DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Vincent JUGÉ
STAGE : Montpellier 2013

Graphes finis et infinis

Dans ce cours, nous verrons principalement deux grands résultats sur les graphes : le théorème des mariages de Hall et le théorème de Ramsey. Le premier résultat nous informe que, dans un graphe biparti contenant *beaucoup* d'arêtes, il est possible d'apparier les sommets du graphe. Le second, quant à lui, concerne les grands graphes complets bicolores, dont on peut extraire de *pas si grands* graphes complets monochromatiques.

Dans chaque cas, on étudiera l'extension de ces résultats à des graphes *infinis* : quels théorèmes s'appliquent naturellement aux graphes infinis ? Et sous quelle forme ? En effet, comme on peut s'y attendre, deux énoncés équivalents sur les graphes finis ne le sont plus nécessairement sur les graphes infinis.

- Théorème des mariages de Hall -

Théorème 1 (Théorème des mariages de Hall)**.** Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti fini, dont les deux composantes indépendantes sont A et B, et dont les arêtes forment l'ensemble E. À tout sous-ensemble X de A, on associe le sous-ensemble $E(X) = \{b \in B : \exists a \in X, (a, b) \in E\}$ des sommets de B reliés à au moins un sommet de X. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe injection $f : A \to B$ telle que chaque paire $(a, f(a))$ soit une arête appartenant effectivement à E — on appelle une telle fonction un *couplage saturant* de A ;
2. pour toute partie $X \subseteq A$, $|E(X)| \geqslant |X|$.

Démonstration. Avant l'effort, le réconfort : montrons d'abord que la proposition 1 implique la proposition 2. Pour ce faire, supposont que la proposition 1 est bien vérifiée. On considère alors une partie $X \subseteq A$, et $f : A \to B$ un couplage saturant. Alors $f(X) \subseteq E(X)$, de sorte que $|E(X)| \geqslant |f(X)| = |X|$, donc que la proposition 2 est vérifiée aussi.

Passons maintenant à la partie difficile : comme souvent en théorie des graphes, on va procéder par récurrence (même s'il existe d'autres manières de procéder, la littérature étant abondante sur ce sujet) et montrer que la proposition 2 implique la proposition 1. Tout d'abord, notons que le résultat est évident si $|A| = 1$. On suppose donc que $|A| \geqslant 2$, et on distingue deux cas :

– Si tout sous-ensemble *propre* X de A (c'est-à-dire tel que $\emptyset \subsetneq X \subsetneq A$) est tel que $|E(X)| \geqslant |X| + 1$, alors on apparie au hasard un sommet $a \in A$ et un sommet $b \in B$ tel que $(a, b) \in E$ et on décide que $f(a) = b$. Le graphe $\mathcal{G}'$ induit par les sommets $A \cup B \setminus \{a, b\}$ est un sous-graphe strict de $\mathcal{G}$, et satisfait la proposition 2, donc l'hypothèse de récurrence indique qu'on peut apparier ses sommets sans encombre. Ce faisant, on a apparié l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$.

– Si A admet un sous-ensemble *propre* X tel que $|E(X)| = |X|$, considérons les graphes $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, respectivement induits par les sommets $X \cup E(X)$ et $(A \cup B) \setminus (X \cup E(X))$: ce sont deux sous-graphes stricts de $\mathcal{G}$, et il est clair que $\mathcal{G}'$ satisfait la proposition 2. En outre, si X' est une partie de $A \setminus X$, soit $Y = E(X') \setminus E(X)$. Alors $E(X \cup X') = E(X) \cup Y$, donc $|Y| = |E(X \cup X')| - |E(X)| \geqslant |X \cup X'| - |X| = |X'|$: cela signifie que $\mathcal{G}''$ satisfait également la proposition 2. On peut donc apparier les éléments de $X \cup E(X)$, ainsi que les ceux de $(A \cup B) \setminus (X \cup E(X))$, montrant ainsi que la proposition 1 est vérifiée.

Les propositions 1 et 2 s'impliquant l'une l'autre, elles sont bien équivalentes.

