DOMAINE : Géométrie
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Jean-François MARTIN
STAGE : Montpellier 2013

Géométrie projective

Ce texte n'est qu'une introduction à la géometrie projective bidimensionnelle réelle, contenant les premiers résultats, sûrement les plus spectaculaires. Il n'y a pas réellement de références canoniques en géometrie projective, même si les ouvrages de Yaglom "Geometric Transformations" sont incontournables pour les transformations en tous genres... La meilleure formation reste encore la participation au club de mathématiques discrètes de Lyon !

- Plan projectif, birapport et harmonicité -

En géométrie projective, on cherche à ce que deux droites distinctes quelconques se coupent en exactement un point. Pour ce faire, on rajoute au plan une droite à l'infini, où chaque point correspond au point d'intersection d'une famille de droites parallèles. On ne distinguera plus fondamentalement deux droites concourantes et deux droites parallèles : ces dernières ont juste leur point d'intersection qui est sur la droite à l'infini.

L'objet probablement le plus intéressant en géometrie projective, celui qu'on cherchera à conserver en définissant les transformations projectives, est le birapport :

Définition 1. Soit A, B, C, D quatre points alignés. On définit leur birapport (réel) :

$$b_{A,B,C,D} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

où $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ désigne le rapport algébrique.

Remarques 2. – On remarquera que le birapport ne peut valoir 1 que dans certains cas dégén'erés.

- On peut tout à fait prendre des points à l'infini dans le calcul du birapport, avec la convention (naturelle en termes de limites) que $\frac{\infty}{\infty} = 1$.
- On a un certain nombre d'identités algébriques sur le birapport que le lecteur est invité à explorer. On utilisera par exemple à de multiples reprises des identités de la forme $b_{A,B,C,D} = b_{B,A,C,D}^{-1}$. Une autre identité intéressante est $b_{A,B,C,D} + b_{A,C,B,D} = 1$, qui, dans le cas complexe, est exactement le théorème de Ptolémée (exercice !).
- On peut facilement vérifier que la connaissance du birapport et de la position de trois des points permet d'identifier uniquement le dernier point. Ce fait sera régulièrement utilisé.
- On peut remarquer que le birapport est un cas particulier des produits cycliques de rapports (de la forme $\frac{\overline{X_1Y_1}}{\overline{X_2Y_1}} \cdot \frac{\overline{X_2Y_2}}{\overline{X_3Y_2}} \cdot ... \cdot \frac{\overline{X_nY_n}}{\overline{X_1Y_n}}$ avec $Y_i \in (X_iX_{i+1})$ pour tout i). De manière générale, le lecteur attentif pourra remarquer que la plupart des propriétés intéressantes du birapport (notamment en termes de projection) restent vrai pour les produits cycliques de rapports, ce qui conduira en particulier à la démonstration du théorème de Ceva.

Définition 3. Soient A, B, C, D alignés. Ils sont dits harmoniques si leur birapport vaut -1.

L'exemple suivant est particulièrement important et récurrent :

Exemple 4. Si M est le milieu de $[AB]$, alors A,B,M et le point à l'infini de la droite (AB) sont harmoniques.

Proposition 5. Si A, B, C et D sont harmoniques, on peut toujours supposer qu'ils sont de la forme -1, 1, x et $1/x$.

Démonstration. On peut toujours poser $A = -1$, $C = 1$, $B = x$. Il suffit ensuite par unicité du quatrième point harmonique de prouver que $b_{-1,1,x,1/x} = -1$, ce qui est un calcul aisé. □

Remarque 6. Le lecteur attentif aura remarqué le lien avec les inversions. Plus précisément, ce sont les involutions (transformations projectives complexes de la forme $z \mapsto 1/z$) qui sont ici pertinentes, en particulier dans $\mathbb{C}$ où cette propriété reste vérifiée.

Corollaire 7 (MacLaurin et Newton)**.** Soient A, B, C, D quatre points harmoniques et M le milieu de [AB].

Alors $MC \cdot MD = MB^2$ (identité de MacLaurin) et $DB \cdot DA = DC \cdot DM$ (identité de Newton).

Démonstration. C'est un simple calcul en utilisant la proposition précédente. □

Définition 8. Soient a, b, c, d quatre droites concourantes. On définit leur birapport :

$$b_{a,b,c,d} = \frac{\sin(c,a)}{\sin(c,b)} : \frac{\sin(d,a)}{\sin(d,b)}.$$

On définit comme pour les points la notion de droites harmoniques.

Proposition 9. Soit a, b, c, d concourantes en P et Δ une droite ne passant pas par P. Δ coupe a, b, c, d en A, B, C, D. (respectivement). On a $b_{a,b,c,d} = b_{A,B,C,D}$.

Démonstration. On exprime les sinus en termes d'aires algébriques que l'on simplifie ensuite en utilisant que la hauteur est la même pour tous les triangles :

$$b_{a,b,c,d} = \frac{\frac{|CPA|}{PA \cdot PC} \frac{|DPB|}{PB \cdot PD}}{\frac{|CPB|}{PB \cdot PC} \frac{|DPA|}{PA \cdot PD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

□

Corollaire 10. Si $\Delta\,'$ est une autre droite ne passant pas par P, $b_{A',B',C',D'} = b_{A,B,C,D}$: le birapport est conservé par projection.

Remarque 11. Si les quatre droites sont concourantes sur la droite à l'infini (autrement dit parallèles), l'invariance du birapport par projection découle du théorème de Thalès.

