DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Emmanuel LECOUTURIER
STAGE : Montpellier 2012

Equations fonctionnelles

- Énoncés -

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y, $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice 2 Trouver toutes les fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que $f(f(x)) = x$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f est monotone et $\exists n_0 \geqslant 0$ tel que $\forall x$, $f^{n_0}(x) = -x$.

Exercice 4 Soit E un ensemble fini (non vide). Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ telles que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) + f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, et pour toute bijection $\sigma : E \to E$ et toute partie A de E, $f(\sigma(A)) = f(A)$.

Exercice 5 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$.

Exercice 6 Soient P et Q deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Montrer que si $P(x) = Q(x)$ n'a pas de solutions alors $P(P(x)) = Q(Q(x))$ n'a pas de solutions.

- Corrigé -

Solution de l'exercice 1 L'idée est de se ramener à l'équation de Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Le problème est que $f(0) \neq 0$ a priori. On pose donc $g(x) = f(x) - f(0)$. Alors $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$ et $g(0) = 0$. Donc en faisant $y = 0$ il vient $g(\frac{x}{2}) = \frac{g(x)}{2}$. D'où $g(x + y) = g(x) + g(y)$ et par l'équation de Cauchy (g est continue), g est affine donc f aussi. Réciproquement les fonctions $ax+b$ sont solutions.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> f est bijective. En effet, $f(a)=f(b)$ implique $f(f(a))=a=f(f(b))=b$ et f est surjective car $f(f(x))=x$. On admet le résultat d'analyse connu qui dit qu'une fonction continue injective est tristement monotone. En l'occurrence comme $f(0)<f(1)$, on a f strictement croissante. Si il existe x tel que $f(x)<x$, alors $x=f(f(x))<f(x)$ contradiction. Si $f(x)>x$, alors $x=f(f(x))>f(x)$ contradiction. Donc $f(x)=x$ pour tout $x\in[0,1]$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Déjà, n est impair car sinon f^n est croissante et $x\to -x$ n'est pas croissante. De plus f est strictement décroissante (évident). Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $u_n(x)=f^{2n+1}(x)$ pour $n\geqslant 0$. Alors u_n est monotone car $u_{n+1}=f^2(u_n)$ et f^2 est strictement croissante : ainsi si $u_0<u_1$, alors $f(u_0)<f(u_1)$, i.e. $u_1<u_2$ et de même $u_n<u_{n+1}$. Si $u_0>u_1$, alors $u_n>u_{n+1}$ par le même argument. Comme $u_{kn_0}=-x$ pour tout $k\geqslant 0$, alors si $u_1=f(x)<-x$, il existe un plus petit indice $k\geqslant 1$ tel que $u_k<u_{k+1}$ (on a même $k<n_0$). Donc à partir de ce rang k, par le raisonnement précédent, notre suite est strictement croissante, contradiction car elle prend une infinité de fois la valeur $-x$. De même on ne peut pas avoir $f(x)>-x$ sinon la suite serait strictement croissante à partir d'un certain rang. Donc $f(x)=-x$, qui est bien une solution réciproquement.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On va montrer que les solutions sont les fonctions affines en le cardinal, i.e. de la forme $f(A)=a\cdot \mathrm{Card}(A)+b$. Déjà, si $A=\{x\}$, $f(A)$ ne dépend pas de x. En effet on a une bijection σ de E vers E telle que $\sigma(x)=y$, pour tout x et y. Posons $b=f(\emptyset)$ et $a=f(\{x\})$ pour un $x\in E$ (c'est indépendant du choix de x). Alors par récurrence sur $\mathrm{card}(A)$, $f(A)=a\cdot\mathrm{Card}(A)+b$. En effet si $x\in A$, $A=(A\setminus\{x\})\cup\{x\}$. Donc $f(A)=f(A\setminus\{x\})+f(\{x\})=a\cdot(\mathrm{Card}(A)-1)+b+a=a\cdot\mathrm{Card}(A)+b$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Pour $x=0$, $f(f(y))=y+f(0)^2$. Donc f est bijective. Soit x_0 tel que $f(x_0)=0$. Alors pour $x=x_0$ et y quelconque, $f(f(y))=y$ donc $f(0)=0$. En posant $x=f(t)$, $f(tf(t)+f(y))=y+t^2=y+f(t)^2$, donc $f(t)^2=t^2$. Donc $f(t)=t$ ou $f(t)=-t$, pour chaque t. Attention, le signe peut a priori dépendre de t.

Premier cas : $f(1)=1$. Alors pour $x=1$, $f(1+f(y))=y+1$. En élevant au carré, $(1+f(y))^2=(y+1)^2$. Si $f(y)=-y$, alors $(1-y)^2=(1+y)^2$ donc $y=0$. Donc $f=\mathrm{Id}$. De même si $f(-1)=-1$, $f(x)=-x$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Comme les polynômes sont des fonction continues sur

$\mathbb{R}$, dire que l'équation $P(x) = Q(x)$ n'a pas de solutions revient à dire que $P(x) > Q(x)$ pour tout x ou que $Q(x) > P(x)$ pour tout x (sinon considérer $P - Q$: il prend une valeur < 0 et une valeur > 0, donc par le TVI une valeur nulle). Sans perte de généralité on peut donc supposer $P > Q$. Alors $P(P(x)) > Q(P(x)) = P(Q(x))$. Si on a un x tel que $P(P(x)) = Q(Q(x))$, alors $Q(Q(x)) > P(Q(x))$, absurde car $P > Q$.