$\square$

On peut également reformuler le théorème des mariages de Hall de manière plus imagée comme suit : supposons que l'on veut marier n filles à n garçons, de manière à ce que chaque individu aime bien son époux(se). Cela nous est possible si et seulement si, dès qu'on prend un groupe de k filles, l'ensemble des garçons qu'aime bien au moins une des filles de groupe est de cardinal k ou plus.

Exercice 1 Sur une planète extrasolaire vit une espèce alien dont la population est composée de 3 sexes : les hommes, les femmes et les matheux. Une famille épanouie consiste en l'union de 3 personnes, une de chaque sexe, qui s'aiment toutes mutuellement. En outre, l'amitié est réciproque : si x aime y, alors y aime x.

Cette espèce veut envoyer n individus de chaque sexe coloniser l'espace, et souhaiterait former autant de familles épanouies que possible avec ces $3n$ personnes. La seule information dont on dispose est que chaque individu aime au moins k personnes de chacun des deux autres sexes :

1. Montrer que, si $n = 2k$, il se peut que l'on ne puisse former aucune famille épanouie.
2. Montrer que, si $4k \geqslant 3n$, il est possible de former n familles épanouies disjointes.

Une fois le théorème des mariages de Hall prouvé pour tous les graphes bipartis finis, une question naturelle se pose : qu'arrive-t-il si on considère un graphe biparti infini dénombrable ? La difficulté est que l'on peut écrire le théorème de plusieurs manières différentes, qui seront équivalentes si l'on regarde un graphe fini, mais ne le seront pas si l'on regarde un graphe infini. Si on s'y prend de manière naïve, en effet, on fait chou blanc :

Exercice 2 (Théorème *infini* des mariages de Hall — extension naïve) Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti infini dénombrable, dont les deux composantes A et B sont infinies. À tout sous-ensemble X de A, on associe le sous-ensemble $E(X) = \{b \in B : \exists a \in X, (a, b) \in E\}$ des sommets de B reliés à au moins un sommet de X. Montrer que les deux propositions suivantes ne sont *pas* équivalentes :

1. il existe un couplage saturant $f : A \to B$;
2. pour toute partie finie $X \subseteq A$, $E(X)$ est infini, ou bien de cardinal $|E(X)| \geqslant |X|$.

Cela dit, il est toujours possible d'étendre le théorème de manière moins naïve, et alors nos efforts seront couronnés de succès. En particulier, si on oblige le graphe $\mathcal{G}$ à n'avoir que des sommets de degré fini, alors tout se passe bien :

Exercice 3 (Théorème *infini* des mariages de Hall — extension moins naïve) Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti infini dénombrable, dont les deux composantes A et B sont infinies, et dont tout sommet est de degré fini. À tout sous-ensemble X de A, on associe le sous-ensemble $E(X) = \{b \in B : \exists a \in X, (a, b) \in E\}$ des sommets de B reliés à au moins un sommet de X. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe un couplage saturant $f : A \to B$;
2. pour toute partie finie $X \subseteq A$, $E(X)$ est de cardinal $|E(X)| \geqslant |X|$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti dont les deux composantes indépendantes, A et B, sont infinies dénombrables. On suppose que tout sommet est de degré fini non nul et que, pour toute arête $(a, b) \in E$ avec $a \in A$

et $b \in B$, $\deg(a) = \deg(b)$. Montrer qu'il existe un couplage saturant bijectif $f : A \to B$.

- Théorèmes de coloriage -

Théorème 2 (Théorème de Ramsey bicolore)**.** Soit g, r et b trois entiers naturels non nuls tels que $g \geqslant \binom{r+b-2}{r-1}$. Alors tout graphe complet K_g dont les arêtes sont coloriées en rouge et bleu contient soit un sous-graphe K_r dont les arêtes sont coloriées en rouge, soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont coloriées en bleu.

Démonstration. On procède par récurrence sur r et b. Tout d'abord, si $r = 1$ ou $b = 1$, le résultat est évident (vu que le graphe K_1 ne comporte aucune arête).

