DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Noé DE RANCOURT
STAGE : Montpellier 2012

Suites

Une *suite* d'éléments d'un ensemble E est une application $u : \mathbb{N} \to E$. On écrit en général u_n à la place de $u(n)$. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Dans la suite, sauf mention contraire, on prendra $E = \mathbb{C}$.

- 1. Suites classiques. -

Une *suite arithmétique* est une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la raison de la suite. On a $u_n = u_0 + nr$, et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}.$$

Une *suite géométrique* est une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q \cdot u_n$. Le nombre q est appelé la raison de la suite. On a $u_n = q^n \cdot u_0$, et si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Connaissant une suite (u_n) définie par une relation de récurrence, on peut parfois en trouver une expression explicite (c'est-à-dire une expression de u_n en fonction de n) en se ramenant à une suite de la forme $v_n = f(u_n)$ (où f est une bijection de l'ensemble E, par exemple une transformation affine) pour laquelle on connaît une formule explicite.

Exercice 1
Considérons une suite arithmético-géométrique, c'est-à-dire définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution de l'exercice 1

Première méthode. Tentons de nous ramener à une relation de récurrence plus simple en posant $v_n = u_n + c$, où c est un complexe que l'on déterminera plus tard. La suite v_n vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} - c = a(v_n - c) + b$, c'est-à-dire $v_{n+1} = av_n + (1-a)c + b$. En prenant $c = \dfrac{b}{a-1}$, (v_n) est une suite géométrique de raison a. Donc $v_n = a^n v_0$, et $u_n = a^n u_0 + \dfrac{a^n - 1}{a-1} \cdot b$.

Seconde méthode. En calculant formellement les premiers termes de la suite, on peut conjecturer que $u_n = a^n u_0 + a^{n-1}b + ... + ab + b = a^n u_0 + \dfrac{a^n-1}{a-1} \cdot b$. Il ne reste plus qu'à montrer par récurrence que cette formule est vraie pour tout n.

- 2. Récurrences linéaires d'ordre 2 -

Une relation de *récurrence linéaire d'ordre* 2 est relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Son *polynôme caractéristique* est le polynôme $\chi(x) = x^2 - ax - b$.

Théorème 1.
– Si le polynôme $\chi(x)$ à deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
– Si le polynôme $\chi(x)$ à une racine double r, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$.

On calcule λ et μ à partir des deux premiers termes u_0 et u_1.

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que pour tout $x \geqslant 0$, on ait $f(f(x)) + f(x) = 6x$.

Solution de l'exercice 2

Soit $x \geqslant 0$. On définit la suite (x_n) par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. D'après l'équation fonctionnelle, cette suite vérifie la relation de récurrence $x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n$. Le polynôme caractéristique, $t^2 + t - 6$, admet deux racines distinctes -3 et 2, donc il existe des réels λ et μ tels que pour tout n, $x_n = \lambda \cdot (-3)^n + \mu \cdot 2^n$. Supposons λ non-nul ; alors pour n assez grand, x_n est du signe de $\lambda \cdot (-3)^n$. Si $\lambda > 0$, alors x_n est négatif pour n impair, et si $\lambda < 0$, alors x_n est négatif pour n pair. Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction, donc $\lambda = 0$. En utilisant le fait que $x_0 = x$, on trouve que $\mu = x$. Donc $f(x) = x_1 = 2x$.

Réciproquement, $f(x) = 2x$ est bien solution de l'équation fonctionnelle.

Exercice 3

Montrer que les cent premiers chiffres après la virgule dans l'écriture décimale de $(5+3\sqrt{3})^{200}$ sont des 9.