Exemple 12. Soient d et d' deux droites, de bissectrices Δ et Δ'. Alors d, d' , Δ , Δ' sont harmoniques.

Démonstration. On peut soit faire un calcul direct soit projeter sur une droite parallèle à Δ' et utiliser l'exemple 4. □

Remarque 13. On peut en utiliser l'unicité facilement montrer toutes sortes de réciproque : si on a quatre droites harmoniques, déjà une droite harmonique voire juste un angle droit, alors on est dans cette configuration.

Exercice 1 Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A, J celui de la bissectrice, M le milieu de $[BC]$ et E le point de tangence du cercle inscrit sur $[BC]$.

Montrer que $ME^2 = MJ \cdot MH$.

Solution de l'exercice 1 Soit I_A le centre du cercle exinscrit à A, et I le centre du cercle inscrit. Soit enfin A' le point de tangence du cercle exinscrit sur $[BC]$. Un calcul classique de chasse au tangente (exercice !) montre que M est le milieu de $[JA']$.

D'après l'exemple précédent, (BA), (BC), (BI) et (BI_A) sont harmoniques, donc, en projetant sur (AI) depuis B, les points A, J, I, I_A sont harmoniques.En projetant sur (BC) depuis le point à l'infini de (AH), on voit que H, J, E, A' sont harmoniques. La formule demandée n'est autre que celle de MacLaurin (après réordonnement idoine des points).

Théorème 14 (Quadrilatère complet)**.** Soit A,B, C, D quatre points, $E = (AC) \cap (BD)$, $F = (AB) \cap (DC)$, $G = (AD) \cap (BC)$, $X = (GE) \cap (AB)$ et $Y = (GE) \cap (DC)$.

Alors, A, B, X et F sont harmoniques.

Démonstration. On peut raisonner très facilement avec Ceva et Mélénaus. Mais avant tout, il faut remarquer qu'une telle figure permet de projeter très facilement.

En projetant depuis G puis depuis E, $b_{A,B,X,F} = b_{D,C,Y,F} = b_{A,B,F,X} = b^{-1}_{A,B,X,F}$.

Comme $b_{A,B,X,F} \neq 1$, $b_{A,B,X,F} = -1$ d'où la conclusion. $\square$

Remarque 15. Bien sûr, on peut trouver par projection ou par analogie de nombreux autres points/droites harmoniques. J'y ferai également référence sous le terme de théorème du quadrilatère complet. Il est important de savoir identifier immédiatement un tel diagramme.

Exercice 2 Soit ABC un triangle, D, E, F les points de tangence à (BC), (AC) et (AB) du cercle inscrit. Soit $\mathcal{C}$ un cercle tangent intérieurement au cercle inscrit, en D. Soient P et Q sur $\mathcal{C}$ tels que (BP) et (CQ) soient tangentes à $\mathcal{C}$. Montrer que (EF), (PQ) et (BC) sont concourantes.

Solution de l'exercice 2 Reformulons d'abord le problème. On a B, D, C alignés, un cercle tangent à (BC) en D, variable, et une intersection I, a priori propre au cercle (celle de (PQ) et (BC)), et il faut montrer que I est un point fixe. On a trois points fixes alignés : on peut espérer que I soit le quatrième point harmonique. C'est en fait le cas ici, comme on va le voir.

(BQ), (PC) et (MD) sont concourantes (point de Gergonne, par exemple d'après Ceva). On a donc un quadrilatère complet et I, D, B et C sont bien harmoniques.

On peut de plus définir un birapport sur le cercle (et sur n'importe quelle conique de manière générale, même si l'indépendance de P est alors moins immédiate) :

Définition 16. Soit A, B, C, D quatre points sur un cercle $\mathcal{C}$. On définit leur birapport :

$$b_{A,B,C,D} = b_{(PA),(PB),(PC),(PD)}$$

pour n'importe quel point P sur le cercle.

Cette définition est bien indépendante du point P considéré (théorème de l'angle inscrit et quelques considérations de signes).

Remarque 17. On peut vérifier que le birapport ainsi défini correspond au birapport complexe $\frac{(c-a)}{(c-b)} : \frac{(d-a)}{(d-b)}$ (qui est ici réel d'après le théorème de l'angle inscrit) grâce à la loi des sinus. C'est faux pour une conique quelconque (le birapport complexe n'étant même pas réel).

On définit comme d'habitude l'harmonicité de quatre points sur un cercle.

Il faut être extrêmement prudent sur le fait qu'on NE peut PAS utiliser la définition précédente pour P qui n'est pas sur $\mathcal{C}$. On a néanmoins la proposition suivante :

Proposition 18. Soit A, B, C, D, A', B', C', D' des points sur un cercle, tels que (AA'), (BB'), (CC') et (DD') soient concourantes.

Alors, $b_{A',B',C',D'} = b_{A,B,C,D}$.

Démonstration. Ce résultat peut se montrer directement de manière fort horrible. Ce que j'invite le lecteur courageux à faire. La méthode la plus efficace est de prendre de l'avance sur ce cours, d'utiliser une transformation projective qui envoie le cercle sur un cercle et le point de concourance soit à l'infini (auquel cas c'est clair par symétrie axiale) soit au centre du cercle (auquel cas c'est clair par symétrie centrale). □

Proposition 19. Soit P en dehors d'un cercle $\mathcal{C}$, A et B sur $\mathcal{C}$ de sorte à ce que (PA) et (PB) soit tangentes à $\mathcal{C}$ et C et D sur le cercle afin que P, C et D soient alignés.