Ensuite, si $r \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, considérons un sommet v du graphe K_g. v est appartient à $g - 1 \geqslant \binom{r+b-2}{r-1} - 1 = \binom{r+b-3}{r-2} + \binom{r+b-3}{r-1} - 1$ arêtes, donc soit v appartient à au moins $\binom{r+b-3}{r-2}$ arêtes rouges, soit v appartient à au moins $\binom{r+b-3}{r-1}$ arêtes bleues.

– Si v est relié à $R \geqslant \binom{r+b-3}{r-2}$ sommets par des arêtes rouges, on considère le sous-graphe K_R formé par ces R sommets. Par hypothèse de récurrence, K_R contient soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont bleues (et a fortiori K_g contient K_b), soit un sous-graphe K_{r-1} dont les arêtes sont rouges ; dans ce second cas, en adjoignant le sommet v au graphe K_{r-1}, on obtient bien un sous-graphe K_r du graphe K_n, et dont les arêtes sont rouges.
– Si v est relié à $B \geqslant \binom{r+b-3}{r-1}$ sommets par des arêtes bleues, alors, pour exactement les mêmes raisons, K_g contient soit un sous-graphe K_r dont les arêtes sont rouges, soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont bleues.

Dans tous les cas, on en déduit que K_g contient effectivement soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont bleues, soit un sous-graphe K_r dont les arêtes sont rouges. Ceci clôt notre récurrence, et donc la preuve du théorème. □

Intuitivement, le théorème de Ramsey dit que, pour obtenir soit un graphe complet K_r avec des arêtes rouges, soit un graphe complet K_b avec des arêtes bleues, il suffit de colorier en rouge et bleu les arêtes d'un très gros graphe complet. En particulier, on peut s'intéresser à l'entier minimal $R_2(r, b)$ tel que tout graphe complet bicolore K_g avec $g \geqslant R_2(r, b)$ contient un de nos graphes K_r ou K_b. Le nombre $R_2(r, b)$ est appelé *nombre de Ramsey bicolore*.

En outre, on peut étendre le théorème de Ramsey au cas où on colorie les arêtes du graphe K_g avec n couleurs au lieu de 2 : il existe un entier minimal

$R_n(s_1, \dots, s_n)$, appelé *nombre de Ramsey à n couleurs*, tel que tout graphe complet n-colore K_g avec $g \geqslant R_n(s_1, \dots, s_n)$ contient un graphes K_{s_i} monochrome :
Exercice 5 (Théorème de Ramsey à n couleurs)**.** On considère $n \geqslant 2$ couleurs $C_1, \dots, C_n$ et n entiers naturels $s_1 \geqslant \dots \geqslant s_n \geqslant 2$. Soit

$$g \geqslant \frac{n}{n-1} \frac{(s_1 + \dots + s_n - 2n)!}{(s_1-2)! \dots (s_n-2)!} \prod_{j=1}^{n-1} (s_j - 1)$$

un entier naturel, et K_g un graphe complet à g sommets dont on a colorié les arêtes avec les n couleurs ci-dessus. Montrer qu'il existe un entier i tel que K_g contient un sous-graphe complet K_{s_i} à s_i sommets dont toutes les arêtes sont de couleur C_i.

Cette généralisation à n couleurs permet de résoudre de nombreux problèmes, par exemple en théorie des nombres :
Exercice 6 (Théorème de Schur)**.** Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une partition de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un ensemble P_i et deux éléments $x, y \in P_i$ tels que $x + y \in P_i$.

On peut alors s'interroger sur la généralisation éventuelle de ce théorème à des graphes infinis : si on colorie en bleu et rouge les arêtes d'un graphe infini, obtient-on une composante bleue ou rouge infinie ? La réponse est oui !
Exercice 7 (Théorème *infini* de Ramsey)**.** Soit K_∞ un graphe complet infini dont on colorie les arêtes avec k couleurs. Alors K_∞ contient un sous-graphe complet infini dont les arêtes sont toutes de la même couleut.