Solution de l'exercice 3

L'idée est de montrer que $(5+3\sqrt{3})^{200}+(5-3\sqrt{3})^{200}$ est entier, et que le second terme de la somme est très petit. Pour cela, posons $u_n = (5+3\sqrt{3})^{200}+(5-3\sqrt{3})^{200}$. On reconnaît une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $(x-5-3\sqrt{3})(x-5+3\sqrt{3}) = x^2-10x-2$. On a donc, pour tout n, $u_{n+2} = 10u_{n+1} + 2u_n$. De plus, $u_0 = 2$ et $u_1 = 10$ sont entiers, donc il est clair par une récurrence immédiate que u_n est entier pour tout n, donc en particulier u_{200} l'est. On n'a donc plus qu'à vérifier que $(5-3\sqrt{3})^{200} \geqslant 10^{-100}$; mais à partir de l'inégalité $\sqrt{3} \leqslant \frac{7}{4}$, on obtient $3\sqrt{3}-5 \leqslant \frac{1}{4}$, donc $(3\sqrt{3}-5)^2 \leqslant \frac{1}{10}$, d'où le résultat voulu.

On remarquera que la méthode de résolution de cet exercice permet aussi de montrer le résultat connu suivant : si x est un complexe tel que $x + \frac{1}{x}$ est entier, alors $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier pour tout n.

Autre remarque : si on se retrouve avec une formule du type $u_n = \lfloor(5+3\sqrt{3})^n\rfloor$, il faut toujours penser à ajouter un terme en puissance de la quantité conjuguée (du type $(5+3\sqrt{3})^n$), ce qui permet, si celui-ci est assez petit à partir d'un certain rang, d'obtenir une expression de u_n sans partie entière, et éventuellement ensuite une relation de récurrence.

- 3. Autres récurrences -

Exercice 4

Déterminer des formules explicites pour les suites définies par récurrence suivantes :

(1) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n^2 - 4u_n + 2$;

(2) $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Solution de l'exercice 4

(1) On essaye de se ramener, via une transformation affine, à une relation de récurrence du type $x_{n+1} = x_n^2$, la plus simple a priori parmi les récurrences de degré 2. Si on pose $x_n = ay_n + b$ et qu'on suppose que (x_n) vérifie la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n^2$, on trouve que $y_{n+1} = ay_n^2 + 2by_n + \dfrac{b^2 - b}{a}$; on voit que pour $a = 3$ et $b = -2$, il s'agit de la relation de récurrence vérifiée par (u_n). Avec $x_n = 3u_n - 2$, on trouve donc que $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = x_n^2$, donc par une récurrence immédiate, $x_n = 4^{2^n}$ et $u_n = \dfrac{4^{2^n} + 2}{3}$ pour tout n.

(2) La formule trouvée à la question précédente montre qu'on ne peut pas se ramener à une récurrence du type $x_{n+1} = x_n^2$ via une transformation affine ; il faut donc trouver autre chose. La solution est dans l'identité $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$: si on pose $x_n = x^{2^n} + \dfrac{1}{x^{2^n}}$ pour un certain complexe x, alors il est immédiat que $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Il suffit donc de trouver x tel que $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$; $x = 2$ convient. On a donc, pour tout n, $u_n = 2^{2^n} + \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

On peut ainsi trouver des formules explicites pour toutes les suites dont la relation de récurrence se ramène, via une transformation affine, à une récurrence de ce type. À ma connaissance, à transformation affine près, il n'existe pas d'autres relations de récurrences de degré 2 que $x_{n+1} = x_n^2$ et $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ pour lesquelles on connaisse une formule explicite.

Exercice 5

Soient $0 < a \leqslant b$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et les relations de récurrence suivantes :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune et déterminer cette limite (ou, si vous n'êtes pas à l'aise avec les limites, déterminer une expression explicite de (a_n) et (b_n), après tout c'est ça qui est le plus intéressant).