Alors, A, B, C, D sont harmoniques.

Démonstration. On peut bien sûr encore utiliser une transformation projective, mais il y a ici une autre solution élégante.

On applique la propriété précédente aux point A, B, C, D et au point P : $b_{A,B,C,D} = b_{A,B,D,C} = b_{A,B,C,D}^{-1}$, d'où, comme $b_{A,B,C,D} \neq 1$, $b_{A,B,C,D} = -1$ et la conclusion. $\square$

Remarque 20. Comme toujours, par unicité, on a la réciproque. C'est donc bien la configuration canonique des point harmoniques sur un cercle.

Exercice 3 Soit A, B et C sur un cercle et D l'intersection (éventuellement à l'infini des tangentes en B et C).

Montrer que (AD) est la symédiane (issue de A) dans ABC, c'est-à-dire la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice.

Solution de l'exercice 3 Soit E la deuxième intersection de (AD) avec le cercle. A,E,C,B sont harmoniques, donc la tangente en A, (AD), (AC), et (AB) le sont, ainsi que les symétriques de ces droites (respectivement (AM), (AB), (AC) et d) par rapport à la bissectrice de $\hat{A}$ (dans ABC).

d est parallèle à (BC) car l'angle entre d et (AC) est le même que celui entre la tangente en A et (AB), qui vaut l'angle en C par théorème des angle inscrit. On a donc deux angles alternes-internes égaux. On projette alors sur (BC) et on obtient que M est le milieu de $[BC]$.

Exercice 4 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B, K l'intersection des tangentes à Γ_1 en A et B. Si M est sur Γ_1, on pose P l'intersection de (MA) avec Γ_2, C l'intersection de (MK) avec Γ_1 et Q l'intersection de (AC) avec Γ_2.

Montrer que (PQ) a un point fixe quand M varie sur Γ_1.

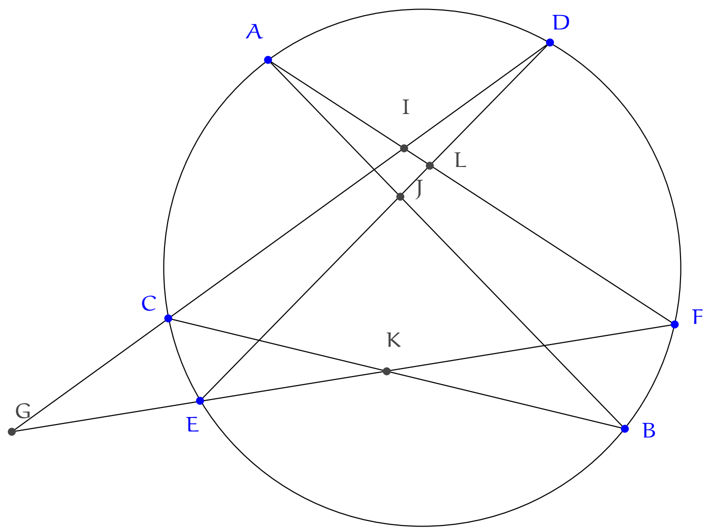
Solution de l'exercice 4 B, A, C et M sont harmoniques. En projetant depuis A, on trouve B, A', Q, P harmoniques avec A' le deuxième point d'intersection de (AK) et Γ_2.

Soit I l'intersection des tangentes à Γ_2 en B et A'. Alors (QP) passe par I, qui est le point fixe cherché.

Théorème 21 (Pascal)**.** Soit $ABCDEF$ un hexagone (pas forcément convexe) inscrit dans un cercle. Soient I, J, K les intersections respectives de (AF) et (CD), (AB) et (DE), (BC) et (EF).

Alors I, J et K sont alignés.

Démonstration.



On appelle J' l'intersection de (IK) et de (DE). On considère le birapport de E, L, J, D. Comme souvent, l'idée est de projeter pour trouver des quadruplets de même birapport, jusqu'à tomber sur E, L, J' ,D. On en déduira $J = J'$, soit I, J et K alignés.

En projetant par rapport à A puis C puis I, on trouve que $b_{E,L,J,D} = b_{E,B,F,D} = b_{E,F,K,P} = b_{E,L,J',D}$, d'où la conclusion.

$\square$

Remarque 22. Notre démonstration marche tout aussi bien avec une conique quelconque. De plus, une transformation projective permet aussi de justifier que cette généralisation est équivalente au Pascal de base.

Le théorème de Pascal est très utilisé, que ce soit en géométrie élémentaire ou en géométrie projective. L'exercice suivant est un exemple d'application parmi plein d'autres.

Exercice 5 Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit M un point de la bissectrice issue de A et A_1, B_1, C_1 les deuxièmes points d'intersections de Γ avec (AM), (BM) et (CM) respectivement. On note $P = (AB) \cap (A_1C_1)$ et $Q = (AC) \cap (A_1B_1)$.

Montrer que (PQ) est parallèle à (BC).

Solution de l'exercice 5 Cette situation a clairement un air de Pascal. On l'applique dans un premier temps naturellement à l'hexagone CA_1B_1BAC pour obtenir que P, M et Q sont alignés. Cela permet de simplifier la figure en enlevant B_1 et Q.

