Corrigé du TD4 : Le groupe fondamental

Exercice 1. Groupe fondamental d'un groupe topologique ⋆

1. En prenant $x = y' = 1_*$ et $x' = y = 1_\circ$, on obtient $1_* = 1_\circ := 1$. Puis $x' = y = 1$ implique que les deux lois sont égales. Si on prend $x = y'$, on obtient la commutativité. Puis $x = 1$ donne l'associativité.
2. On peut définir une deuxième loi sur le groupe fondamental d'un groupe topologique G donné par par le produit de lacets : si $\gamma, \beta : [0,1] \to G$, sont deux lacets, leur produit est
$$\gamma \circ \beta : t \mapsto \gamma(t).\beta(t) \ .$$
Il est facile de vérifier que c'est compatible à l'homotopie de lacets. Notons $\circ$ la loi induite sur $\pi_1(X, e)$ et $*$ la loi donnée par concaténation. Il est immédiat de vérifier que la relation du 1 est vérifiée et donc par le principe d'Eckmann-Hilton, le groupe fondamental de G est abélien.

Exercice 2. Groupe fondamental de certains groupes linéaires ⋆

- Groupe linéaire : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.
- Groupe spécial linéaire : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
- Groupe orthogonal : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid AA^t = \mathrm{I}_n\}$.
- Groupe spécial orthogonal : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
- Groupe linéaire complexe : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.
- Groupe unitaire : $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = \mathrm{I}_n\}$.

1. Le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. En effet, si $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice antisymétrique A telle que $M = \exp(A)$. Le chemin défini sur $[0,1]$ par $t \mapsto \exp(tA)$ relie alors I_n à M. Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a donc deux composantes connexes. Par décomposition polaire, on voit que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes et que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

   Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. On peut le voir en trigonalisant une matrice donnée et en la reliant à I_n par exemple ($\mathbb{C}^\times$ est connexe par arcs !). Le groupe $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, comme on peut le voir en remarquant que toute matrice est l'image par l'application exponentielle d'une matrice antihermitienne. De même, le groupe $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

2. On sait que $SU_2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On obtient donc un homéomorphisme avec $\mathbb{S}^3$ en envoyant chaque matrice sur sa première colonne.

3. D'après la première question, $SU_2(\mathbb{C})$ est simplement connexe puisque $\mathbb{S}^3$ l'est. Ensuite, on a un homéomorphisme
$$SU_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{S}^1 \to U_2(\mathbb{C})$$
qui à un couple (M, z) associe la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M$. Donc $\pi_1(U_2(\mathbb{C})) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Attention : l'homéomorphisme que nous avons donné n'est pas un morphisme de groupes. En fait, on a une suite exacte courte
$$1 \to SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow U_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{S}^1 \to 1,$$
qui est scindée par l'application $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc en tant que groupe, $U_2(\mathbb{C})$ est un produit semi-direct de $SU_2(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{S}^1$ (mais qui n'est pas direct !). En revanche, comme l'espace topologique sous-jacent est quand même le produit des espaces topologiques $SU_2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{S}^1$, cet isomorphisme induit l'homéomorphisme ci-dessus. Pour finir, $GL_2(\mathbb{C})$ admet une décomposition de la forme $U_2(\mathbb{C}).\mathcal{H}^+(\mathbb{C})$ où $\mathcal{H}^+(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives. Comme cet espace est contractile, $GL_2(\mathbb{C})$ se rétracte par déformation sur $U_2(\mathbb{C})$, donc son groupe fondamental est $\mathbb{Z}$ également.

4. En utilisant la même méthode que pour $SU_2(\mathbb{C})$, on trouve que $\pi_1(SO_2(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Le groupe $GL_2(\mathbb{R})$ se rétracte par déformation sur $O_2(\mathbb{R})$ (par décomposition polaire). Cette rétraction conserve le signe du déterminant, et donc $GL_2^+(\mathbb{R})$ se rétracte par déformation sur $SO_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\pi_1(GL_2^+(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(SO_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$.

