DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Emmanuel LECOUTURIER
STAGE : Montpellier 2012

Principe des tiroirs, Invariants,

Nous renvoyons au polycopié de stratégies de base disponible sur le site d'Animath pour le cours.

Les exercices sont approximativement classés par thème et par ordre de difficulté.

- Géométrie -

Exercice 1 Montrer qu'un triangle équilatéral ne peut pas être complètement recouvert par deux triangles équilatéraux strictement plus petits.

Exercice 2 On a n points dans l'espace $P_1, ..., P_n$ tels qu'il existe un point P tel que $P_iP < P_iP_j$ pour tout $j \neq i$. Montrer que $n < 15$.

Exercice 3 On place 6 points dans un rectangle 3×4. Montrer que deux points sont à distance $\leqslant \sqrt{5}$.

Exercice 4 On considère 5 points à coordonnées entières $P_1, ..., P_5$ dans le plan. Montrer qu'il existe un point à coordonnée entière sur un des segments $]P_i, P_j[$.

Exercice 5 Le plan est colorié en deux couleurs (d'une façon quelconque). Montrer qu'il existe une rectangle dont les sommets sont d'une même couleur.

Exercice 6 On colorie certains segments de $[0, 1]$ en rouge. On suppose que deux points rouges ne sont jamais à une distance de 0.1. Montrer que la somme des longueurs de ces segments est $\leqslant 0.5$.

Exercice 7 Prouver que dans un polygone convexe à $2n$ côtés, il existe une diagonale qui n'est parallèle à aucun côté.

- Coloriage -

Exercice 8 Est-il possible de paver un échiquier 8×8 auquel on a enlevé deux coins opposés par des dominos 2×1 ?

Exercice 9 Combien de rois peut-on mettre sur un échiquier 8×8 sans qu'ils se mettent en échec ?

Exercice 10 On pave un sol rectangulaire avec des pièces 1×4 et 2×2. On enlève une pièce. Est-il possible en ajoutant une pièce de type opposé de paver à nouveau le rectangle ?

Exercice 11 On colorie certaines cases d'un échiquier 8×8 en rouge. Combien de cases peut-on colorier au maximum si on veut qu'il n'y ait pas de trimino rouge ? Combien de cases peut-on colorier au minimum si on veut que tout trimino ait au moins une case rouge ?

Exercice 12 On considère un échiquier 9×9 tel que sur chaque case il y a une sauterelle. Chaque sauterelle saute une fois d'une case en diagonale. Combien de cases libres y-a-t-il au minimum ?

- Arithmétique -

Exercice 13 Soient $a_1, ..., a_n$ des entiers. Montrer qu'il existe $1 \leqslant i_1 < ... < i_r \leqslant n$ tels que $a_{i_1} + ... + a_{i_r}$ soit divisible par n.

Exercice 14 Si on se donne $n+1$ entiers distincts entre 1 et $2n$, au moins deux de ces entiers sont premiers entre eux.

Exercice 15 On se donne des entiers $a_1, ..., a_m$ de $\{1, ..., m\}$. On suppose que toute somme constituée d'un sous-ensemble des a_i n'est pas divisible par $m+1$. Montrer que tous les a_i sont égaux.

Exercice 16 Si on se donne $n+1$ entiers (pas forcément distincts) entre 1 et $2n$, un de ces entiers divise un autre.

Exercice 17 Soient a_i des entiers tels que $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant 2n$. On suppose que pour tout $i \neq j$, $\text{ppcm}(a_i, a_j) \geqslant 2n$. Montrer que $3a_1 > 2n$.

Exercice 18 On considère $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (i.e. α ne s'écrit par sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a, b $\in \mathbb{Z}$). Par exemple on peut prendre $\alpha = \sqrt{2}$.