De manière générale, les résultats sur le coloriage des graphes se montrent bien en utilisant des notions de *compacité* : si on dispose d'un coloriage *local* des sommets ou des arêtes d'un graphe, on peut l'étendre peu à peu en un coloriage de plus en plus grand, jusqu'à colorier toute partie finie du graphe, et finalement le graphe lui-même.
Exercice 8 On admet que tout graphe planaire fini admet un coloriage de ses sommets en bleu, rouge, vert tel que nul cycle de longueur impaire ne soit monochrome. Montrer que ce résultat s'étend aux graphes planaires infinis dénombrables.

- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On traite les questions l'une après l'autre.

1. On identifie l'ensemble des $3n = 6k$ individus au produit cartésien $\{F, H, M\} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ — les triplets (F, i, j) représentent les femmes, les paires (H, i, j) les hommes, les paires (M, i, j) les matheux. Supposons alors que chaque femme (F, i, x) aime uniquement les hommes (H, i, y) et les matheux (M, i, y) et que chaque homme (H, i, x) aime uniquement les femmes (F, i, y) et les matheux $(M, i + 1, y)$ — où (i, x, y) décrit l'ensemble $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2$. On a ici une configuration où chacun aime k personnes des deux autres sexes, mais où nulle famille épanouie ne peut exister.
2. On va appliquer deux fois successivement le théorème des mariages de Hall. On introduit d'abord le graphe $\mathcal{G} = (F \cup H, E)$ dont les arêtes sont les paires (f, h) telles que f aime h. Soit $X \subseteq F$ un ensemble non vide de femmes, et $E(X)$ l'ensemble des hommes aimés par au moins une femme $f \in X$. Si $|X| \leqslant k$, alors nécessairement $|E(X)| \geqslant k \geqslant |X|$; si $|X| > k$, alors soit h un homme quelconque. h aime au moins k femmes, et $k + |X| > 2k \geqslant n$, de sorte que h aime au moins une femme appartenant à X, c'est-à-dire que $h \in E(X)$: dans ce deuxième cas, $|E(X)| = |H| = n \geqslant |X|$. $\mathcal{G}$ vérifie donc la propriété 2 du théorème des mariages de Hall : on peut scinder les hommes et les femmes en n couples $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dont les deux membres s'aiment.

   Maintenant, soit C l'ensemble $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ des couples ainsi formés, et $\mathcal{G}' = (M \cup C, E')$ le graphe dont les arêtes sont les paires (m, c) telles que m aime les deux membres du couple c : on dit que m et que le couple c *s'aiment*. Soit m un matheux quelconque ; il existe au plus $n - k$ couples dont il n'aime pas la femme, et $n - k$ couples dont il n'aime pas l'homme, donc m aime au moins $2k - n$ couples. Réciproquement, soit $c = (f, h)$ un couple quelconque ; il existe au plus $n - k$ matheux que f n'aime pas, et $n - k$ mahteux que m n'aime pas, donc c aime au moins $2k - n$ matheux.

   Soit $Y \subseteq M$ un ensemble non vide de matheux, et $E'(Y)$ l'ensemble des couples aimés par au moins un matheux $m \in Y$. Si $|Y| \leqslant 2k - n$, alors nécessairement $|E'(Y)| \geqslant 2k - n \geqslant |Y|$; si $|Y| > 2k - n$, alors soit c un couple quelconque. c aime au moins $2n - k$ matheux, et $2n - k + |Y| > 4n - 2k \geqslant n$, de sorte que c aime au moins un matheux appartenant à Y, c'est-à-dire que $c \in E'(Y)$: dans ce deuxième cas, $|E(Y)| = |M| = n \geqslant |Y|$. $\mathcal{G}'$ vérifie donc la propriété 2 du théorème des mariages de Hall : on peut scinder les matheux et les couples en n paires qui s'aiment mutuellement. Cela revient à scinder $F \cup H \cup M$ en n familles épanouies, ce qui était l'objectif de notre démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Il nous suffit de trouver un exemple de graphe satisfaisant la propriété 2 mais pas la propriété 1 : le voici. On considère le graphe $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ où $A = \{0\} \times \mathbb{N}$, $B = \{1\} \times \mathbb{N}$, et où $((0, i), (1, j)) \in E$ si et seulement si $i = 0$ ou $i = j + 1$. Tout d'abord, si $X \subseteq A$ est une partie telle que $(0, 0) \in X$, alors $E(X) = B$ est bien infini ; si $(0, 0) \notin X$, alors $E(X) = \{(1, j) : (0, j + 1) \in X\}$ est de même cardinal que X. Cela montre que $\mathcal{G}$ satisfait la propriété 2.