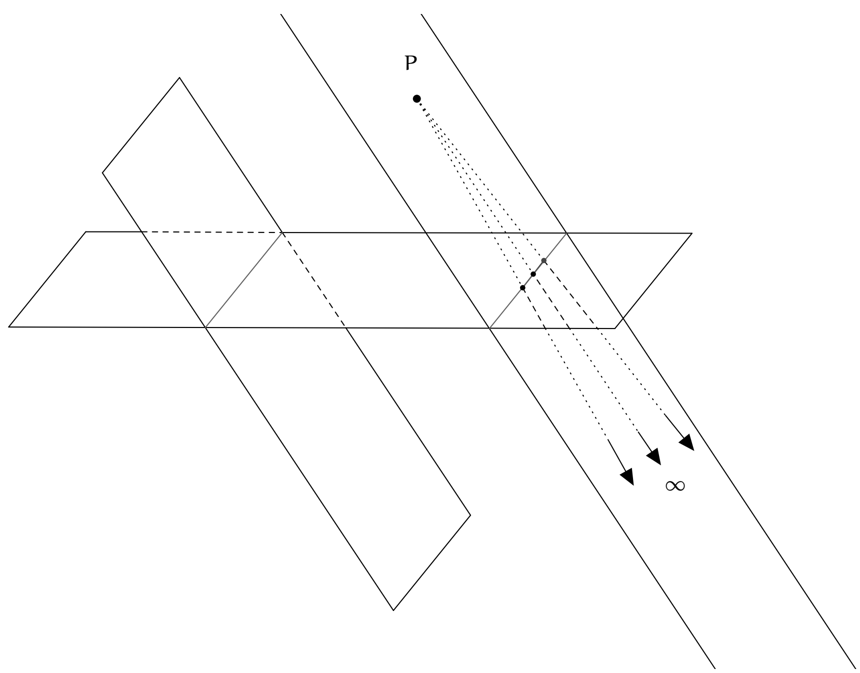
Pour prouver le parallélisme, on introduit le point Ω à l'infini de la droite (BC). Comment trouver un hexagone dont l'intersection de deux côtés opposés soit Ω ? (BC) s'impose de lui-même et la tangente en A_1 (théorème du pôle Sud...) vient ensuite naturellement. On considère alors (pour obtenir les points P et M également) l'hexagone dégéneré $A_1A_1C_1CBA$, qui montre que P, M et Ω sont alignés, d'où la conclusion.

- Transformations projectives -

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux transformations projectives bidimensionnelles réelles, c'est-à dire les transformations du plan projectif qui conserve le birapport. Elles sont clairement stables par composition. On peut prouver que toutes ces transformations sont de la forme suivante :

Définition 23. On se place en dimension 3. On appelle transformation projective toute transformation qui consiste à projeter un plan $\mathcal{P}_1$ sur un autre plan $\mathcal{P}_1$ depuis un point P (en identifiant ensuite les deux plans comme le plan projectif).

Remarque 24. On voit là tout l'intérêt de la droite à l'infini : la droite D de $\mathcal{P}_1$ telle que le plan formé par P et D soit parallèle à $\mathcal{P}_2$ est envoyé sur la droite à l'infini. Le lecteur studieux se demandera sur quoi est envoyé la droite à l'infini de $\mathcal{P}_2$...



Clairement, ces transformations conservent l'alignement. La propriété 10 permet de plus d'affirmer qu'elles conservent le birapport de quatre points.

En utilisant la propriété 9, on peut de plus remarquer qu'elles conservent le birapport de quatre droites et donc, par définition, celui de quatre points sur un cercle.

Toutefois, il faut faire très attention : les transformations projectives ne conservent ni les longueurs, ni les rapports de longueurs, ni les angles, ni les cercles qui sont envoyés en gńéral sur des coniques (preuve ?).

En contrepartie de cette mauvaise conservation des propriétés, les transformations projectives laissent énormément de liberté. Quelles sont les possibilités qu'elles nous offrent ?

Théorème 25. En projetant on peut :
- envoyer un point/une droite à l'infini
- envoyer n'importe quels quatre points en position générale sur n'importe quels quatre points (un carré par exemple).

Démonstration. Le premier point est clair d'après la remarque précédente. Intéressons-nous au deuxième point. Il suffit clairement de montrer que l'on peut envoyer n'importe quels quatre points sur un carré.

Pour ce faire on envoie les intersections des côtés opposés à l'infini de sorte qu'on a un parallélogramme, qu'on transforme en carré par une transformation affine (i.e. point de projection à l'infini). $\square$

