DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Margaret BILU
STAGE : Montpellier 2013

Inégalités

- Quelques inégalités secondaires, mais utiles -

Proposition 1. (Inégalité de Nesbitt) Soient $a, b, c > 0$ des réels. Alors

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2},$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c$.

Démonstration. Appelons I le côté gauche de l'inégalité, et $J = a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$. Alors par Cauchy-Schwarz, $IJ \geqslant (a+b+c)^2$. On se ramène donc à montrer

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2},$$

ce qui est équivalent à

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca),$$

vrai car équivalent à

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0.$$

Cette dernière inégalité fait aussi apparaître clairement le cas d'égalité. □

Proposition 2. (Inégalité de Schur) Soient x, y, z des réels positifs et r un nombre réel. Alors

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y),$$

l'égalité étant atteinte lorsque $x = y = z$, ou bien lorsque deux réels parmi x, y, z sont égaux et le troisième est nul.

Démonstration. L'inégalité étant symétrique en x, y, z, on peut supposer $x \geqslant y \geqslant z$. On peut réécrire le côté gauche sous la forme

$$x^r(x-y)^2 + (x^r - y^r + z^r) + z^r(y-z)^2.$$

Le premier et le troisième terme sont positifs. En ce qui concerne le deuxième, si $r \geqslant 0$ alors $x^r \geqslant y^r$ et si $r < 0$ alors $z^r \geqslant y^r$, donc il est positif aussi, ce qui conclut. $\square$

Le cas $r = 1$ est particulièrement important. Il s'écrit après développement

$$x^3 + y^3 + z^3 - (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 3xyz \geqslant 0.$$

Il y a d'autres formes équivalentes, par exemple

$$xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y). \tag{1}$$

En posant $x + y + z = k$, cela se réécrit

$$xyz \geqslant (k-2x)(k-2y)(k-2z).$$

D'autre part, en remarquant que l'inégalité correspond à la positivité d'un polynôme symétrique en x, y, z, on peut réécrire cela en terme des fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_1 = x+y+z, \quad \sigma_2 = xy+yz+zx, \quad \sigma_3 = xyz.$$

Un calcul simple montre que $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ et $x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. Ainsi, l'inégalité de Schur se réécrit

$$\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$(x+y+z)^3 + 9xyz \geqslant 4(x+y+z)(xy+yz+zx). \tag{2}$$

Il est aussi utile d'avoir en tête la reformulation suivante de Cauchy-Schwarz (parfois appelée inégalité des mauvais élèves, ou lemme de T2), qui facilite l'application de Cauchy-Schwarz dans certains cas.

Proposition 3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + \ldots + x_n},$$

avec égalité lorsque les vecteurs $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ sont colinéaires.

Exercice 1 (IMO 1995) Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

- Inégalités avec condition sur le produit des variables -

De nombreuses inégalités olympiques font intervenir des variables $a_1, \ldots, a_n$ soumises à une condition du type $a_1 \ldots a_n = 1$. Une méthode très utile pour aborder ce genre d'inégalités consiste à se débarrasser de cette contrainte en opérant un changement de variables du type

$$a_1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}, \ a_2 = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{\alpha}, \ldots, a_n = \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{\alpha},$$

où α est un réel à choisir, souvent pris égal à 1.

Exemple 4. Soient a, b, c des réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

La substitution la plus simple $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ (obtenue en prenant par exemple $x = 1 = abc$, $y = bc$, $z = c$) transforme le côté gauche en

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{y}{x}+1} + \frac{\frac{z}{x}}{\frac{z}{y}+1} = \frac{zx}{xy+yz} + \frac{xy}{yz+zx} + \frac{yz}{zx+xy}.$$

On applique l'inégalité de Nesbitt pour conclure.

Remarque 5. Puisque les substitutions de ce genre peuvent compliquer sensiblement l'inégalité à prouver, on a tout intérêt, pour gagner en clarté, à effectuer la substitution la plus judicieuse possible. Par exemple, ici, même si dans ce cas cela ne changeait pas grand chose à la lisibilité de l'inégalité, on aurait pu choisir la substitution de sorte à ce que a et ab soient automatiquement réduits au même dénominateur, à savoir $a = \frac{y}{x}$, $b = \frac{z}{y}$, $c = \frac{x}{z}$, ce qui donnait l'inégalité de Nesbitt directement.