Cependant, si $f : A \to B$ est un couplage saturant, alors f envoie la paire $(0, 0)$ sur une paire $(1, i)$, avec $i \in \mathbb{N}$. Mais alors f envoie également la paire $(0, i+1)$ sur la paire $(1, i)$, et ne peut être injective, ce qui contredit son caractère de couplage saturant. Ainsi, la propriété 1 n'est pas satisfaite.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Tout d'abord, la propriété 1 implique, comme dans le cas du théorème des mariages *fini*, la propriété 2. On se penche donc sur le sens réciproque : soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe vérifiant la propriété 2.

On numérote alors les sommets de $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$, puis les ensembles de sommets $A_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ainsi que $E(A_n) = \{b \in B : \exists a \in A_n, (a, b) \in E\}$. On considère alors, pour chaque entier naturel n, le sous graphe $\mathcal{G}_n$ induit par les sommets $A_n \cup E(A_n)$. $\mathcal{G}_n$ est fini et satisfait la propriété 2, donc il existe un couplage saturant $f_n : A_n \to E(A_n)$.

On procède maintenant en utilisant des arguments de compacité : en utilisant le principe des tiroirs, il existe un élément b_0 voisin de a_0 tel que l'ensemble $F_0 = \{n \in \mathbb{N} : f_n(a_0) = b_0\}$ est infini. Puis il existe un élément b_1 voisin de a_1 tel que l'ensemble $F_1 = \{n \in F_0 : n \geqslant 1, f_n(a_1) = b_1\}$ est infini (et alors $b_1 \neq b_0$). On continue par récurrence, en choisissant un élément b_{k+1} voisin de a_{k+1} tel que l'ensemble $F_{k+1} = \{n \in F_k : n \geqslant k + 1, f_n(a_{k+1}) = b_{k+1}\}$ est infini. Ce faisant, il s'avère que la fonction $f_\infty : A \to B$ telle que $f_\infty(a_k) = b_k$ pour tout entier naturel k est bien un couplage saturant.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On montre tout d'abord que le graphe $\mathcal{G}$ satisfait le critère 2 de l'extension moins naïve du théorème des mariages de Hall : si $X \subseteq A$ est un ensemble fini, alors

$$\begin{aligned} |E(X)| &= \sum_{b \in E(X)} \frac{\deg(b)}{\deg(b)} = \sum_{a \in A, b \in E(X) : (a,b) \in E} \frac{1}{\deg(b)} \\ &\geqslant \sum_{a \in X, b \in E(X) : (a,b) \in E} \frac{1}{\deg(b)} = \sum_{a \in X} \sum_{b \in B : (a,b) \in E} \frac{1}{\deg(a)} = \sum_{a \in X} \frac{\deg(a)}{\deg(a)} = |X| \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit l'existence d'un couplage saturant $f : A \to B$; en outre, A et B jouant des rôles symétriques, il existe également un couplage saturant $g : B \to A$.