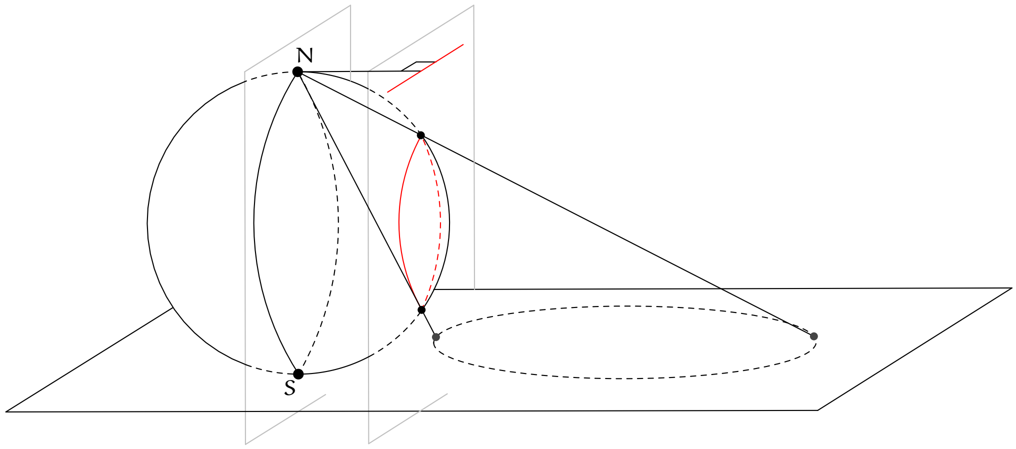
Remarque 26. Quatre points est bien la condition maximale. En effet, avec cinq points en position générale A, B, C, D et E on a déjà des birapports exprimables et qui devront être conservés. Par exemple $b_{A,B,(EC)\cap(AB),(ED)\cap(AB)}$.

Lemme 27. Considérons une sphère, son pôle Nord N et son pôle Sud S ainsi qu'un plan $\mathcal{P}$ tangent en S à la sphère. Alors, la projection stéréographique qui a un point P de la sphère associe $(PN) \cap \mathcal{P}$ conserve les cercles.

Démonstration. Ce n'est pas le plus intéressant et c'est un calvaire de faire cette démonstration sur un papier 2-dimensionnel. Le lecteur se référera donc au très bon film "Dimensions". L'idée est de regarder un cône autour du cercle que l'on souhaite projeter et d'utiliser Thalès ou des triangles semblables. $\square$

Remarque 28. La projection stéréographique serait stricto sensu plus du domaine de la géométrie projective unidimensionnelle complexe car le point N est envoyé sur un unique point à l'infini. Mais il faut en fait voir ici cette projection comme une simple astuce de calcul.

Théorème 29. En projetant on peut envoyer un cercle donné sur un cercle et une droite disjointe de ce cercle sur la droite à l'infini.



Démonstration.

Pour le voir on prend une sphère dont l'intersection avec notre plan est le cercle, de rayon la distance du centre du cercle à la droite. Il y a alors un et un seul diamètre de la sphère parallèle au plan et perpendiculaire à la droite. On l'appelle axe des pôles. L'extrémité qui fait face à la droite est dite pôle Nord, l'autre pôle Sud. On projette notre plan sur le plan tangent au pôle Sud, depuis le pôle Nord. □

Théorème 30. En projetant, on peut envoyer un cercle donné sur un cercle et un point à l'intérieur (strictement) en son centre.

Démonstration. Il est également possible de montrer cette affirmation en manipulant intelligemment la géométrie de l'espace. Mais le plus simple est ici de loin de se référer au chapitre suivant en affirmant qu'il suffit d'envoyer le cercle sur un cercle et la polaire du point considéré sur la droite à l'infini, ce que l'on peut faire d'après le théorème précédent. □

Ces théorèmes peuvent s'appliquer dans énormément de situation, tant qu'il n'y a pas trop de longueurs, de cercles ou d'angles. Le lecteur est invité à reprendre les preuves de la première partie en utilisant maintenant des transformations projectives.

Théorème 31 (Ceva)**.** Soit A, B, C un triangle et X, Y et Z des points sur (BC), (CA) et (AB) respectivement.

Alors (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes si et seulement si $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = -1$.

Démonstration. On nomme $O = (AX) \cap (BY)$.

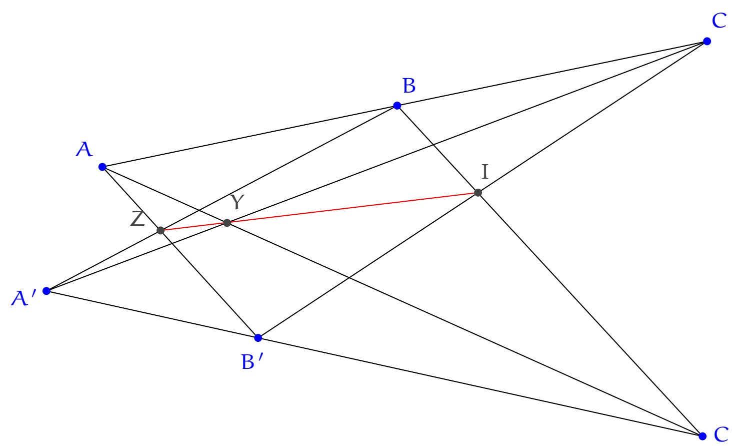
$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}}$ est un produit cyclique de rapports. Il est donc conservé par transformation projective (voire remarque 2).

On peut donc envoyer A, B, C et O sur un triangle équilatéral et son centre. Auquel cas le théorème est trivial. $\square$

Théorème 32 (Pappus)**.** Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' trois autre points alignés. On pose $X = (AB') \cap (A'B)$ $Y = (AC') \cap (A'C)$ et $Z = (BC') \cap (B'C)$.

Alors X, Y et Z sont alignés.

Démonstration.



