DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Rémi VARLOOT
STAGE : Cachan 2010 (junior)

Exercices de géométrie

Exercice 1 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en A et B. Soit C un point de Γ_1. On note D (respectivement E) l'intersection entre (BC) (respectivement (AC)) et Γ_2. Enfin, on note F l'intersection entre la tangente à Γ_1 en B et la droite (DE).

Montrer que le triangle BDF est isocèle.

Exercice 2 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. Soit M un point du plan et P_A, P_B et P_C les projetés respectifs de M sur (BC), (AC) et (AB). On a alors l'équivalence suivante : P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.

On appelle alors *droite de Simson* la droite passant par ces trois points.

Exercice 3 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. Soit D la bissectrice intérieure issue de A et Δ la médiatrice de $[BC]$. Alors D et Δ se coupent sur Γ en un point K.

De plus, I, B et C sont équidistants de K (I étant le centre du cercle inscrit dans ABC).

Exercice 4 Soit ABC un triangle et Δ une droite passant par A. On note I le point d'intersection (s'il existe) entre Δ et (BC). On a alors que Δ est la bissectrice intérieure issue de A si et seulement si :

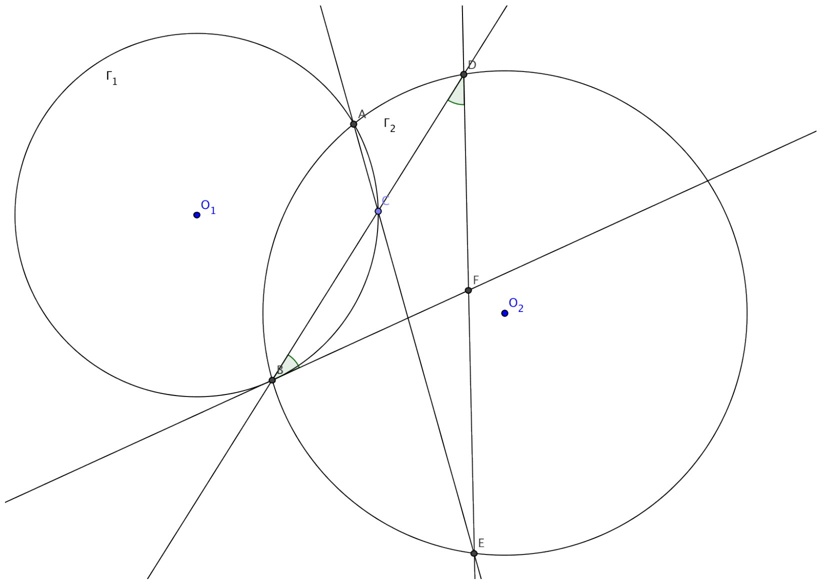
$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}.$$

Exercice 5 Soit ABC un triangle, D l'intersection entre la la bissectrice intérieure issue de A et la droite (BC), et M le milieu de $[AB]$. On suppose que $(MD)\perp(AD)$. Montrer que :

$$DB = 3 \cdot DC$$

Exercice 6 Soit ABC un triangle et H_A et H_B les pieds des hauteurs issues de A et B. Montrer que CH_AH_B et CAB sont semblables.

Solution de l'exercice 1 Il s'agit d'une simple chasse aux angles.



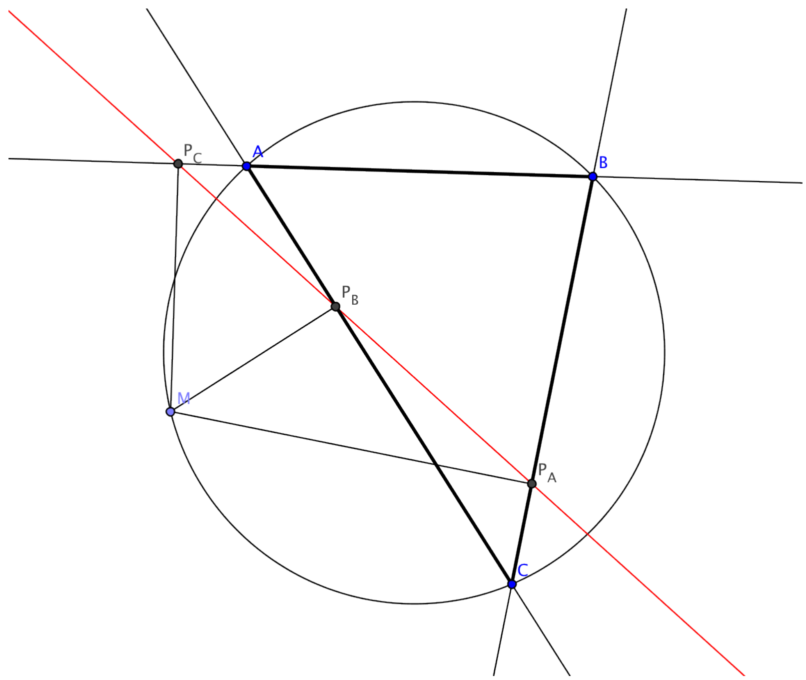
Tout d'abord, en se plaçant dans le cercle Γ_1, on remarque que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FBC}$ interceptent le même arc de cercle ((FB) étant tangente à Γ_1 en B) et sont donc égaux. Ensuite, en se plaçant dans le cercle Γ_2, on obtient de même que les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BDE}$ sont égaux. Il en résulte :

$$\widehat{FBD} = \widehat{FBC} = \widehat{BAC} = \widehat{BAE} = \widehat{BDE} = \widehat{BDF}$$

d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 2 On veut montrer que :