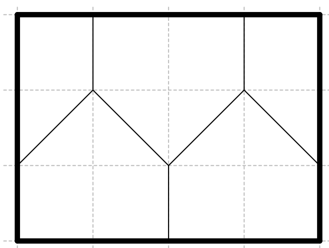
Montrer qu'on peut trouver p, $q \in \mathbb{Z}$ tels que $-\frac{1}{q^2} \leqslant \alpha - \frac{p}{q} \leqslant \frac{1}{q^2}$.

- Solutions de géométrie -

Solution de l'exercice 1 Au moins un des deux triangles contient deux sommets ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 2 On a $\widehat{P_iPP_j} > 60$ (en appliquant Al-Kashi dans le triangle P_iPP_j en P par exemple). On considère E_i ($i = 1, ..., n$) qui est l'ensemble des points Q de la sphère unité tel que $\widehat{P_iPQ} \leqslant 30$. Les E_i sont disjoints et la surface de E_i est $2\pi(1-\cos(30))$. On a donc $n \cdot 2\pi(1-\cos(30)) < 4\pi$ (la surface de la sphère unité est 4π). Donc $n < 15$.

Solution de l'exercice 3 On pave le rectangle en 5 parties telles que deux points d'une même partie sont à distance $\geqslant \sqrt{5}$.



Solution de l'exercice 4 On écrit $P_i = (x_i, y_i)$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$. La "parité" du couple (x_i, y_i) peut prendre $2^2 = 4$ valeurs : (P, P), (P, I), (I, P), (I, I) (P pour pair, I pour impair). Par le principe des tiroirs, au moins deux points P_i et P_j sont de même parité. On considère alors le milieu de $[P_i, P_j]$ qui est bien à coordonnées entières.

Solution de l'exercice 5 Appelons nos deux couleurs rouge et bleu. On considère une grille rectangulaire 7×3 (disons que les colonnes ont 7 points et les lignes ont 3 points). Parmi les 7 points de la première colonne, au moins 4 sont d'une même couleurs, disons bleu. On ne considère plus que le sous-réseau 4×3 qui correspond à supprimer les lignes ne passant pas par les 4 points précédents. Si deux points de la deuxième colonne sont bleus alors on a gagné. Sinon au moins trois points de la deuxième colonne sont rouges. Alors comme deux points de la troisième colonne sont de la même couleur, on a un rectangle rouge ou bleu.

Solution de l'exercice 6 On divise le segment $[0, 1]$ en dix segments $I_k = [\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}]$ ($k = 0, ..., 9$). On note x_k la longueur des points rouge dans $[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}]$. On translate les points rouges de I_k dans I_{k+1} : ceux-ci sont disjoints des points rouges de I_{k+1}, donc $x_k + x_{k+1} \leqslant 0.1$. En particulier $x_1 + x_2 \leqslant 0.1$, $x_3 + x_4 \leqslant 0.1$, $x_5 + x_6 \leqslant 0.1$, $x_7 + x_8 \leqslant 0.1$, $x_9 + x_{10} \leqslant 0.1$. En sommant ces 5 inégalités, on a $x_1 + ... + x_{10} \leqslant 0.5$.

Solution de l'exercice 7 Supposons par l'absurde que toute diagonale est parallèle à un côté. Il y a $n(2n-3)$ diagonales dans un $2n$-gone (choisir le premier sommet de $2n$ façon différentes, puis le deuxième de $2n-3$ façons, mais on compte deux fois chaque diagonale). Une diagonale peut être parallèle à $n-2$ côtés au plus. Donc il y a au plus $2n(n-2) < n(2n-3)$ diagonales, absurde.

- Solutions Coloriage -

Solution de l'exercice 8 Non : on colorie les cases en blanc et noir de la façon habituelle sur un échiquier. Alors il y a 30 cases d'une couleur et 32 d'une autre. Or un domino couvre une case de chaque couleur, donc il devrait y avoir autant de cases noires que de cases blanches.

Solution de l'exercice 9 Réponse : 16. En effet, on découpe l'échiquier en 16 blocs 2×2 : il y a au plus un roi par bloc donc au plus 16 rois. Réciproquement il est immédiat de trouver 16 rois (on en met un en haut à gauche de chaque bloc).

