DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Pierre BERTIN
STAGE : Montpellier 2012

Exercices de chasse aux angles

- Énoncés -

Exercice 1 Deux cercles sont tangents intérieurement en un point A. Soit B le point diamétralement opposé sur le grand cercle. On trace BC une corde du grand cercle qui est tangente au petit cercle au point D. AD est-elle la hauteur, la médiane ou la bissectrice du triangle ABC issue de A ?

Exercice 2 Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle si et seulement si $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Exercice 3 Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que les symétriques de H par rapport aux trois côtés sont sur le cercle circonscrit.

Exercice 4 (droite de Simpson) Soit ABC un triangle et P un point. Soient P_1, P_2 et P_3 les projections de P sur les trois côtés du triangle. Montrer que P_1, P_2, P_3 alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle tel que la médiane, la hauteur et la bissectrice issues de A coupent l'angle $\widehat{A}$ en quatre angles égaux α. Exprimer tous les angles de la figure en fonction de α et calculer α.

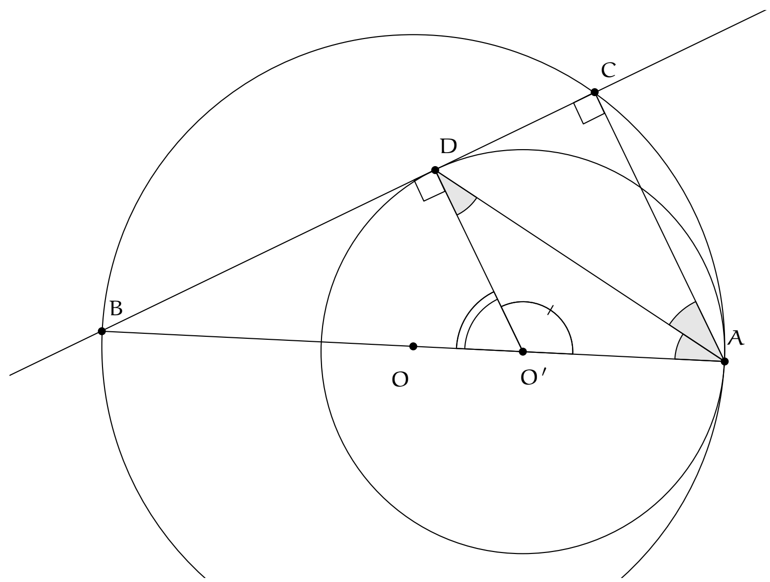
Exercice 7 Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit D l'intersection de la bissectrice de $\widehat{B}$ et du côté AC, et E un point du côté BC tel que $AB = BE$. Montrer que (BO) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 8 Soit ABC un triangle dont la longueur des côtés est 3, 4, 5. Calculer le rayon du cercle inscrit.

Exercice 9 Soit Γ un cercle et BC une corde de Γ. Soit A le milieu de l'arc BC. Par A on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent BC en F et G. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible dans un cercle.

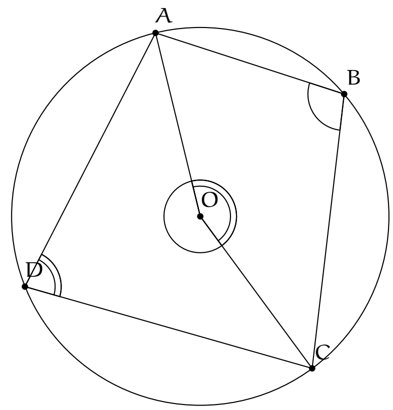
- **Corrigé** -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Cet exercice est surtout la pour vous faire tracer une jolie figure :