On numérote alors les éléments de $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$, puis on construit une suite de couplages saturants $f_n : A \to B$ tels que $\{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\} \subseteq f_n(A)$. On part de $f_0 = f$, puis on procède comme suit : si $b_n \in f_n(A)$, alors $f_{n+1} = f_n$; si $b_n \notin f_n(A)$, les choses se corsent. On construit alors par récurrence la suite (u_k) telle que $u_0 = b_n$, $u_{2k+1} = g(u_{2k})$ et $u_{2k+2} = f_n(u_{2k+1})$. Notons que, puisque $f \circ g$ est injective et que $u_0 \notin f(A)$, on sait que u_0 n'est égal à aucun autre terme u_k, donc les termes u_{2k+2} sont deux à deux distincts, et les termes u_{2k+1} se retrouvent deux à deux distincts eux aussi. On définit alors $f_{n+1} : A \to B$ de sorte que $f_{n+1}(u_{2k+1}) = u_{2k}$ pour tout entier k, et $f_{n+1}(v) = f_n(v)$ si $v \notin \{u_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Enfin, numérotons les éléments de $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ puis procédons par compacité : il existe un élément β_0 voisin de a_0 tel que l'ensemble $F_0 = \{n \in \mathbb{N} : f_n(a_0) = \beta_0\}$ est infini. Puis il existe un élément α_0 voisin de b_0 tel que l'ensemble $F'_0 = \{n \in \mathbb{N} : f_n(\alpha_0) = b_0\}$ est infini (on peut éventuellement avoir $a_0 = \alpha_0$). On continue par récurrence, dès lors que l'on dispose des ensembles F'_k et des points α_i, β_i tels que $i \leqslant k$: on choisit un élément β_{k+1} voisin de a_{k+1} tel que l'ensemble $F_{k+1} = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k+1, f_n(a_{k+1}) = \beta_{k+1}\}$ est infini, puis un élément α_{k+1} voisin de b_{k+1} tel que l'ensemble $F'_{k+1} = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k+1, f_n(\alpha_{k+1}) = b_{k+1}\}$ est infini. Notons que, ce faisant, les α_i et les β_i sont deux à deux distincts. En outre, il s'avère que la fonction $f_\infty : A \to B$ telle que $f_\infty(a_k) = \beta_k$ pour tout entier naturel k est bien un couplage saturant et bijectif.

Solution de l'exercice 5 L'idée est de procéder de la même manière que dans la preuve du théorème de Ramsey bicolore. On obtiendra alors une borne supérieure sur le nombre de Ramsey à n couleurs, borne que l'on pourra elle-même majorer pour aboutir à la relation demandée.

Tout d'abord, notons que le théorème de Ramsey à n couleurs n'a que peu d'intérêt quand $n = 1$ (on a $R_1(s_1) = s_1$) ou quand $s_n = 1$ (tout graphe à au moins 1 sommet convient). En outre, par symétrie, il est bénin de considérer uniquement les cas où $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n$. on va montrer par récurrence que la fonction R_n est bien définie, et en obtenir un majorant.

Supposons donc que l'on dispose d'un entier k tel que $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est bien défini dès lors que $\sum_{i=1}^n s_i \leqslant k$: $k = n$ est un tel entier. Montrons que $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est aussi défini quand $\sum_{i=1}^n s_i = k+1$. Pour cela, de deux choses l'une.

– Si $s_n = 1$, on a déjà dit que $R_n(s_1, \ldots, s_n) = 1$, qui est donc bien défini.

– Si $s_n \geqslant 2$, on va montrer que $R_n(s_1, \dots, s_n) \leqslant g$, où $g = 2-n+\sum_{i=1}^n R_n[s_1, \dots, s_n]_i$, où $[s_1, \dots, s_n]_i$ désigne le n-uplet $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i - 1, s_{i+1}, \dots, s_n)$. En effet, si K_g est un graphe complet à g sommets, on colorie ses arêtes avec de n couleurs $C_1, \dots, C_n$, puis on choisit un sommet quelconque v de K_g. Par principe des tiroirs, il existe une couleur C_i telle que v est relié à au moins $g-1$ sommets, donc à $R_n[s_1, \dots, s_n]_i$ sommets par des arêtes de couleur C_i : soit K' le sous-graphe induit par cet ensemble de sommets. Si K' contient un sous-graphe complet K_{s_j} de couleur C_j (avec $i \neq j$) , alors K_g contient également ce sous-graphe complet ; si K' contient un sous-graphe complet K_{s_i-1} de couleur C_i, alors en adjoignant le sommet v à ce sous-graphe, on forme un sous-graphe complet K_{s_i} de K_g, qui entièrement colorié avec C_i. Par hypothèse de récurrence, on est forcément dans un des deux cas ci-dessus : cela signifie que $R_n(s_1, \dots, s_n)$ est bien défini, et au plus égal à g.