Solution de l'exercice 10 Non : on colorie l'échiquier en blanc et noir de façon à ce qu'une pièce 2×2 couvre 1 case noire et qu'une pièce 1×4 couvre 0 ou 2 cases noires. Alors la parité du nombre de cases noires permet de conclure.

Solution de l'exercice 11 On découpe l'échiquier en 16 blocs 2×2. Il ne peut pas y avoir plus de deux cases rouges par bloc sinon il y aurait un trimino rouge. Donc il y a au plus 32 cases rouges. Réciproquement il est immédiat de trouver un exemple avec 32 cases (mettre deux cases rouges en diagonale dans chaque bloc).
b) On utilise le même découpage et il y a au moins deux cases rouges par bloc, la réponse est donc 32 cases rouges minimum.

Solution de l'exercice 12 On colorie une colonne sur deux en blanc et les autres colonnes en noir. Alors il y a $4 \times 9 = 36$ cases blanches et $5 \times 9 = 45$ cases noires. Comme une sauterelle va d'une case noire à une case blanche, alors il y a au moins $45 - 36 = 9$ cases libres. réciproquement un exemple pour 36 cases libre est immédiat.

- Solutions d'aritthmétique -

Solution de l'exercice 13 On considère les sommes $s_i = a_1 + ... + a_i$. Il y en a n, donc si elles sont toutes non divisibles par n, au moins deux de ces sommes ont le même reste dans la division euclidienne par n. Disons que $s_i = n \times k + r$ et $s_j = n \times q + r$ avec $i < j$, $0 < r < n$. Alors n divise $s_j - s_i = a_{i+1} + ... + a_i$.

Solution de l'exercice 14 Comme souvent on va montrer quelque chose de plus fort que ce qui est demandé (c'est toute la difficulté ici). Parmi nos $n+1$ entiers, il y a deux entiers consécutifs donc deux entiers premiers entre eux.

Solution de l'exercice 15 Supposons par l'absurde que $a_1 \neq a_2$. On sait que les $s_i = a_1 + ... + a_i$ ont des restes distincts et non nuls par $m+1$. Il y a m tels restes. Donc les s_i prennent tous les restes possibles par la division par $m+1$. Donc il existe $i > 2$ tel que s_i ait le même reste que a_2, d'où n divise $s_i - a_2 = a_1 + a_3 + ... + a_i$ (on a $i \neq 1$ car $a_1 \neq a_2$ et $i \neq 2$ car $m+1$ ne divise pas $a_1 = s_2 - a_2$).

Solution de l'exercice 16 On note $a_1, ..., a_{n+1}$ ces $n+1$ entiers. Si tous les a_i sont impairs, il y en a deux d'égaux donc le résultat est évident. En fait on peut toujours écrire $a_i = 2^{r_i} b_i$ où b_i est impair. Donc il existe $i \neq j$ tel que $b_i = b_j$ et alors a_i divise a_j ou a_j divise a_i.

Solution de l'exercice 17 Si $3a_1 \leqslant 2n$, on peut considérer l'ensemble d'entiers $2a_1, 3a_1, a_2, ..., a_n$ compris entre 1 et $2n$. Par l'exercice 4), un de ces entiers divise un autre, ce qui est impossible vu l'hypothèse sur le ppcm.

Solution de l'exercice 18 On considère $N \geqslant 1$ un entier. On divise l'intervalle $[0,1]$ en N parties $I_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$. Alors par le principe des tiroirs, parmi les nombres α, 2α, ..., $N\alpha$, $(N+1)\alpha$, deux ont leur partie fractionnaire dans le même I_k, autrement dit il existe $1 \leqslant i < j \leqslant N+1$ tel que $(j-i)\alpha - p \in [-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}]$ pour un certain entier p. Soit $q = j - i$. On a $1 \leqslant q \leqslant N$ et $-\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{N} \leqslant q\alpha - p \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{q}$.