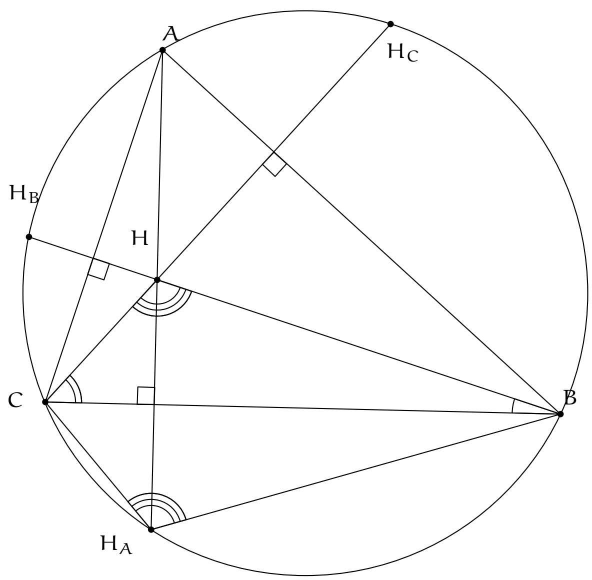
Sur la figure on voit tout de suite que AD n'est ni une hauteur ni une médiane. Essayons donc de montrer que c'est la bissectrice de $\widehat{A}$. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que les symétriques de H par rapport aux trois côtés sont sur le cercle circonscrit. Appelons $\alpha = \widehat{BAD}$. Comme le triangle $O'AD$ est isocèle, $\widehat{O'DA} = \alpha$, donc $\widehat{DO'A} = 180^\circ - 2\alpha$ et $\widehat{BO'D} = 2\alpha$. Ensuite, comme AC et $O'D$ sont toutes deux perpendiculaires à BC, elles sont parallèles. Les angles $\widehat{BO'D}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux et valent 2α. La droite AD coupe bien l'angle $\widehat{A}$ en deux parties égales.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Prenons un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle. Par le théorème de l'angle interne et de langle au centre, $\widehat{BOC} = 2 * \widehat{BAC}$ et $\widehat{COB} = 2 * \widehat{CDB}$. Mais comme $\widehat{BOC} + \widehat{COB} = 360^\circ$, on a bien $\widehat{BAC} + \widehat{CDB} = 180^\circ$.



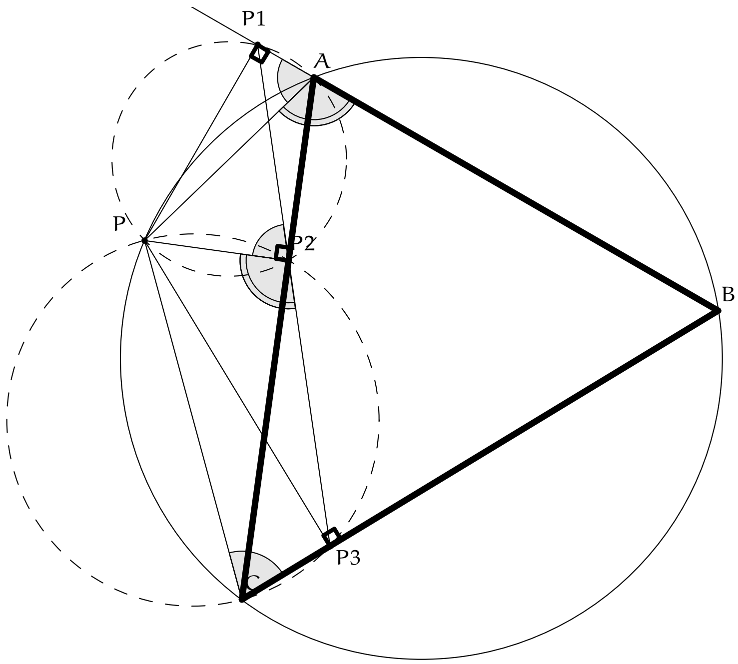
Il faut aussi montrer le sens inverse : supposons que $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$. Soit C' l'intersection du côté BC avec le cercle qui passe par A, B et D. Nous voulons montrer que $C = C'$. Par la question précédente, on sait que $\widehat{BC'D} = 180^\circ - \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Donc les droites (BC) et (BC') sont parallèles et comme elles passent par B toutes les deux elles sont confondues et on a bien $C = C'$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Commençons par une jolie figure :



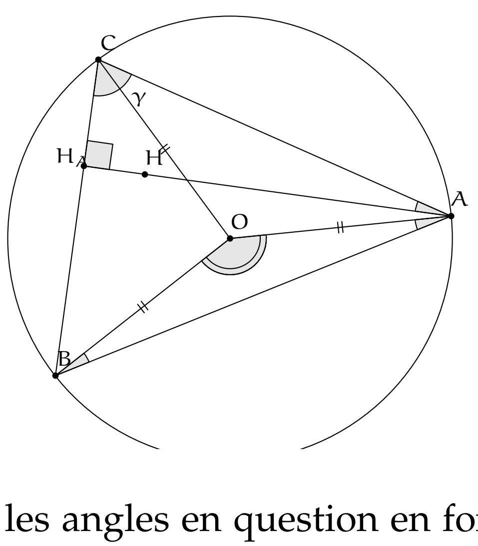
Nous allons juste montrer que H_A, le symétrique de H par rapport à BC, est sur le cercle circonscrit. Nous noterons α, β et γ les trois angles du triangle. Comme BH est une hauteur, l'angle $\widehat{CBH}$ vaut $90^\circ - \gamma$. De même, $\widehat{BCH} = 9O^\circ - \beta$ et donc $\widehat{BHC} = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma$. Comme c'est l'angle symétrique, $\widehat{BH_AC} = \widehat{BHC}$ et $\widehat{BH_AC} + \widehat{BAC} = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Donc d'après le critère de l'exercice précédent, les points A, B, C et H_A sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4 Commençons par faire la figure :



