Corrigé du TD0 : Rappels de topologie

Exercice 1. Espaces localement connexes ⋆

1. ($\Longrightarrow$) Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe d'un ouvret U de X. Pout tout $x \in \mathcal{C}$, il existe un voisinage connexe $\mathcal{V}_x \subset U$. Par connexité, on a $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est un voisinage de chacun de ses points et un ouvert de X.

   ($\Longleftarrow$) Pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un ouvert U tels que $x \in U \subset V$. Soit $\mathcal{C}_x$ la composante connexe de U qui contient x. L'ensemble $\mathcal{B}_x = \{\mathcal{C}_x \mid x \in X\}$ fournit une base de voisinages connexes de x.

2. L'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe Γ de la fonction $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $]0, +\infty[$. Le graphe lui-même est connexe par arcs, localement connexe et localement connexe par arcs. Son adhérence est connexe, mais pas localement connexe ni connexe par arcs, à cause des points de $\{0\} \times [-1, 1]$. En effet, supposons par l'absurde que $\overline{\Gamma}$ est connexe par arcs et qu'il est existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ reliant $\gamma(0) = (0, 0)$ à $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. On considère

$$t_0 = \inf \{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) > 0\}$$

   où l'on décompose $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$. La restriction du chemin γ à l'intervalle $]t_0, 1[$ est encore continue. Cependant $\gamma_1(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0 alors que pour tout $\epsilon > 0$,

$$[-1, 1] \subset \gamma_2(]t_0, t_0 + \epsilon[) \ .$$

   De même, l'adhérence $\overline{\Gamma}$ n'est pas localement connexe. En effet, soit V est un voisinage ouvert de $(0, 0)$. Quitte à considerer son intersection avec $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$, on peut supposer que $V \subset B\left(0, \frac{1}{2}\right)$. On considère

$$t_0 = \sup\{0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \mid (t, f(t)) \in V\} \ .$$

   On note $x_0 = \sup \{0 \leq t \leq t_0 \mid f(t) = \pm 1\}$. Par construction, on peut écrire V comme la réunion de deux ouverts $V = (V \backslash U) \cup U$, où $U = f([x_0, t_0]) \cap V$ est ouvert et fermé.

3. On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

   où A_n est le segment d'extrémités $(0, \frac{1}{n})$ et $(\frac{1}{n}, 0)$, et

$$B = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n$$

   où B_n est le segment d'extrémités $(0, \frac{1}{n})$ et $(-\frac{1}{n}, 0)$. A et B sont localement connexes. En revanche, ce n'est pas le cas de

$$A \cap B = \{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}), n \geq 1\} \ .$$

Exercice 2. Écrasements et quotients ⋆

1. ($\Longrightarrow$) Si X est séparé, montrons que $(X \times X) \backslash \Delta_X$ est ouvert. Soit $(x, y) \in X \times X$ tels que $x \neq y$. Comme X est séparé, il existe des ouverts $x \in U_x$ et $y \in V_y$ tels que $U_x \cap V_y = \varnothing$. Alors $U_x \times V_y$ est un ouvert de $X \times X$ qui contient (x, y) et est disjoint de la diagonale.

   ($\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que Δ_X est fermée dans $X \times X$ et soient x, y deux points distincts de X. Comme $(X \times X) \backslash \Delta_X$ est ouvert, il existe un ouvert W de $X \times X$ tel que

$$(x, y) \in W \subset (X \times X) \backslash \Delta_X \ .$$

   Les produits $U \times V$ d'ouverts forment une base d'ouverts pour la topologie produit sur $X \times X$. Il existe donc des ouverts $x \in U_x$ et $y \in V_y$ tels que $(x, y) \in U_x \times V_y \subset (X \times X) \backslash \Delta_X$ et $U_x \cap V_y = \varnothing$.

2. Pour montrer (a), on utilise alors le fait que $\Gamma_{\mathcal{R}} = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}})$. De même, on remarque pour (b) que
$$(\pi \times \pi)(X \times X \backslash \Gamma_{\mathcal{R}}) = (X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}) \backslash \Delta_{X/\mathcal{R}} \,.$$

3. Montrons d'abord que pour chaque point $x \notin A$, on peut construire un voisinage V de A et un voisinage U de x tels que l'intersection $U \cap V$ soit vide. Pour chaque point $a \in A$, on choisit V_a voisinage de a et U_a voisinage de x tels que $V_a \cap U_a = \varnothing$. Par compacité de A, on peut choisir un sous-recouvrement fini de $\{V_a \mid a \in A\}$, que nous noterons $\{V_i \mid i = 1 \dots n\}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ et $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ conviennent.

   Soit $q : X \to X/A$ est l'application quotient. On note x_0 le point dans X/A, tel que $q(A) = \{x_0\}$. Par définition, q induit un homéomorphisme entre $X \backslash A$ et $(X/A)\backslash\{x_0\}$, de sorte que $q(U)$ est ouvert. Nous avons $q^{-1}(q(V)) = V$ et $q^{-1}(q(U)) = U$, donc $q(V)$ est un ouvert contenant x_0 et $q(U)$ est un ouvert disjoint de $q(V)$, contenant $q(x)$. Ainsi, nous avons montré qu'on peut séparer x_0 de n'importe quel point distinct de x_0.

