DOMAINE : Arithmétique
NIVEAU : Débutants
CONTENU : Exercices

AUTEUR : Antoine TAVENEAUX
STAGE : Cachan 2011 (junior)

Exercices d'arithmétique

"Celui qui pose une question risque cinq minutes d'avoir l'air bête, celui qui ne pose pas de questions restera bête toute sa vie". Proverbe chinois

- Énoncés -

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Exercice 1 Combien peut-il y avoir de vendredi 12 dans une année ? (au maximum ? au minimum ?) Et si l'année est bissextile ?

Exercice 2 Montrer que si (x, y, z) est une solution de l'équation suivante alors x ou y est un multiple de 2 :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Exercice 3 Écrire sous forme d'une fraction (si possible) le nombre :

$$x = 0,5\ 12341234123412341234123412341234\ldots$$

Pouvez-vous généraliser cette méthode à tous les nombres réels avec un développement périodique ? Et réciproquement ?

Exercice 4 En partant d'un nombre vous pouvez le passer au cube ou le diviser par 8. En partant du nombre 2 et avec ces deux opérations pouvez-vous atteindre 64 ? et 2^{2011} ?

Exercice 5 Montrer que parmi les nombres 1, 11, 111, 1111, ..., 111...111 (le denier contient 2011 fois le chiffre 1) au moins un est divisible par 2011.

Exercice 6 Combien y a t'il de 0 à la fin du nombre 100! ? On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Exercice 7 Un capitaine pirate a fait naufrage et on ne retrouve de lui que sa carte vitale (moderne le pirate !). Mais par manque de chance deux numéros sont effacés.

1 ?? 12 71 153 044 67

De plus, comme vous le savez, les deux derniers chiffres servent de contrôle (pour savoir si vous n'avez pas commis d'erreur). Si vous additionnez le nombre constitué des 13 premiers chiffres au nombre constitué des deux derniers chiffres vous obtenez toujours un multiple de 97. Quel est l'âge du capitaine ?

Exercice 8 Il y a 40 passagers dans un bus. ils ont sur eux des pièces de monnaie de 10,15 et 20 euros. Ils ont en tout 49 pièces de monnaie. Le prix du ticket d'autobus est égal à 5 euros. Montrer qu'il est impossible que tout le monde paye le prix du ticket et obtienne la monnaie en retour.

Exercice 9 Montrer que le nombre

$$\underbrace{111\ldots111}_{3^{3^n}\text{ fois}}$$

est divisible par 9.

Exercice 10 Le premier terme d'une suite est égal à 3^{2012}. Tout terme suivant est égal à la somme des chiffres du terme précédent. Trouver le 10-ième terme.

Exercice 11 Prouver que pour tout n entier positif la fraction

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

est irréductible.

Exercice 12 Montrer que l'équation :

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

n'a pas d'autre soltion rationnelle que $x = y = z = 0$. Indice : commencer par chercher les soltions entières.

Exercice 13 Trouver tous les entiers n tels que 2^n+3 est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 14 Déterminer les entiers n tel qu'il y ait un nombre impair de soltions (x, y) telles que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

Exercice 15 Une cellule peut se diviser en 42 ou en 44 petites cellules. Combien de divisions faut-il pour obtenir, à partir d'une cellule exactement 1993 cellules ?

- Corrigés -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Nous ne traitons que le cas de l'année non bissextile (le cas de l'année bissextile se traite exactement de la même façon). Avoir un vendredi 12 revient exactement à avoir un lundi 1, nous allons alors compter les lundis 1. De plus $31 \equiv 3 \pmod 7$, ainsi on obtient le décalage dans la semaine entre le 1 janvier et le 1 février (il est de 3 jours : si le 1 janvier est un lundi alors le 1 février sera un jeudi). On fait alors ceci pour tous les mois :

$$3 + 28 \equiv 3 \pmod 7 \text{ pour mars}$$
$$3 + 31 \equiv 6 \pmod 7 \text{ pour avril}$$
$$6 + 30 \equiv 1 \pmod 7 \text{ pour mai}$$
$$1 + 31 \equiv 4 \pmod 7 \text{ pour juin}$$
$$4 + 30 \equiv 6 \pmod 7 \text{ pour juillet}$$
$$6 + 31 \equiv 2 \pmod 7 \text{ pour août}$$
$$2 + 31 \equiv 5 \pmod 7 \text{ pour septembre}$$
$$5 + 30 \equiv 0 \pmod 7 \text{ pour octobre}$$
$$0 + 31 \equiv 3 \pmod 7 \text{ pour novembre}$$
$$3 + 30 \equiv 5 \pmod 7 \text{ pour décembre}$$