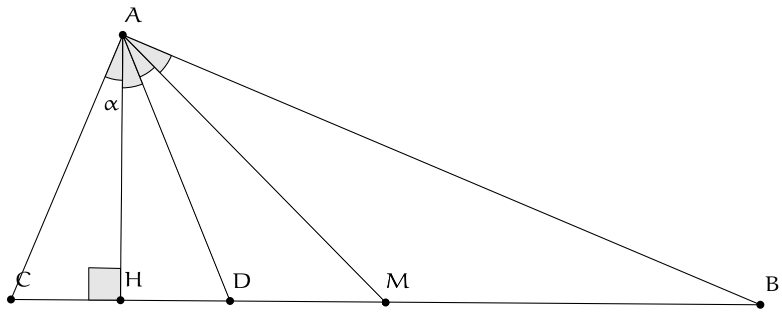
Comme il y a des angles droits en P_2 et P_1, le quadrilatère PP_1AP_2 est inscrit dans un cercle, donc $\widehat{P_1AP} = \widehat{P_1P_2P} = 180^\circ - \widehat{PAB}$. Comme P est sur le cercle circonscrit de ABC, $\widehat{PCB} = 180^\circ - \widehat{PAB} = \widehat{P_1P_2P}$. Enfin, comme P, P_2, P_3, C sont cocycliques, on a $\widehat{PP_2P_3} = 180^\circ - \widehat{PCP_3} = 180^\circ - \widehat{P_1P_2P}$. Donc $\widehat{P_1P_2P_3} = \widehat{P_1P_2P} + \widehat{PP_2P_3} = 180^\circ$, les trois points sont alignés.

Solution de l'exercice 5 Faisons la figure :



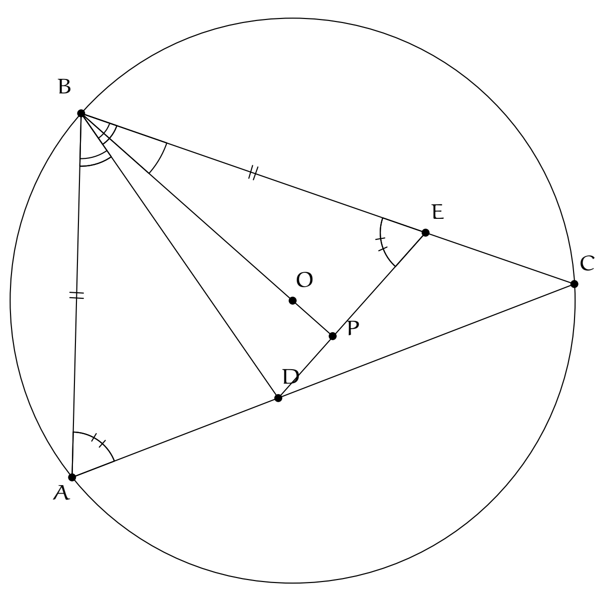
Nous allons calculer les angles en question en fonction de $\gamma = \widehat{BCA}$. Tout d'abord, le triangle CAH_A est rectangle en H_A, donc $\widehat{HAC} = 90^\circ - \gamma$. Pour calculer l'autre angle, on commence par utiliser angle inscrit-angle au centre et on trouve $\widehat{BOA} = 2\gamma$. Ensuite, comme le triangle BOA est isocèle en O, il est facile de calculer $\widehat{OAB} = \frac{180^\circ - \widehat{BOA}}{2} = 90^\circ - \gamma = \widehat{CAH}$.

Solution de l'exercice 6 Faisons le dessin :



Il est facile de calculer tous les angles en fonction de α : $\widehat{BCA} = \widehat{HDA} = 90^\circ - \alpha$, $\widehat{DMA} = 90^\circ - 2\alpha$ et $\widehat{CBA} = 90^\circ - 3\alpha$. Intéressons-nous maintenant au calcul de α. Appelons O le centre du cercle circonscrit de ABC. Nous savons grâce à l'exercice d'avant d'avant, que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH} = \alpha$. Mais cela signifie que O est sur la médiane (AM). Comme O est également sur la médiatrice de $[BC]$, cela veut dire que $0 = M$. Le rayon du cercle circonscrit est sur le segment $[BC]$, donc le triangle est rectangle en A et $\alpha = \frac{90^\circ}{4} = 22.5^\circ$.