En particulier, on peut en déduire que $R_n(s_1, \dots, s_n)$ est majoré par la fonction $S_n(s_1, \dots, s_n)$, symétrique en ses variables, telle que $S_n(s_1, \dots, s_{n-1}, 1) = 1$ et $S_n(s_1, \dots, s_n) = 2 - n + \sum_{i=1}^n S_n[s_1, \dots, s_n]_i$ si $s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_n \geqslant 2$. En introduisant la fonction $T_n = (n-1)S_n - (n-2)$, on obtient $T_n(s_1, \dots, s_{n-1}, 1) = 1$ et $T_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^n T_n[s_1, \dots, s_n]_i$ si $s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_n \geqslant 2$.

En outre, étudions ici un objet combinatoire : les *chemins progressants* dans $\mathbb{Z}^n$: il s'agit de chemins finis où l'on passe d'un point au suivant en ajoutant 1 à une coordonnée. Le nombre de chemins progressant d'origine $(a_1, \dots, a_n)$ et d'extrémité $(b_1, \dots, b_n)$ est égal au coefficient multinomial $\frac{(b_1+\cdots+b_n-a_1-\cdots-a_n)!}{(b_1-a_1)!\dots(b_n-a_n)!}$: on a simplement décidé des $b_i - a_i$ instants où l'on décidait d'augmenter la i-ème coordonnée.

La relation de récurrence sur T_n nous indique alors que $T_n(s_1, \dots, s_n)$ est égal aux nombres de chemins progressants de $\mathbb{Z}^n$ dont :

– l'origine a une coordonnée égale à 1 ;
– nul autre point n'a de coordonnée égale à 1 ;
– l'extrémité est le point $(s_1, \dots, s_n)$.

L'origine d'un tel chemin a donc une unique coordonnée égale à 1 : on en déduit donc que $T_n(s_1, \dots, s_n)$ est égal à la somme des $\frac{(s_1+\cdots+s_n-a_1-\cdots-a_n)!}{(s_1-a_1)!\dots(s_n-a_n)!}$, où :

– on a choisi un $i \leqslant n$ tel que $a_i = 2$;
– chaque coefficient a_j (avec $i \neq j$) est compris entre 2 et s_j.

En particulier, chacun des coefficients multinomiaux vaut au plus $\frac{(s_1+\cdots+s_n-2n)!}{(s_1-2)!\dots(s_n-2)!}$; pour chaque $i \leqslant n$, on additionne $\prod_{j\neq i}(s_j - 1) \leqslant \prod_{j=1}^{n-1}(s_j - 1)$ tels coefficients, soit au plus $n \prod_{j=1}^{n-1}(s_j - 1)$ coefficients multinomiaux au total.

Il s'ensuit que $T_n(s_1, \ldots, s_n) \leqslant n \frac{(s_1+\cdots+s_n-2n)!}{(s_1-2)!\ldots(s_n-2)!} \prod_{j=1}^{n-1}(s_j - 1)$. Or, $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est un entier tel que

$$R_n(s_1, \ldots, s_n) \leqslant S_n(s_1, \ldots, s_n) = \frac{T_n(s_1, \ldots, s_n) + n - 2}{n-1} < 1 + \frac{1}{n-1} T_n(s_1, \ldots, s_n).$$

Cela montre que, si g est un entier tel que

$$g \geqslant \frac{1}{n-1} T_n(s_1, \ldots, s_n) = \frac{n}{n-1} \frac{(s_1 + \cdots + s_n - 2n)!}{(s_1-2)! \ldots (s_n-2)!} \prod_{j=1}^{n-1}(s_j - 1),$$

alors $g \geqslant R_n(s_1, \ldots, s_n)$, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 6 On considère le nombre de Ramsey à n couleurs $R_n(3, 3, \ldots, 3)$, que l'on notera R dans la suite. Soit alors le graphe complet K_R dont les sommets sont les entiers $\{0, 1, \ldots, R-1\}$. on en colorie les arêtes avec n couleurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$: on colorie l'arête (i, j) avec la couleur C_k telle que $|i - j| \in P_k$. Alors, par définition du nombre de Ramsey à n couleurs, K_R admet un triangle monochromatique : on suppose, sans perte de généralité, que ses arêtes sont de couleur C_1, et on note $i < j < k$ ses trois sommets. En particulier, si on pose $x = k - j$, $y = j - i$ et $z = k - i$, alors x, y et z appartiennent à P_1, et $x + y = z$.