On envoie X et Y sur la droite à l'infini. Dans la nouvelle figure, $(AB') \parallel (A'B)$ et $(AC') \parallel (A'C)$, d'où d'après Thalès, en notant P l'intersection des deux droites portant A, B, C et A', B', C' (si elles sont parallèles, c'est encore plus simple), $\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}$ et $\frac{PA}{PC'} = \frac{PA'}{PC}$, d'où $\frac{PB}{PC'} = \frac{PB'}{PC}$ et donc $(BC') \parallel (B'C)$ d'après Thalès. Z est donc sur la droite à l'infini, et en particulier il est aligné avec X et Y, d'où la conclusion. $\square$

Remarque 33. Une autre preuve consisterait à remarquer que le théorème de Pappus est exactement le théorème de Pascal dans le cas d'une conique dégénérée en deux doites. On peut donc le prouver par continuité à partir de Pascal en prenant la limite d'une suite d'hyperbole tendant vers ces deux droites.

Théorème 34 (Desargues)**.** Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles perspectifs, i.e. tels que (AA'), (BB'), (CC') soient concourantes. On pose $X = (AC) \cap (A'C')$, $Y = (BC) \cap (B'C')$ et $Z = (AB) \cap (A'B')$.

Alors, X, Y et Z sont alignés.

Démonstration. On envoie (YZ) sur la droite à l'infini. (AB) est maintenant parallèle à $(A'B')$, (BC) à $(B'C')$. Les deux triangles sont donc des agrandissements l'un de l'autre, d'où $(AC) \parallel (A'C')$, i.e. X sur la droite à l'infini et donc aligné avec Y et Z. D'où la conclusion. $\square$

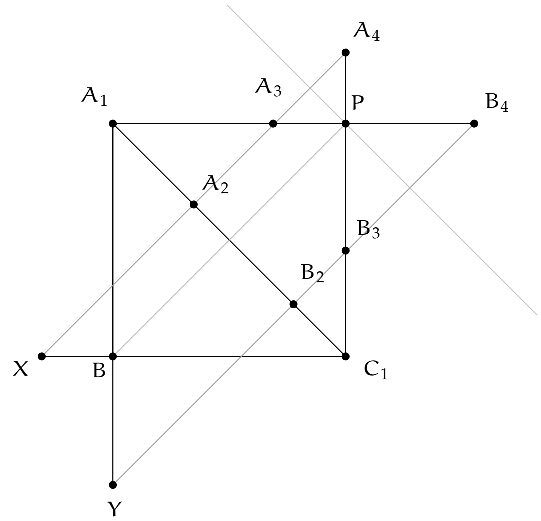
Exercice 6 Soit ABC un triangle et P un point en son intérieur. Soit A_1, B_1 et C_1 les intersections de (AP), (BP) et (CP) avec les côtés respectifs du triangle. Soit A_2 et C_2 sur (A_1C_1) tels que (AA_1) coupe $[B_1A_2]$ en son milieu et (CC_1) coupe $[B_1C_2]$ en son milieu. Soit $A_3 = (A_2B_1) \cap (CC_1)$ et $C_3 = (C_2B_1) \cap (AA_1)$.

Montrer que $(A_3C_3) \parallel (AC)$.

Solution de l'exercice 6 Une idée naturelle est d'envoyer la droite (AC) à l'infini. On obtiendra plein de droites parallèles et les milieux ne poseront pas de problèmes puisqu'ils s'exprimeront en termes de birapports.

Mais tant qu'à faire, autant profiter pleinement du degré de libreté, autant simplifier encore davantage la figure : on peut envoyer BC_1PA_1 sur un carré ! Notons X le point à l'infini de (B_1A_2), Y celui de (B_1C_2), A_4 le milieu de A_2B_1 et C_4 le milieu de C_2B_1.

Ces conditions s'écrivent $b_{B_1,A_2,A_4,X} = -1$, i.e. dans la figure projetée où B_1 est à l'infini, A_2 milieu de $[A_4X]$. De même, B_2 est milieu de $[B_4Y]$. Or, ces segments sont parallèles à la diagonale du carré donc X et Y sont sur les côtés du carrés. Finalement, on obtient que (A_3B_3) est obtenu de (A_2B_2) par la symétrie par rapport à (A_1C_1) puis par rapport à la bissectrice extérieure de C_1PA_1, donc par translation (par parallélisme des axes). D'où $(XY) \parallel (A_3B_3)$, i.e. (XY), (A_3B_3) et (AC) concourantes. Ce qui est exactement le résultat souhaité une fois revenu dans la figure de départ.



- Pôles polaires -

Définition 35. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et P un point. La polaire de P est l'ensemble des points Q tels que, si (PQ) coupe $\mathcal{C}$ en X et Y, P, Q, X et Y sont harmoniques.

Théorème 36. La polaire est une droite.

Démonstration. Tout est projectif, il suffit donc d'envoyer le cercle sur un cercle et le pôle soit à l'infini, soit au centre du cercle. □

Remarque 37. Stricto sensu, la polaire est une portion de droite dans le cas où le pôle est à l'extérieur. Mais on la prolonge à la droite entière par convention (et c'est justifié après rajout de quelques dimensions).

Théorème 38. La polaire d'un point P à l'extérieur de $\mathcal{C}$ est la droite passant par les deux points de tangences des tangentes passant par P.