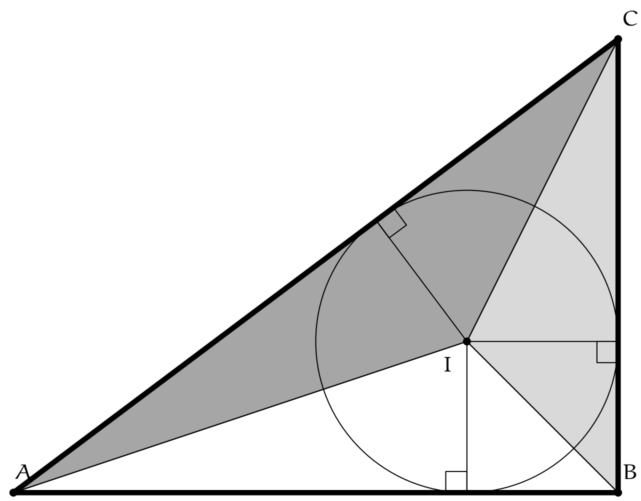
Solution de l'exercice 7 Commençons par faire la figure :



Nous voulons montrer que l'angle $\widehat{BPE}$ est droit, nous allons donc chercher les valeurs des deux autres angles du triangle. Si on note $\alpha = \widehat{A}$, alors l'angle $\widehat{EBP} = 90^\circ - \alpha$ d'après l'exercice précédent. Ensuite on remarque que le point

E est le symétrique de A par rapport à la droite BD, donc les triangles BAD et BED sont le symétrique l'un de l'autre et $\widehat{BED} = \alpha$. Donc $\widehat{BPE} = 180° - (90° - \alpha + \alpha) = 90°$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Si vous ne le saviez pas déjà, en dessinant le triangle 3,4,5 vous vous rendrez compte qu'il est rectangle :

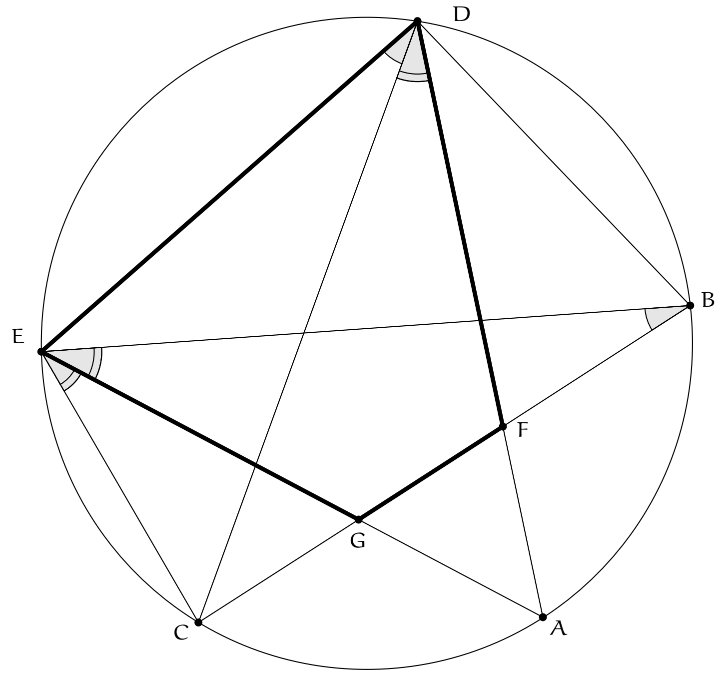


Pour calculer le rayon r du cercle inscrit, nous allons calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle de deux façons différentes. Tout d'abord, $\mathcal{A} = \frac{3\times 4}{2} = 6$. Ensuite, si on calcule séparément les aires des 3 triangles de couleurs différentes, on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{5 \times r}{2} + \frac{4 \times r}{2} + \frac{3 \times r}{2} = 6r.$$

On en déduit que $r = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Comme d'habitude, on commence par une figure :



Nous voulons montrer que le quadrilatère $EDFG$ est inscriptible dans un cercle, essayons de montrer que $\widehat{EDF} + \widehat{FGE} = 180^\circ$. Par les angles inscrits, on a que $\widehat{EDC} = \widehat{EBC}$ et $\widehat{CDA} = \widehat{CEA}$. Comme de plus les arcs CA et AB sont de même longueur, $\widehat{CEA} = \widehat{EAB}$. Maintenant, en faisant la somme des angles dans le triangle EBG on trouve que $\widehat{BGE} = 180^\circ - \widehat{GEB} - \widehat{EBG}$ et en utilisant toutes les égalités obtenues précédemment on a le résultat souhaité.