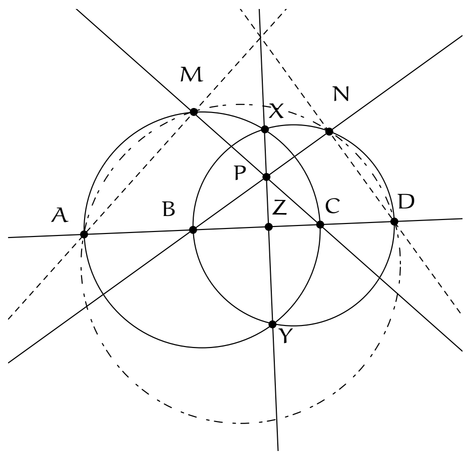
Soient M le second point d'intersection du cercle circonscrit de PDG avec (AB), et N le second point d'intersection du cercle circonscrit de EPF avec

(AC). Sans perte de généralité, supposons que M et N appartiennent respectivement à $[AB]$ et $[AC]$ (les autres cases sont similaires). Alors

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADG} = 180^\circ - \widehat{BDG} = 180^\circ - \widehat{MPC},$$

ce qui implique que B, M, P, C sont cocycliques. De même, B, P, N, C sont cocycliques. Ainsi, B, C, N, P, M sont cocycliques. Donc $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} = \widehat{ADE}$, donc M, N, D, E sont également cocycliques. Donc $AD \cdot AM = AE \cdot AD$. Ainsi A a même puissance par rapport aux cercles circonscrits de PDG et EPF, et appartient donc à (PQ) qui est leur axe radical.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

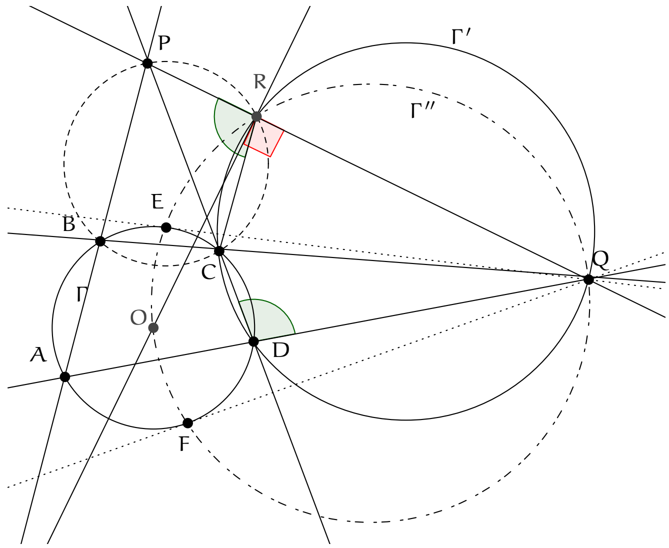


Le point P appartenant à l'intersection des trois axes radicaux, les ponts M, N, C, B sont cocycliques. Par ailleurs, comme

$$\widehat{MND} = 90^\circ + \widehat{MNB} = 90^\circ + \widehat{MCA} = 180^\circ - \widehat{MAD},$$

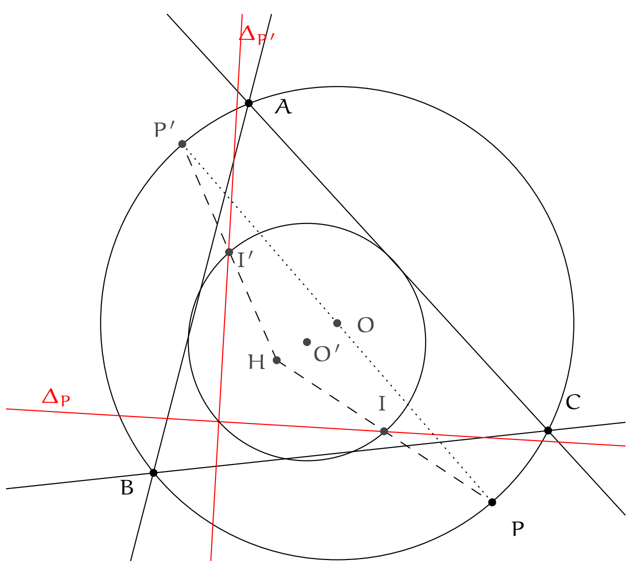
les points A, M, N, D sont cocycliques. Les droites $(AM), (DN)$ et (XY) sont ainsi les axes radicaux de trois cercles et sont donc concourantes (elles ne peuvent pas être parallèles).