On obtient donc 2 fois 0 modulo 7, 1 fois 1, 1 fois 3, 3 fois 3, 1 fois 4, 2 fois 5 et 2 fois 6. Ainsi il n'y aura qu'un seul vendredi 12 si l'année commence par un dimanche (jour -1 de la semaine qui fait apparaitre un seul 1 dans les résidus modulo 7), un samedi ou un jeudi, il en a 2 si l'année commence par un lundi, un mardi ou un mercredi et enfin il y en aura 3 si l'année commence par un vendredi. Notez que si l'année est bissextile alors il peut avoir 4 vendredi 12.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Regardons l'équation modulo 4. Si x et y sont impairs alors on aurait $1 + 1 = z^2 \pmod 4$ ce qui est impossible car un carré ne peut pas être congru à 2 modulo 4.

Solution de l'exercice 3 On a

$$10x = 5,12341234123412341234123412341234\ldots \text{ et}$$

$$100\,000x = 51234,123412341234123412341234123412341234\ldots$$

Donc $100\,000x - 10x = 99\,990x = 51\,229$ et finalement :

$$x = \frac{51\,229}{99\,990}$$

qui est irréductible. Cette méthode se généralise facilement et montre que tout nombre qui admet un développement décimal périodique peut s'écrire sous forme d'une fraction. Et réciproquement, dans le calcul du développement décimal on a seulement un nombre fini de restes et donc le développement décimal d'une fraction est nécessairement périodique.

Solution de l'exercice 4 On peut atteindre 64 car $64 = (2^3)^3/8$. En revanche on constate qu'après toutes les opérations on obtient une puissance de 2 avec un exposant multiple de 3 et comme 2011 n'est pas divisible par 3 il est impossible d'obtenir 2^{2011}.

Solution de l'exercice 5 Si un de ces nombres est congru à 0 modulo 2011 alors on a terminé. Sinon, par le principe des tiroirs, deux des nombres (notons les a et b et on peut supposer $a > b$) ont le même reste par la division par 2011. Alors $a-b$ est divisible par 2011 mais $a-b$ est de la forme $111\ldots111000\ldots000$ et ce nombre se factorise par $111\ldots111 \times 10^k$ et donc par le lemme de Gauss, comme 2011 est premier avec 10^k alors 2011 divise $111\ldots111$ (le nombre de 1 est nécessairement inférieur à 2011 par construction).

Solution de l'exercice 6 Le problème revient à compter le nombre de facteurs 5 dans le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ (car il y a autant de 0 que de facteur 10 et clairement il y a plus de facteur 2 que de facteur 5). Tous les 5 nombres on a un facteur 5, mais tous les $5^2 = 25$ il y en a un second (il n'y en a jamais 3 dans un seul nombre car ce nombre serait supérieur à $5^3 = 125$). Il y a donc $\frac{100}{5} = 20$ facteurs 5 et $\frac{100}{25} = 4$ facteurs 25. Il y a donc $20 + 4 = 24$ fois le chiffre 0 à la fin de 100!.

Solution de l'exercice 7 On a donc

$$1??1271153044 + 67 = 0 \pmod{97}$$

$$(1??) \times 10^{10} + 1271153044 + 67 = 0 \pmod{97}$$

Or on a $10^{10} = 49 \pmod{97}$ et $1271153044 = 54 \pmod{97}$ donc on a

$$(1??) \times 49 + 54 + 67 = 0 \pmod{97}$$

Et donc :

$$(1??) \times 49 = 73 \pmod{97}$$

Et comme $49 \times 2 = 1 \pmod{97}$ donc on peut multiplier les deux membres pour obtenir :

$$(1??) = 73 \times 2 = 146 \pmod{97}$$

La seule possibilité satisfaisant cette condition est : $(1??) = 146$ Donc le capitaine est né en 1946 et en octobre 2011 le capitaine a 65 ans.

Solution de l'exercice 8 Le prix total des quarante tickets est 200 euros. Supposons le problème possible. Après avoir réglé les comptes entre eux pour faire l'appoint, chaque passager a récupéré au moins une pièce. Le règlement des tickets a donc nécessité au plus 9 pièces. Mais $9.20 = 180 < 200$.