   Enfin, la multiplication par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ induit un homéomorphisme entre $GL_2^+(\mathbb{R})$ et $GL_2^-(\mathbb{R})$, donc $\pi_1(GL_2^-(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Degré d'une application ⋆

1. (a) Soit α un lacet en x et $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ un chemin qui le relève. Notons $\widetilde{\gamma}$ un chemin qui relève γ. Le chemin obtenu en concaténant $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}(0) + \widetilde{\gamma}(0)$ et $\deg(\alpha) + \widetilde{\gamma}$ relève le lacet $[\gamma^{-1}\alpha\gamma]$ et il est de degré égal à $\deg(\alpha)$ ce qui prouve la commutativité du digramme.

   (b) Soient x, y deux points de $\mathbb{S}^1$ et γ un chemin qui les relient. Le résultat découle de la commutativité du diagramme suivant, où toutes les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "n_y(f)"] & \mathbb{Z} \\
\pi_1(X,y) \arrow[u] \arrow[r] & \pi_1(X,f(y)) \arrow[u] \\
\pi_1(X,x) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X,f(x)) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "n_x(f)"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

2. On utilise le fait que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

3. ($\Rightarrow$) Le lemme suivant a été démontré en cours.

   Lemme. Considérons deux applications homotopes $f, g : X \to Y$. Pour tout $x \in X$, on note γ_x un chemin d'origine $f(x)$ et d'extrémité $g(x)$. L'isomorphisme de groupe

$$\Phi_{\gamma_x} : \pi_1(Y, f(x)) \longrightarrow \pi_1(Y, g(x)), \quad [\alpha] \mapsto [\gamma_x * \alpha * (\gamma_x)^{-1}] ,$$

   induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(Y,g(x)) \\
\pi_1(Y,f(x)) \arrow[ur, "\Phi_{\gamma_x}"'] &
\end{tikzcd} .$$

   Soient $f, g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ deux applications homotopes. Le lemme et la question 1.(a) induisent un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(Y,g(x)) \arrow[d, "\deg"] \\
\pi_1(Y,f(x)) \arrow[ur, "\Phi_{\gamma_x}"] \arrow[r, "\deg"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd} .$$

On en déduit $\deg(f) = \deg(g)$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, si f est de degré nul, alors elle se relève en un lacet $\widetilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est contractile, $\widetilde{f}$ est homotope au lacet constant et donc f est homotope à l'application constante. Maintenant, si f et g sont deux applications de même degré, alors l'application $\frac{f}{g} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est de degré zéro. En effet, on a que

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) .$$

Ainsi $\frac{f}{g}$ est homotope à l'application constante et on en déduit une homotopie entre f et g.

4. Si f n'est pas surjective alors f arrive dans une certain un intervalle ouvert contractile et elle est donc homotope à une application constante. Elle est donc de degré nul par la question précédente. Contradiction. On peut trouver une application surjective de degré nul en concaténant par exemple un lacet surjectif et son opposé.
5. Soit $\widetilde{f}$ un relèvement de f. Comme f est injective et $f(I)$ est un intervalle, il est de longueur inférieure à 1. Comme elle est par ailleurs strictement monotone, on a $|\deg(f)| = 1$. La réciproque est fausse, il suffit de concaténer un lacet de degré n et un autre de degré $1 - n$.

Exercice 4. Théorème de Borsuk-Ulam ⋆⋆

1. On utilise le théorème des valeurs intermédiaires. En utilisant l'application continue $[0,1] \to \mathbb{S}^1$ qui à t associe $e^{2i\pi t}$, on se ramène à prouver que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifie $f(0) = f(1)$, alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = f(t + \frac{1}{2})$. On considère $g : t \mapsto f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$. Alors

$$g(0) + g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(0) + f(1) - f(\frac{1}{2}) = 0$$

puisque $f(0) = f(1)$. Ainsi, $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont soit tous les deux nuls, soit de signes opposés, ce qui veut dire que g s'annule sur $[0, \frac{1}{2}]$ dans tous les cas.

2. (a) On peut voir g comme une application $h : I \to \mathbb{S}^1$ telle que $h(x + \frac{1}{2}) = -h(x)$. Soit $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ un relèvement de h. Alors la condition sur h implique que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\exp\left(2i\pi\tilde{h}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = -\exp\left(2i\pi\tilde{h}(x)\right) = \exp\left(2i\pi\left(\tilde{h}(x) + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \tilde{h}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \tilde{h}(x) - \frac{1}{2}$ est continue et prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elle est donc constante égale à un certain entier m. Alors

$$\tilde{h}(1) = \tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + m = \tilde{h}(0) + 2m + 1$$

et le degré $\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0)$ est bien impair.
En particulier, h n'est pas homotope au lacet trivial.