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



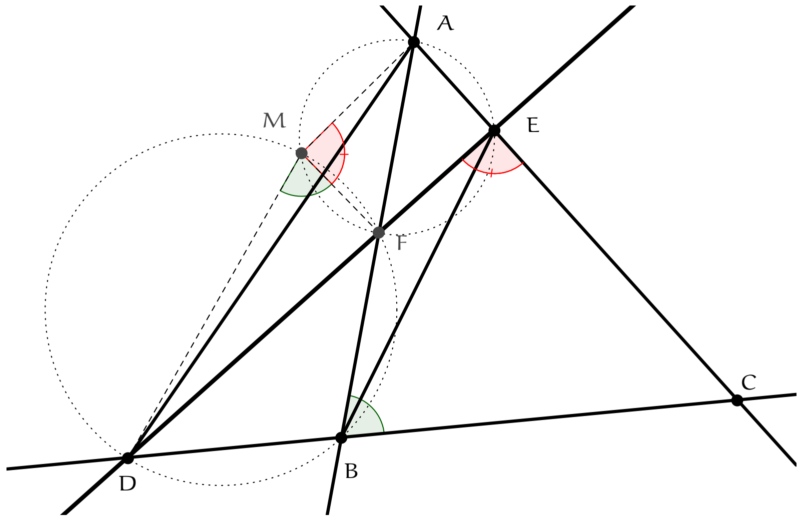
Soit O le centre de Γ et soit R le second point d'intersection du cercle circonscrit Γ' à QCD avec (PQ) (R est le point de Miquel du quadrilatère complet). Comme $\widehat{PRC} = \widehat{QDC} = \widehat{ABC}$, on rappelle que les points P, R, C, B sont cocycliques. D'après l'Exemple 21, (OR) et (PQ) sont perpendiculaires, ce qui implique que Q, F, O, E, R sont cocycliques sur un cercle Γ''. L'axe radical de Γ et Γ' est (CD), l'axe radical de Γ' et Γ'' est (QR). Comme ils s'intersectent en P, il en découle que P appartient à l'axe radical de Γ et Γ'', qui n'est autre que (EF).

Solution de l'exercice 10



Soit O le centre de Γ. Soit Γ' le cercle d'Euler de ABC et notons O' son centre. Notons I et I' les milieux respectifs de $[PH]$ et $[P'H]$. On a déjà vu que Γ' est l'image de Γ par une homothétie de centre H et de rapport $1/2$. On en déduit que I et I' appartiennent au cercle d'Euler. Comme $[PP']$ est un diamètre de Γ, $[II']$ est un diamètre de Γ'. Si R est le point d'intersection des deux droites de Simson, les droites (RI) et (RI') sont perpendiculaires. Ainsi, R appartient au cercle de diamètre $[II']$, qui n'est autre que le cercle d'Euler.

Solution de l'exercice 11



Faisons la preuve dans la configuration de la figure. Par cocyclicité de D, M, F, B on a $\widehat{DMF} = \widehat{FBC}$ et par cocyclicité de M, A, E, F on a $\widehat{FMA} = \widehat{DEC}$. Ainsi, D, M, A sont alignés, si et seulement si, $\widehat{FBC} + \widehat{FEC} = 180°$, autrement dit si, et seulement si, F, E, C, B sont cocycliques.