   Soient maintenant deux points $x_1 \neq x_2$ dans $X \backslash A = (X/A)\backslash\{x_0\}$: on commence par prendre dans X, par l'argument précédent, des voisinages V_1, V_2 de A et des voisinages U_1 de x_1, U_2 de x_2 vérifiant
$$V_1 \cap U_1 = \emptyset, \quad V_2 \cap U_2 = \emptyset.$$
   Par séparation de X, quitte à réduire U_1 et U_2, on peut supposer qu'ils sont disjoints. Alors $q(U_1)$ et $q(U_2)$ sont des ouverts disjoints de X/A contenant x_1 et x_2 respectivement.

4. Prendre par exemple $A = \mathbb{Q}$ et $X = \mathbb{R}$. Puisque tout ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ intersecte $\mathbb{Q}$, tout ouvert non-vide de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ contient le point sur lequel est envoyé $\mathbb{Q}$, et deux ouverts non-vides s'intersectent donc toujours. (Plus généralement cette construction marche donc dès que A dense dans X).

Exercice 3. Exemples fondamentaux d'espaces topologiques $\star$

1. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}^n$, on écrit $||x||$ pour la norme (euclidienne) de x. On considère l'application
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{D}^n\backslash\{0\} & \longrightarrow & S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x}{||x||}\sin(\pi||x||), \cos(\pi||x||)\right) \end{array}.$$
   Cette application est bien définie et continue. Lorsque $||x|| \to 0$, sa limite est $(0, \dots, 0, 1)$, donc f induit une application continue $\mathbb{D}^n \to S^n$. Tout élément $x \in \partial\mathbb{D}^n = S^{n-1}$ est envoyé sur le point $(0, \dots, 0, -1) \in S^n$.

   Réciproquement, tout antécédent de ce point vérifie $\cos(\pi||x||) = -1$, donc $||x|| = 1$. On vérifie de plus que f induit un homéomorphisme entre l'intérieur de $\mathbb{D}^n$ et $S^n\backslash\{(0, \dots, 0, -1)\}$. Par passage au quotient, on a alors le résultat voulu.

2. Puisque $\partial\mathbb{D}^{n+1} = \mathbb{S}^n$, un point non nul de $\mathbb{D}^{n+1}$ est repéré de manière unique par un élément $\theta \in \mathbb{S}^n$ et un réel $r \in [0, 1]$ (sa norme). On considère alors l'application $\mathbb{D}^{n+1} \to C\mathbb{S}^n$ qui associe à un point non nul de $\mathbb{D}^{n+1}$ ses coordonnées polaires généralisées (θ, r), et qui envoie 0 sur la classe de $\{0\} \times \mathbb{S}^n$. C'est une application bijective, continue, donc un homéomorphisme parce que les deux espaces sont compacts.

   Par définition, on a $\Sigma\mathbb{S}^{n-1} = (C\mathbb{S}^{n-1})/(S^{n-1} \times \{1\})$. On obtient un homémomorphisme $\Sigma\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ en composant les homéomorphismes $C\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n$ et $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$.

3. On commence par montrer que les espaces (a), (b) et (c) sont bien les mêmes. Notons que dans tous les cas nous construirons des homéomorphismes.

   Si l'on voit le cercle $\mathbb{S}^1$ comme le cercle unité du plan complexe, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $x \mapsto e^{2i\pi x}$ passe au quotient en un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne le quotient de $\mathbb{R}$ sous l'action du groupe $\mathbb{Z}$ agissant par translations. Ceci donne directement l'homéomorphisme
$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

D'autre part, il y a un paramétrage du tore de révolution T_{rev} par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donné par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \to & T_{\text{rev}} \\ (\theta, \phi) & \mapsto & ((2+\cos\phi)\cos\theta, (2+\cos\phi)\sin\theta, \sin\phi) \end{array}$$

(A θ fixé, les points décrivent le cercle de centre $(2cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ et de rayon 1 obtenu en tournant celui décrit par l'énoncé d'un angle θ autour de l'axe (Oz), et à ϕ fixé, ils décrivent le cercle de centre $(0, 0, \sin\phi)$ et de rayon $2 + \cos\phi$ contenu dans le plan $z = \sin\phi$.)

Reste à relier le définition initiale du tore T à l'une de ces trois-là. T est quasi-compact comme image du compact $[0,1]^2$ par l'application quotient le définissant. L'application continue $[0,1]^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ définie par $(x, y) \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$ passe au quotient en un homeomorphisme $T \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exercice 4. Bouquets d'espaces ⋆⋆

1. Il s'agit d'identifier tous les points de l'équateur de la sphère S^n. Chaque hemisphère est homéomorphe à la boule $\overline{D}^n$ par projection sur $\mathbb{R}^n$, et si on identifie tous les points de la frontière de $\mathbb{D}^n$, on obtient le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{R}^n$, à savoir la sphère S^n.
2. Le bouquet $\vee_{i\in\mathbf{N}} S^1_i$ n'est pas compact : on peut trouver un recouvrement infini minimal en prenant par exemple un ϵ-voisinage du point de rattachement x de tous les cercles, ainsi que les complémentaires de x dans tous les cercles. En revanche, l'espace topologique H est compact : tout recouvrement ouvert de H contient un ouvert U contenant le point $(0,0)$, et donc également tous les cercles de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ pour n assez grand, de sorte que $H\backslash U$ est un fermé d'un bouquet d'un nombre fini de cercles, donc est compact.