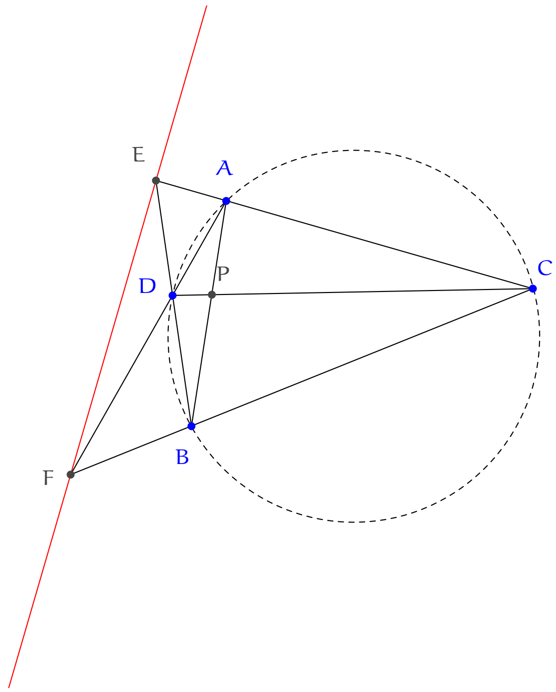
Démonstration. Trivial en prenant une corde tendant vers la tangente. □

On a un moyen général classique de construire la polaire, qu'il faut apprendre à reconnaître dans les figures :

Théorème 39. Soit A, B, C et D sur le cercle de manière à avoir A, B, P et C, D, P alignés. Soit $E = (AC) \cap (BD)$ et $F = (AD) \cap (BC)$.

Alors EF est la polaire de P.

Démonstration.



On peut soit comme précédemment utiliser une transformation projective envoyant le cercle sur un cercle et P à l'infini / sur le centre, auquel cas c'est clair par symétrie, soit utiliser le théorème du quadrilatère complet. $\square$

Finalement, la polaire a deux propriétés simples mais souvent essentielles :

Proposition 40. Soit P un point et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Alors (OP) est perpendiculaire à la polaire de P.

Démonstration. C'est clair par symétrie. $\square$

Proposition 41. P est sur la polaire de Q si et seulement si Q est sur la polaire de P.

Démonstration. C'est clair par définition si (PQ) coupe le cercle (harmonicité avec les points d'intersection). Si ce n'est pas le cas, on peut raisonner de plusieurs manières. Soit dire qu'analytiquement c'est des fonctions polynômiales donc que l'avoir montré pour ce cas suffit à généraliser, soit pratiquer une involution / inversion pour rentrer les points dans le cercle. $\square$

Exercice 7 Redémontrer la propriété 19 à l'aide des pôles et polaires. *Solution de l'exercice 7*

Soit $X = (AB) \cap (CD)$. (AB) est la polaire de P donc X est sur la polaire de P donc P, X, D et C sont harmoniques. On obtient le résultat en projetant sur le cercle à partir de A ou de B.

Exercice 8 Soit ABC un triangle, A', B' et C' les points de contact du cercle inscrit ω, D le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[AD]$. Soit N le deuxième point d'intersection de $(A'M)$ avec ω.

Montrer que le cercle circonscrit à BNC est tangent en N à ω.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Le cercle inscrit invite à considérer des pôles / polaires. Dans cet esprit, il est naturel d'introduire $A'' = (B'C') \cap (BC)$. A'' est sur la polaire $(B'C')$ de A et sur celle (BC) de A', donc sa polaire est (AA'). En particulier, en notant I le centre du cercle inscrit, $(IA'') \perp (AA')$.

On a ainsi exhibé, puisque $(AD) \perp (BC)$, des points cocyliques, d'où on déduit $\widehat{DAA'} = \widehat{IA''A'}$ et $IA'A'' \sim A'DA$. Cela permet de faire entrer le point M en jeu : en notant M' le milieu de $[AA'']$, $IA'M' \sim A'DM$. En particulier, en faisant le raisonnement inverse, $(IM') \perp (A'M)$.

Or, A' est déjà sur la polaire de M' qui est donc $(A'M)$. En particulier, $(M'N)$ est tangente à ω en N. On souhaiterait maintenant montrer qu'elle est aussi tangente à l'autre cercle. Par puissance d'un point, il suffit de montrer que $M'N^2 = M'B \cdot M'C$, i.e. $M'A'^2 = M'D \cdot M'C$. C'est la formule de MacLaurin. Il suffit donc de prouver que A'', A', B et C sont harmoniques, ce qui est vrai grâce au théorème du quadrilatère complet dans la configuration du point de Gergonne.

Exercice 9 Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. $E = (AD) \cap (BC)$ avec C entre B et E. Les diagonales s'intersectent en F. On considère le milieu M de $[CD]$ et N sur le cercle circonscrit à ABM tel que $AN/BN = AM/CM$.

Montrer que E, F et N sont colinéaires.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> La condition signifie clairement que M, N, A et B sont harmoniques (le birapport est réel, son module est 1 et ce n'est pas un cas dégénéré).

Soit $P = (AB) \cap (CD)$. Par la construction classique, (EF) est la polaire de P. On peut déjà faire disparaître la moitié de la figure.

Montrons que (après l'avoir conjecturé sur les dessins) le point d'intersection K de la polaire de P et de (DC) est sur le cercle circonscrit à ABM.

Dans un premier temps, par définition de la polaire, P, K, D et C sont harmoniques. Donc d'après la relation de Newton, $PD \cdot PC = PK \cdot PM$. D'où, en utilisant la puissance de P par rapport au cercle, $PK \cdot PM = PA \cdot PB$, ce qui prouve bien que A, B, K et M sont cocycliques.