Solution de l'exercice 5

On peut montrer que les deux suites admettent une limite commune en montrant qu'elles sont adjacentes, mais on va en fait directement montrer qu'elles convergent en en déterminant une expression explicite. Celle-ci est quasiment introuvable sans l'idée de départ : comme $0 < a \leqslant b$, on peut poser $a = b\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. L'dentité qui va nous aider ici est $\dfrac{\cos\alpha + 1}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. En appliquant cette relation, on trouve successivement :

$$a_1 = b \cdot \frac{1+\cos\theta}{2} = b\cos^2\frac{\theta}{2}, \qquad b_1 = b\cos\frac{\theta}{2}\ ;$$

$$a_2 = b\cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2} = b\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}, \qquad b_2 = b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\ ;$$

Et on peut naturellement conjecturer que :

$$a_n = b\cos\frac{\theta}{2}...\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos^2\frac{\theta}{2^n}, \qquad a_n = b\cos\frac{\theta}{2}...\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n},$$

ce qui se montre facilement par récurrence par la même méthode.

À partir de ce moment là, il est déjà clair que si (b_n) converge, alors (a_n) converge vers la même limite : en effet, $a_n = b_n\cos\dfrac{\theta}{2^n}$, et $\cos\dfrac{\theta}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Il suffit donc, à partir de maintenant, d'étudier la suite (b_n).

Pour simplifier un peu l'expression de b_n, on va utiliser l'identité $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. En utilisant successivement cette identité, on trouve :

$$b_n\sin\frac{\theta}{2^n} = b\cos\frac{\theta}{2}...\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n},$$

$$b_n\sin\frac{\theta}{2^n} = \frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}...\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}},$$

$$...$$

$$b_n\sin\frac{\theta}{2^n} = \frac{b}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$b_n \sin\frac{\theta}{2^n} = \frac{b}{2^n}\sin\theta,$$

ce qui nous donne une expression explicite de b_n, $b_n = \dfrac{b\sin\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}}$. En posant $x = \dfrac{\theta}{2^n}$, on trouve donc que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n} = \lim\limits_{x\to 0}\theta\cdot\dfrac{\sin x}{x} = \theta$. On en déduit finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{b\sin\theta}{\theta}$, et comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$, donc on a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\frac{a}{b}}$.

Parfois, une bonne relation de récurrence vaut mieux qu'une expression explicite.

Exercice 6

Montrer que les nombres de Fermat, c'est-à-dire les entiers de la forme $2^{2^n}+1$ pour $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux premiers entre eux.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Posons $f_n = 2^{2^n}+1$ le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat. Les f_n sont liés par la relation de récurrence $f_{n+1} = (f_n-1)^2+1$. Pour montrer que f_n et f_m sont premiers entre eux, si $m > n$ par exemple, on va calculer f_m modulo f_n. On a $f_{n+1} \equiv (0-1)^2+1 = 2 \mod f_n$, puis on montre par récurrence que pour tout $m > n$, $f_m \equiv 2 \mod f_n$: si c'est vrai au rang m, alors $f_{m+1} \equiv (2-1)^2+1 \equiv 2 \mod f_n$. Si $m > n \geqslant 0$, on a alors $f_m = kf_n + 2$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, donc si d est un diviseur commun à f_m et f_n, alors $d \mid 2$, donc $d = 1$ puisque comme $m \geqslant 1$, f_m est impair. f_m et f_n sont donc premiers entre eux.

- 4. La suite de Fibonacci -

La suite de Fibonacci est un cas particulier particulièrement célèbre de récurrence linéaire d'ordre 2. Elle est définie de la façon suivante :

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad , F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Son polynôme caractéristique est $\chi(x) = x^2 - x - 1$, dont les racines sont $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La première des deux racines, ϕ, est le célèbre nombre d'Or. L'équation dont elle est solution montre que $\phi - 1 = \phi^{-1}$. De plus, le produit des racines de $\chi(x)$ vaut -1, donc l'autre racine est $-\phi^{-1} = 1 - \phi$.

À partir des valeurs des termes initiaux, on peut calculer les coefficients dans l'expression explicite de F_n donnée par le théorème 1. On en déduit finalement la formule de Binet :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-\phi^{-1})^n).$$

Exercice 7

Calculer les sommes $\sum_{i=0}^{n} F_i$, $\sum_{i=0}^{n} F_{2i}$, et $\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1}$.