Solution de l'exercice 7 On va procéder, comme d'habitude, par récurrence : on crée une suite d'ensembles infinis $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots$ de sommets de K_∞, une suite de couleurs $C_0, C_1, \ldots$ et une suite de sommets distincts a_0, puis $a_1 \in F_0$,$a_2 \in F_1, \ldots$ tels que, pour un entier i donné, arêtes de la forme (a_i, v) avec $v \in F_i$ sont toutes de coloriées avec la couleur C_i.

Tout d'abord, on commence en prenant un sommet $a_0 \in K_\infty$: a_0 appartient à une infinité d'arêtes, coloriées en seulement k couleurs, donc on peut choisir une couleur C_0 et un ensemble F_0 de sommets tels que (a_0, v) soit toujours de la couleur C_0 quelque soit $v \in F_0$.

Ensuite, on suppose qu'on dispose déjà des sommets $a_0, \ldots, a_i$, des couleurs $C_0, \ldots, C_i$ et des ensembles $F_0 \supseteq \cdots \supseteq F_i$. Alors on choisit un sommet $a_{i+1} \in F_i$ quelconque, différent de tous les a_i vus jusque là. Puisque F_i est infini, il existe une couleur C_{i+1} et un ensemble $F_{i+1} \subseteq F_i$ infini tel que l'arete (a_i, v) soit de couleur C_{i+1} pour tout sommet $v \in F_{i+1}$. Ce processus nous permet bien d'obtenir des suites (F_n), (C_n) et (a_n) infinies.

Maintenant, vu que la suite (C_n) prend un nombre fini de valeurs, il existe une couleur C_∞ telle que l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N} : C_n = C_\infty\}$ soit infini.

Le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $a_X = \{a_n : n \in X\}$ est un graphe complet infini dont toutes les arêtes sont de couleur C_∞, ce qui prouve le théorème 7.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe planaire tel que V est infini dénombrable. On numérote l'ensemble de ses sommets $V = \{v_0, v_1, \ldots\}$. En outre, pour tout entier naturel n, on considère l'ensemble de sommets $V_n = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, ainsi que le sous-graphe fini $\mathcal{G}_n$ induit par V_n. Alors il existe un coloriage $C_n : V_n \to \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert}\}$ de $\mathcal{G}_n$ sans cycle monochrome de longueur impaire.

En particulier, il existe un ensemble infini $F_0 \subseteq \mathbb{N}$ et une couleur c_0 tels que $C_k(v_0) = c_0$ pour tout entier $k \in F_0$. Puis, si on dispose d'un ensemble infini $F_n \subseteq \mathbb{N}$ et de couleurs $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que $C_k(v_i) = c_i$ pour tous les entiers $k \in F_n$ et $i \leqslant n$, alors il existe un ensemble infini $F_{n+1} \subseteq F_n$ et une couleur c_{n+1} tels que $C_k(v_{n+1}) = c_{n+1}$ pour tout entier $k \in F_{n+1}$ tel que $k \geqslant n+1$. On considère alors le coloriage $C_\infty : V \to \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert}\}$ tel que $C_\infty(v_n) = c_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Il apparaît alors que C_∞ n'admet pas de cycle monochrome de longueur impaire.

En effet, supposons qu'un tel cycle $\mathcal{C}$ existe : $\mathcal{C}$ étant fini, il existe un entier n tel que $\mathcal{C}$ ne contient que des sommets de V_n. En outre, on considère un entier $\ell \in F_n$ et le coloriage associe C_ℓ. Puisque $C_\ell(v_k) = c_k = C_\infty(v_k)$ pour tout entier $k \leqslant n$, il s'ensuit que $\mathcal{C}$ est un cycle monochrome de longueur impaire pour le coloriage C_ℓ : l'existence d'un tel cycle est incompatible avec la définition de C_ℓ. On en conclut donc que notre supposition était fausse, ce qui conclut l'exercice.