Solution de l'exercice 9 Montrons qu'un nombre est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9, ainsi le résultat découlera immédiatement. Si en base 10 le nombre n s'écrit $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ alors

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \dots a_1.10 + a_0$$

Donc si on considère ce nombre modulo 9 on a (puisque $10 = 1 \pmod{9}$:

$$n = a_k.1^k + a_{k-1}.1^{k-1} + \dots a_1.1 + a_0 = a_k + a_{k-1} + \dots a_1 + a_0 \pmod{9}$$

Ainsi n est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 9.

Solution de l'exercice 10 D'après la correction de l'exercice précédent, on sait que tous les termes sont divisibles par 9. D'autre part $a_1 = 3^{2012} = 9^{1006} < 10^{1006}$, donc le nombre de chiffres de a_1 est inférieur à 1005 et comme chaque chiffre est inférieur à 10 on a $a_2 \leqslant 9.1005 < 10\,000$. De même $a_3 < 40$, $a_4 < 13$, et $a_5 < 10$. Donc à partir de a_5 la suite est constante et egale à 9.

Solution de l'exercice 11 On a $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$ donc par le théorème de Bezout on sait que $14n + 3$ et $21n + 4$ sont premiers entre eux et donc la fraction est irréductible.

Solution de l'exercice 12 Si on a une soltion rationnelle non nulle alors en multipliant par le cube du PPCM des dénominateurs de x, y et z alors on obtient une soltion entière non nulle. Il suffit donc de prouver le théorème pour les valeurs entières. Supposons qu'on ait un triplet d'entiers (x_0, y_0, z_0) dont au moins un est non nul qui vérifie l'équation. Si on regarde l'équation modulo 3 alors on a

$$x_0 = 0 \pmod 3$$

donc x_0 doit être multiple de 3, on peut donc noter $x_0 = 3x_1$ pour un x_1 entier. Donc l'équation devient :

$$27x_1^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 27x_1y_0z_0 = 0 \text{ donc :}$$

$$y_0 + 3z_0 + 9x_1 - 9x_1y_0z_0 = 0$$

donc une autre soltion est (y_0, z_0, x_1) et de la même façon on peut montrer que $y_0 = 3y_1$ et $z_0 = 3z_1$ avec y_1 et z_1 entiers et donc (x_1, y_1, z_1) est une nouvelle soltion. Ainsi x_0, y_0 et z_0 sont divisibles par toute puissance de 3, ce qui est impossible pour des entiers non nuls.

Solution de l'exercice 13 Un carré n'est jamais congru à 3 modulo 4 (si vous ne me croyez pas, essayez vous verrez !), donc $2^n + 3$ ne peut pas être un carré si $n \geqslant 2$. Et si $n = 1$ alors $2^1 + 3 = 5$ n'est pas un carré et si $n = 0$ alors $2^0 + 2 = 3$ est un carré. La deuxième question est moins facile. On cherche n et x, deux entiers, tels que $2^n + 1 = x^2$. Autrement dit :

$$2^n = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

donc $x+1$ et $x-1$ sont tous les deux des puissances de 2. Les seules puissances de 2 à distance 2 sont 2 et 4 donc $2^n = (x-1)(x+1) = 2.4 = 8$ donc $n = 3$ est la seule soltion.

Solution de l'exercice 14 L'équation se re-écrit :

$$(x-n)(y-n) = n^2$$

Il y a donc autant de soltions que de diviseur de n. Pour chaque diviseur a de n on peut associer un autre diviseurs n/a, ce diviseur est toujours différent si et seulement si n n'est pas un carré. Donc n a un nombre pair de diviseurs si et seulement si n n'est pas un carré. Donc l'équation précédente a un nombre impair de soltions si et seulement si n est un carré.

Solution de l'exercice 15 Chaque division ajoute à la population soit 41 soit 43 nouvelles cellules (car la cellule initiale disparait). On note a le nombre de divisions en 42 et b le nombre de divisions en 44. On doit ajouter 1992 cellule à la cellule initiale donc :

$$41a + 43b = 1992$$

Donc on a $41(a+b)+2b = 1992$ et comme $b \geqslant 0$ on a $41(a+b) \leqslant 1992$ et donc $a+b \leqslant \frac{1992}{41} = 45,8\ldots$. Mais on a aussi $43(a+b)-2a = 1992$ et comme $a \geqslant 0$ on a $43(a+b) \geqslant 1992$ et donc $a+b \geqslant \frac{1992}{43} = 46,3\ldots$. De plus $41(a+b) = 1992-2b$ montre que $a+b$ doit être pair et donc finalement comme $47 \leqslant a+b \leqslant 48$ on a que $a+b = 48$.