Exercice 2 (Russie 2004) Montrer que si $n > 3$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs de produit 1, alors

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Exercice 3 Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que

$$3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Exercice 4 Soient $a, b, c, d > 0$ avec $abcd = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geqslant 2.$$

Exercice 5 Soit $n \geqslant 3$ et soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ tels que $x_1 \ldots x_n = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{x_1^2 + x_1x_2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n^2 + x_nx_1} \geqslant \frac{n}{2},$$

lorsque n vaut 3 ou 4.

- Autres inégalités -

Les exercices suivants tournent autour de la transformation de Ravi, de l'inégalité de Schur, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et de la manipulation de racines carrées.

Exercice 6 (Olympiades indiennes 1989) Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Prouver que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Exercice 7 (APMO 1996) Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Démontrer que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Exercice 8 Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{1+a^2b}{1+ab}} + \sqrt{\frac{1+b^2c}{1+bc}} + \sqrt{\frac{1+c^2a}{1+ca}} \geqslant 3.$$

Exercice 9 Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$\sqrt{3(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})} \geqslant \sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}.$$

Exercice 10 (APMO 2004) Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca)$$

- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On applique Cauchy-Schwarz de la manière suivante (en s'aidant éventuellement de la proposition 3 ci-dessus).

$$\frac{1}{a^2}\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b^2}\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c^2}\frac{1}{c(a+b)} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}.$$

En simplifiant et en utilisant $abc = 1$, le côté droit devient

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{3}{2}(abc)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

où la dernière inégalité vient de l'IAG.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On utilise les substitutions $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$, $x_2 = \frac{a_3}{a_2}, \ldots, x_n = \frac{a_1}{a_n}$ (qui ont l'avantage de mettre x_i et $x_i x_{i+1}$ au même dénominateur pour tout i automatiquement). Alors on obtient :

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2} > \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_1+\ldots+a_n} = 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Ici, pour n'avoir aucun carré au dénominateur, ce qui va faciliter la mise au même dénominateur ultérieure, on va prendre $a = \frac{y}{x}$, $b = \frac{z}{y}$, $c = \frac{x}{z}$, ce qui donne

$$3+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{yx}+\frac{x^2}{zy} \geqslant \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

On multiplie par xyz des deux côtés pour obtenir

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant y^2z+z^2x+x^2y+x^2z+xy^2+yz^2,$$

qui est juste l'inégalité de Schur.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> De même, on essaye de se débrouiller pour que a et ab soient au même dénominateur. La substitution qu'on choisit est donc

$$a=\frac{y}{x},\ \ b=\frac{z}{y},\ \ c=\frac{t}{z},\ \ d=\frac{x}{t}.$$

L'inégalité devient donc

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+t}+\frac{z}{t+x}+\frac{t}{x+y} \geqslant 2.$$

Puis, on a applique Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+t}+\frac{z}{t+x}+\frac{t}{x+y} \geqslant \frac{(x+y+z+t)^2}{xy+xz+yz+yt+zt+zx+tx+ty}.$$

Il reste donc à prouver

$$(x+y+z+t)^2 \geqslant 2(xy+xz+yz+yt+zt+zx+tx+ty),$$

ce qui est équivalent à

$$x^2+y^2+z^2+t^2 \geqslant 2(xz+yt),$$

qui à son tour est équivalent à

$$(x-z)^2+(y-t)^2 \geqslant 0.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Cette fois-ci, histoire d'avoir le moins de carrés possible, et d'avoir x_i^2 et $x_i x_{i+1}$ au même dénominateur, nous allons poser

$$x_1=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}},\ x_2=\sqrt{\frac{a_3}{a_2}},\dots,x_n=\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}.$$

L'inégalité devient alors

$$\frac{a_1}{a_2+\sqrt{a_1a_3}}+\frac{a_2}{a_3+\sqrt{a_2a_4}}+\dots+\frac{a_n}{a_1+\sqrt{a_na_1}} \geqslant \frac{n}{2}.$$

D'après l'IAG, on a $\sqrt{a_i a_{i+2}} \leqslant \frac{a_i + a_{i+2}}{2}$, ce qui nous conduit à montrer

$$\frac{a_1}{2a_2 + a_1 + a_3} + \frac{a_2}{2a_3 + a_2 + a_4} + \ldots + \frac{a_n}{2a_1 + a_n + a_2} \geqslant \frac{n}{4}.$$

En appliquant Cauchy-Schwarz, cela revient à prouver

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{a_1(a_1 + 2a_2 + a_3) + a_2(a_2 + 2a_3 + a_4) + \ldots + a_n(a_n + 2a_1 + a_2)} \geqslant \frac{n}{4}.$$