Solution de l'exercice 7

En calculant les premières valeurs de chaque somme, on conjecture facilement que $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$, $\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1}$, et $\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}$. Ces formules se prouvent ensuite très facilement par récurrence, en utilisant la relation de récurrence définissant les F_n.

On peut aussi trouver d'autres identités entre les termes de la suite de Fibonacci. Pour cela, plusieurs méthodes sont possibles : soit par des méthodes matricielles, très pratiques et que je n'aborderai pas, mais vous pouvez trouver ces méthodes expliquées dans le Soulami ; soit des méthodes combinatoires, que vous trouverez dans le poly de ce stage, dans le cours de combinatoire avancée ; soit en utilisant la formule de Binet, méthode certes laide mais fonctionnelle, et que l'on va utiliser ici.

L'idée est de tenter de comparer des expressions dans lesquelles ϕ et $-\phi^{-1}$ sont élevées aux mêmes puissances. Par exemple, calculons $F_{n+1}F_{n-1}$ avec la formule de Binet. On a :

$$F_{n+1}F_{n-1} = \frac{1}{5}(\phi^{n+1} - (-\phi^{-1})^{n+1}))(\phi^{n-1} - (-\phi^{-1})^{n-1}))$$

$$F_{n+1}F_{n-1} = \frac{1}{5}(\phi^{2n} + (-\phi^{-1})^{2n}) + (-1)^n(\phi^2 + \phi^{-2}))$$

$$F_{n+1}F_{n-1} = \frac{1}{5}(\phi^{2n} + (-\phi^{-1})^{2n})) + (-1)^n\frac{3}{5}$$

Pour obtenir une autre formule dans laquelle les ϕ et $-\phi^{-1}$ soit élévés à la puissance $2n$, on a alors l'idée de multiplier des termes de la suite dont la somme des indices vaut $2n$. Par exemple F_n et F_n. Après un calcul du même type, on trouve que :

$$F_n^2 = \frac{1}{5}(\phi^{2n} + (-\phi^{-1})^{2n}) - (-1)^n \frac{2}{5}$$

On en déduit finalement que $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$. Ce type de formules est bien évidemment aussi démontrable par récurrence... Mais il faut déjà les connaître à l'avance !

Exercice 8

Exprimer F_{m+n} en fonction de F_{m-1}, F_m, F_n, et F_{n+1}.

Solution de l'exercice 8

On aimerait exprimer F_{m+n} comme une somme de produits du type $F_k F_l$ avec k proche de m et l proche de n. On se rend compte que c'est les termes à la puissance $k-l$ qui devront être supprimés, et on a intérêt à choisir k et l dans chaque produit de sorte que $k-l$ soit constant. D'où l'idée de calculer $F_{m-1}F_n$ et $F_m F_{n+1}$. On trouve :

$$F_{m-1}F_n = \frac{1}{5}(\phi^{m+n-1} + (-\phi^{-1})^{m+n-1} - (-1)^n(\phi^{m-n-1} + (-\phi^{-1})^{m-n-1}))\ ;$$

$$F_m F_{n+1} = \frac{1}{5}(\phi^{m+n+1} + (-\phi^{-1})^{m+n+1} - (-1)^{n+1}(\phi^{m-n-1} + (-\phi^{-1})^{m-n-1})).$$

Pour éliminer les termes parasites, on additionne les égalités précédentes. On prend soin, en même temps, de transformer tous les termes avec des puissances « proches » de $m+n$ en des termes en puissance $m+n$, quitte à faire apparaître des facteurs multiplicatifs. On obtient finalement :

$$F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} = \frac{1}{5}((\phi + \phi^{-1})\phi^{m+n} - (\phi + \phi^{-1})(-\phi^{-1})^{m+n}).$$

Puis en utilisant le fait que $\phi + \phi^{-1} = \sqrt{5}$ et en simplifiant, on obtient finalement $F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} = F_{m+n}$.

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés artihmétiques intéressantes.

Exercice 9

(1) Montrer que si $m \mid n$, alors $F_m \mid F_n$.