Enfin, soit N' le second point d'intersection de la polaire avec ce cercle et X l'intersection de la polaire et de (AB). En projetant sur le cercle circonscrit à ABKM à partir de K les points harmoniques P, X, A et B, on montre que les points M, N', A et B sont harmoniques, ce qui, par unicité du quatrième point harmonique montre que $N = N'$. D'où la conclusion.

- Dualité -

La géométrie projective bidimensionnelle réelle a une caractéristique intéressante : on peut y définir deux dualités.

Dans un premier temps, une dualité intrinsèque entre points et droites.

Définition 42. Considérons un énoncé projectif ne concernant que des points et des droites. On appelle énoncé dual l'énoncé où l'on remplace chaque occurence de "points" par "droites" et réciproquement, chaque occurence de "alignés par" concourant et réciproquement, chaque occurence de "la droite passant par P et Q" par "le point d'intersection de la droite p et de la droite q".

Exemple 43. Le dual du théorème de Desargues est sa réciproque.

Théorème 44. Un énoncé projectif est vrai si et seulement si son dual est vrai.

Démonstration. Un argument est de dire que les axiomes de la géométrie projective sont fermés par passage au dual. Par exemple, on a un axiome "par tous deux points passe une unique droite" et son dual "toutes deux droites s'intersectent en un unique point".

Un autre argument est de regarder le plan projectif bidimensionnel réel comme l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3 \setminus 0;0;0$ passant par l'origine et d'interpréter la dualité en associant à une telle droite (donc un point dans l'espace projectif) le plan (donc une droite dans l'espace projectif) perpendiculaire à la droite. Cette bijection vérifie effectivement les conditions de dualité.

Enfin, le dernier argument est que c'est une conséquence de la deuxième dualité, la dualité pôle / pôlaire, en choisissant un cercle arbitraire. $\square$

La dualité est particulièrement intéressante parce qu'on a toujours deux résultats pour le prix d'un, sans avoir à faire la moindre démonstration supplémentaire.

Exercice 10 Soit a, b, c et a', b', c' deux triplets de droites concourantes. Soit x la droite joignant $a \cap b'$ et $b \cap a'$, y la droite joignant $a \cap c'$ et $c \cap a'$, z la droite joignant $b \cap c'$ et $c \cap b'$.

Montrer que x, y et z sont concourantes.

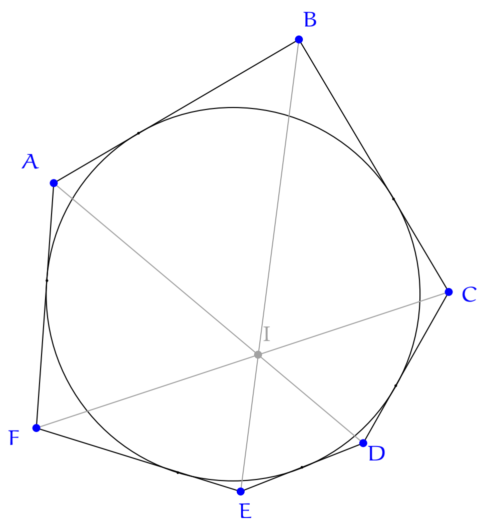
Solution de l'exercice 10 C'est le dual du théorème de Pappus.

Un cas particulier de cette dualité est la dualité pôle / polaire. Si on fixe un cercle et que l'on change une configuration en remplaçant chaque point par sa polaire et chaque droite par son pôle en écrivant l'énoncé dual, le cours sur les polaires nous assure que le problème est vrai si et seulement si le problème dualisé est vrai.

L'application type de ce principe est le théorème de Brianchon :

Théorème 45 (Brianchon)**.** Soit $\mathcal{C}$ un cercle inscrit dans un hexagone $ABCDEF$.

Montrer que (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.



Démonstration.

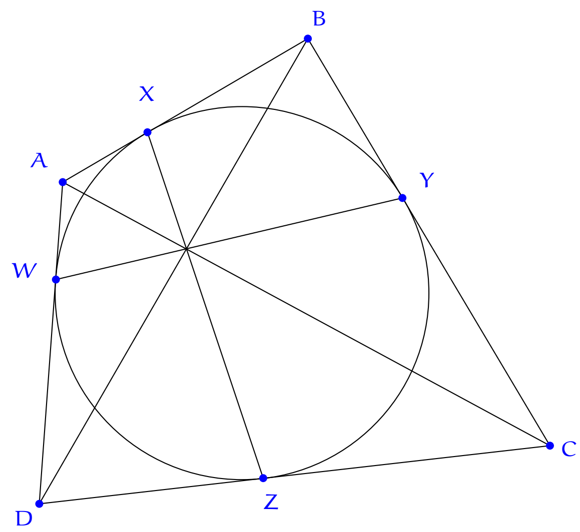
Dualisons par rapport à $\mathcal{C}$. On obtient le théorème de Pascal. D'où la conclusion. □

Le théorème de Brianchon est utile en lui-même, souvent dans des cas dégénérés.

Exercice 11 Soit $\mathcal{C}$ un cercle inscrit dans un quadrilatère $ABCD$. Soit X, Y, Z et W les points de tangence sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement.

Alors (XZ) et (YW) se coupent sur l'intersection des diagonales.

Solution de l'exercice 11



Utilisons Brianchon avec l'hexagone circonscriptible dégénéré $AXBCZD$. On obtient que (AC), (XZ) et (BD) sont concourantes.

D'où la conclusion après le raisonnement symétrique.