Distinguons maintenant suivant si $n = 3$ ou $n = 4$. Si $n = 4$, l'inégalité se réécrit

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 \geqslant a_1^2+2a_1a_2+a_1a_3+a_2^2+2a_2a_3+a_2a_4+a_3^2+2a_3a_4+a_3a_1+a_4^2+2a_4a_1+a_4a_2,$$

et on constate que c'est en fait même une égalité. Si $n = 3$, on doit prouver

$$4(a_1+a_2+a_3)^2 \geqslant 3(a_1^2+2a_1a_2+a_1a_3+a_2^2+2a_2a_3+a_2a_1+a_3^2+2a_3a_1+a_3a_2),$$

ce qui est équivalent à

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1,$$

qui est classique.

Solution de l'exercice 6 On applique la transformation de Ravi : $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, où $x, y, z > 0$. On a donc

$$\frac{x+y}{x+2y+z} + \frac{y+z}{y+2z+x} + \frac{z+x}{z+2x+y} < \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{y+z+x} + \frac{z+x}{z+x+y} = 2.$$

Solution de l'exercice 7 Après avoir appliqué la transformation de Ravi, on obtient

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leqslant \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Par concavité de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$, et de même avec y et z, puis avec z et x. En sommant ces trois inégalités, on obtient inégalité cherchée.

Solution de l'exercice 8 En utilisant la condition sur abc, on peut réécrire l'inégalité sous la forme

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqslant 3$$

En appliquant l'IAG, on se ramène à

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant (a+1)(b+1)(c+1).$$

Pour démontrer cette inégalité, deux méthodes.

Première méthode : on fait la substitution $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$, ce qui donne

$$(y^2 + xz)(z^2 + xy)(x^2 + yz) \geqslant xyz(x+y)(x+z)(y+z).$$

On applique Cauchy-Schwarz sous la forme

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{y}{z}\right)(x^2 + yz) &\geqslant (x+y)^2\\ \left(1 + \frac{z}{x}\right)(y^2 + xz) &\geqslant (y+z)^2\\ \left(1 + \frac{x}{y}\right)(z^2 + xy) &\geqslant (x+z)^2.\end{aligned}$$

On a le résultat en multipliant les trois inégalités.

Deuxième méthode : on pose $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$. On remarque que

$$pq = (a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(c+a) + 1,$$

donc l'inégalité cherchée revient à

$$pq - 1 \geqslant 1 + p + q + 1,$$

c'est-à-dire $pq \geqslant p + q + 3$. D'autre part, l'IAG donne $p \geqslant 3$ et $q \geqslant 3$, donc on a

$$pq = \frac{pq}{2} + \frac{pq}{2} \geqslant \frac{3p}{2} + \frac{3q}{2} \geqslant p + q + \frac{p+q}{2} \geqslant p + q + 3.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On effectue une transformation de Ravi et on met tout au carré. On obtient

$$3\sqrt{(x+y)(y+z)} + 3\sqrt{(y+z)(z+x)} + 3\sqrt{(z+x)(x+y)} \geqslant 2(x+y+z) + 4(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$$

Par Cauchy-Schwarz, $\sqrt{(x+y)(y+z)} \geqslant (y + \sqrt{xz})$, et de même pour les deux autres termes. On doit alors prouver

$$3(x+y+z) + 3(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geqslant 2(x+y+z) + 4(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}),$$

c'est-à-dire

$$x + y + z \geqslant \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$

Or l'IAG appliquée trois fois nous donne

$$\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx},$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10 Quand on développe tout, cela donne

$$(abc)^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+8 \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

On va essayer de faire ressembler ça à la variante (2) de l'inégalité de Schur, réécrite sous la forme

$$9\frac{xyz}{x+y+z} \geqslant 4(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2.$$

En particulier, nous allons faire disparaître les termes en a^2b^2 grâce à l'inégalité

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+6 \geqslant 2(a^2b^2+1)+2(b^2c^2+1)+2(c^2a^2+1) \geqslant 4(ab+bc+ca)$$

obtenue à partir de l'IAG. D'autre part $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(ab+bc+ca)$, et il nous reste donc à prouver

$$(abc)^2+2 \geqslant 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2).$$

Pour obtenir ça, on applique l'IAG deux fois, puis la variante (2) de l'inégalité de Schur telle qu'elle est écrite ci-dessus :

$$\begin{aligned}(abc)^2+2=(abc)^2+1+1 &\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}\\ &\geqslant 9\frac{abc}{a+b+c}\\ &\geqslant 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2\\ &=2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$