(2) Montrer que $\mathrm{PGCD}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{PGCD}(m,n)}$.

Solution de l'exercice 9

(1) On montre par récurrence sur k que $F_m \mid F_{km}$. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$. Si c'est vrai au rang k, alors par la formule trouvée à l'exercice précédent, on a $F_{(k+1)m} = F_{km-1}F_m + F_{km}F_{m+1}$, et chacun des deux termes de cette somme possède un facteur divisible par F_m. Donc $F_{(k+1)m}$ est aussi divisible par F_m.

Une autre méthode permet de montrer le même résultat pour toutes les suites (u_n) définies par une récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, avec a, b, et u_1 entiers, $u_0 = 0$, et dont le polynôme caractéristique a deux racines distinctes. En effet, considérons cette suite et notons r_1 et r_2 les racines de son polynôme caractéristique, et λ et μ des complexes tels que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Soit $m \geqslant 1$; on cherche à montrer que $u_m \mid u_{km}$ pour tout k. Considérons la suite $v_k = u_{km}$. Alors $v_k = \lambda(r_1^m)^k + \mu(r_2^m)^k$, donc v_k vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $x^2 - (r_1^m + r_2^m)x + (r_1r_2)^m$. Comme $r_1r_2 = -b$, le coefficient constant de ce polynôme est entier. Admettons pour l'instant que le coefficient du terme en x est aussi entier. Alors v_k vérifie une relation de récurrence du type $v_{k+2} = cv_{k+1} + dv_k$, avec c et d entiers. Comme $v_0 = 0$ et $v_1 = u_m$ sont tous les deux divisibles par u_m, il est alors immédiat par récurrence que u_m divise tous les termes de cette suite, ce qu'il fallait démontrer.

Il ne reste plus qu'à montrer que $r_1^m + r_2^m$ est entier. Si on note $w_m = r_1^m + r_2^m$, alors $w_0 = 2$ et $w_1 = a$ sont entiers. De plus, la suite (w_m) vérifie la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 que (u_n), puisqu'elle a le même polynôme caractéristique. En particulier, cette relation est à coefficients entiers, donc les termes de la suite (w_m) aussi.

(2) Déjà, il est clair, par la question précédente, que $F_{\mathrm{PGCD}(m,n)} \mid \mathrm{PGCD}(F_m, F_n)$. Il s'agit maintenant de montrer la réciproque. Pour cela, posons $d = \mathrm{PGCD}(m, n)$ et considérons $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = d$. On aimerait exprimer F_d comme une combinaison linéaire de F_{um} et F_{vn}, le problème étant que u et v ne sont pas positifs. En fait, ce n'est pas un problème, puisqu'en utilisant la formule de Binet, on peut définir F_n pour n négatif. (F_n) vérifie toujours la même relation de récurrence linéaire, même pour n négatif, et on peut en déduire par récurrence descendante que F_n est entier pour tout $n \leqslant 0$ (en initialisant en 0 et 1). De même, la formule de l'exercice 8 reste vraie pour les négatifs, puisqu'elle a été démontrée avec la formule de Binet. Enfin, le résultat de la question précédente reste lui aussi vrai, on peut le montrer par récurrence descendante en utilisant la seconde méthode. Il est donc tout à fait correct d'écrire $F_d = F_{um-1}F_{vn} + F_{um}F_{vn+1}$. $D = PGCD(F_m, F_n)$ divise F_{um} et F_{vn} par la généralisation de la question précédente, donc $D \mid F_d$, ce qui conclut la preuve.

- 5. Ensembles finis -

Considérons un ensemble fini E, et une suite (u_n) d'éléments de E vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : E \to E$ est une application. Alors u_n ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs, par le principe des tiroirs il va exister deux entiers $k < l$ tels que $u_k = u_l$. Il est alors immédiat, par récurrence, que $u_{k+n} = u_{l+n}$ pour tout $n \geqslant 0$: la suite u_n est périodique à partir d'un certain rang.