$$\widehat{MP_CP_B} = \widehat{MP_CP_A}$$

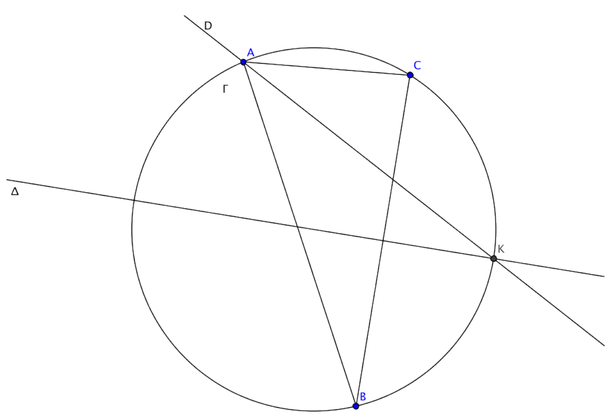


On commence par remarquer que les points M, P_C, A, P_B sont cocyliques sur le cercle de diamètre $[AM]$ (à cause des angles droits). Il en est de même pour les points M, P_A, B, P_C. On a alors les égalités d'angle :

$$\widehat{MP_CP_B} = \widehat{MAP_B} = \widehat{MAC} \qquad \widehat{MP_CP_A} = \widehat{MBP_A} = \widehat{MBC}.$$

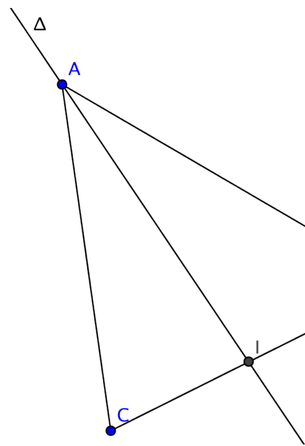
En se plaçant dans Γ, on trouve que les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MBC}$ interceptent le même arc de cercle, et sont donc de même valeur, ce qui achève la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit J le point d'intersection entre D et Γ. Les angles $\widehat{BAJ}$ et $\widehat{JAC}$ sont égaux (car D est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$), donc les arcs de cercle [BK] et [KC] (et *a fortiori* les segments [BK] et [KC]) sont de même longueur.



Soit L le point d'intersection entre Δ et Γ. On veut montrer que J et L sont confondus. Or, Δ étant un axe de symétrie pour le segment $[BC]$ et L appartenant à Δ, on a que L est équidistant de B et de C, ce qui achève la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On considère la droite D passant par B et coupant Δ en J de telle sorte que le triangle IJB soit isocèle en B.



On veut tout d'abord montrer que les triangles AIC et AJB sont semblables. Pour cela, il suffit qu'ils aient deux angles sur trois qui soient de même mesure. Or :

$$\widehat{CAI} = \widehat{BAJ} \qquad (\text{´ bissectrice})$$

et d'autre part

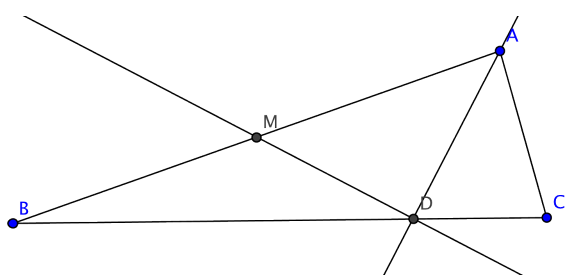
$$\widehat{AIC} = \widehat{BIJ} = \widehat{AJB} \qquad (IBJ \text{ isocèle}).$$

Les triangles AIC et AJB étant donc semblables, on a alors l'égalité :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{JB}{IC}$$

Comme IBJ est isocèle en B, on a $IB = JB$, ce qui donne le résultat attendu.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> La situation est représentée sur la figure ci-dessous.



On considère K le milieu de $[MA]$. Le triangle MDA étant rectangle en A, on a :

$$AK = DK = MK.$$

Il en résulte tout d'abord que le triangle DKA est isocèle en K, ce qui donne l'égalité d'angles :

$$\widehat{ADK} = \widehat{DAK}.$$

Comme on a par ailleurs que $\widehat{DAK} = \widehat{DAC}$ (car (AD) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$), on en déduit que les droites (AC) et (KD) sont parallèles (angles alternes internes égaux).

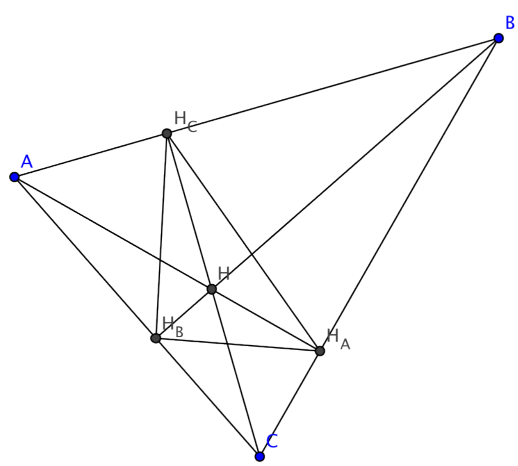
Le théorème de Thalès appliqué au triangle BAC donne alors :

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

Comme $\frac{BK}{BA} = \frac{3}{4}$, on en déduit facilement que :

$$DB = 3 \cdot DC.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On construit de même le point H_C et le point H, orthocentre du triangle.



En remarquant que les points A, H_C, H et H_B sont cocycliques car sur un même cercle de diamètre $[AH]$ (de même pour les points B, H_A, H, H_C et C, H_B, H, H_A), on est rapidement capable d'exprimer tous les angles de la figure à l'aide des trois angles du triangle. On trouve alors que $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{ABC}$, d'oùla conclusion.