Si on suppose de plus f injective, on peut obtenir un résultat encore plus intéressant. En effet, considérons le couple (k, l) tel que $k < l$ et $u_k = u_l$, avec k minimal. Si k était supérieur où égal à 1, on aurait $f(u_{k-1}) = f(u_{l-1})$, donc par injectivité de f, $u_{k-1} = u_{l-1}$, ce qui contredirait la minimalité de k. Donc $k = 0$, et $u_n = u_{l+n}$ pour tout n : la suite (u_n) est périodique.

Exercice 10

Le palais du Minotaure est constitué d'un million de salles reliées par des couloirs. De chaque salle partent exactement trois couloirs. Le Minotaure, parti d'une des salles, parcourt son palais, en tournant alternativement à droite et à gauche dans les salles par lesquelles il passe. Montrer qu'il finira par revenir dans la salle de départ.

Solution de l'exercice 10

Notons E l'ensemble des triplets (s, p, d), où s est une salle du palais du Minotaure, p la porte par laquelle il est entré dans la salle, et d une direction (droite où gauche) ; soit $f : E \to E$ la fonction qui à un triplet (s, p, d) associe (s', p', d'), où s' est la salle dans laquelle arrive le Minotaure s'il vient de la salle s, dans laquelle il est entré par la porte p, et en prenant la direction d, p' la porte par laquelle il entré dans cette salle, et d' la direction opposée à d. On note u_n le triplet (s_n, p_n, d_n), où s_n est la salle dans laquelle se situe le Minotaure après son $n^{\text{ième}}$ déplacement, p_n la porte par laquelle il y est entré, et d_n la direction qu'il a l'intention de prendre à son déplacement suivant. On a alors clairement $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme E est fini, et f injective, on en déduit que (u_n) est périodique. En particulier, il existe un entier n tel que $u_n = u_0$; après son $n^{\text{ième}}$ déplacement, le Minotaure se retrouvera donc dans sa salle de départ.

Exercice 11

Définissons la suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$. Montrer qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que u_N et u_{N+1} soient tous les deux divisibles par 2011^{2012}.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

Posons $A = 2011^{2012}$, et réduisons tous les termes de la suite modulo A. Posons, par exemple, u'_n le reste de la division euclidienne de u_n par A. Considérons la suite des couples (u'_n, u'_{n+1}). Cette suite est à valeurs dans un ensemble fini, et la relation de récurrence qui la définit est bijective : on peut retrouver (u'_n, u'_{n+1}) en fonction de (u'_{n+1}, u'_{n+2}) (prendre pour u'_n le reste de la division euclidienne de $u'_{n+2} - u'_{n+1} - 1$ par A). Elle est donc périodique, et on peut trouver $N \geqslant 1$ tel que $(u'_N, u'_{N+1}) = (u'_0, u'_1) = (0, 0)$. N est bien l'entier recherché.

- 6. Téléscopages -

Lorsqu'on veut sommer les termes d'une suite (u_n) (ou multiplier les termes d'une suite (a_n)), il est souvent pratique de pouvoir écrire $u_n = v_{n+1} - v_n$ (ou $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$), où (v_n) et (b_n) sont des suites connues : on a alors $\displaystyle\sum_{i=k}^{l} u_i = v_{l+1} - v_k$ et $\displaystyle\prod_{i=k}^{l} a_i = \frac{b_{l+1}}{b_k}$.

Exercice 12

Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 ... a_n$. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Solution de l'exercice 12

Il est clair que pour tout $n \geqslant 2$, on a $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$, et en inversant cette relation, on obtient $\dfrac{1}{a_{n+1}-1} = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_n}$, autrement dit $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1}-1}$. En sommant, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1 + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}-1}$. Pour conclure que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2$, il suffit de montrer que $\dfrac{1}{a_{n+1}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Mais ceci est clair car la définition de (a_n) montre que $a_{n+1} \geqslant 1 + a_n$, donc que $a_n \geqslant n$ pour tout n.