(b) L'application g induit un morphisme de groupes $g_* : \pi_1(\mathbb{S}^2) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$. Le groupe de départ est trivial, alors que le groupe d'arrivée ne l'est pas. Soit $\iota : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ le lacet donné par l'inclusion de l'équateur dans $\mathbb{S}^2$. Alors $h = g_*\iota$, ce qui montre que l'image du morphisme g_* n'est pas triviale, et apporte une contradiction.

3. D'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe deux points antipodaux y et $-y$ donnant la même valeur à la fonction

$$x \mapsto (d(x, A), d(x, B))$$

S'il existe $D \in \{A, B\}$ tel que $d(y, D) = d(-y, D) = 0$, alors y et $-y$ appartiennent à D. Sinon, cela veut dire qu'ils appartiennent tous les deux à C. Ceci peut se généraliser à $n + 1$ fermés dans la sphère $\mathbb{S}^n$.
Le nombre de fermés est optimal dans les deux cas $n = 1$ et $n = 2$: on inscrit le cercle $\mathbb{S}^1$ dans un triangle équilatéral. On projette ensuite le triangle sur le cercle, en associant à chaque point du triangle l'unique point d'intersection du cercle avec la demi-droite d'origine le centre du cercle et passant par ce point. Cela détermine trois fermés sur le cercle, et aucun de ces fermés ne contient deux points antipodaux. Pour $n = 2$, on fait pareil avec un tétraèdre.

Exercice 5. Point base et groupe d'homotopie d'un produit ⋆⋆

1. Voir page 49 de https ://webusers.imj-prg.fr/ ilia.itenberg/enseignement/poly.pdf. Il reste à vérifier que l'application $\phi_\gamma : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, x_1)$ est un morphisme de groupes, où γ est un chemin qui relie x_0 à x_1. Soient f et g deux applications continues de I^k vers X qui envoient ∂I^k vers x_0. Soit l'homotopie définie par

$$\begin{aligned} H : [0,1]{\times}I^k &\to X \\ (t,x) \mapsto &\phi_\gamma(f+0)((2-t)s_1, s_2, \cdots, s_n), \text{ si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ &\phi_\gamma(0+g)((2-t)t_1+t-1, s_2, \cdots, s_n) \text{ si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

   C'est l'homotopie qui correspond au dessin de la page 49.

2. On commence par le cas où $k = 1$. La propriété universelle du produit d'espaces topologiques assure que la flèche suivante est une bijection

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}([0,1], \prod_{i \in I} X_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{top}([0,1], X_i) \\ \gamma \mapsto (\gamma_i)_i \end{aligned}$$

   On a donc une application surjective

$$\psi :\ \{\text{lacets dans} \prod_{i \in I} X_i, \text{de base} (x_i)_{i \in I}\} \to \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)$$

   Deux lacets γ et γ' s'envoient vers la même image si, et seulement si, il existe une famille d'homotopies $H_i : [0,1] \times [0,1] \to X_i$ telles que $H_i(0,t) = \gamma_i(t)$, $H_i(1,t) = \gamma_i'(t)$ et $H_i(s,0) = x_i$.
   L'application $H : [0,1] \times [0,1] \to \prod_{i \in I} X_i$ de composantes les H_i est alors une homotopie entre γ et γ'. Ainsi ψ se factorise en un isomorphisme de groupes

$$\pi_1\left(\prod_{i \in I}\right) \to \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)\ .$$

   On généralise cette preuve pour tous $k \geq 2$.

Exercice 6. Sphéroïdes ⋆⋆

Remarquer que le quotient de I^k où $I = [0,1]$, par son bord est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^k$, par exemple via l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : I^k &\to \mathbb{S}^k \\ (t_1, \cdots, t_n) &\mapsto \left(\frac{\sin(\pi ||t||_\infty)}{||t||} \underline{t}, \cos(\pi ||t||_\infty) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, toute application $\sigma : I^k :\to X$ qui envoie ∂I^k sur x_0 se factorise à travers une application continue pointée $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^k \to X$. Soient $\phi_i : (\mathbb{S}^k, s_0) :\to (X, x_0)$ deux applications pointées et E un équateur passant par s_0 qui sépare la sphère en deux parties A_1 et A_2. L'opération de groupe se décrit par la composition

$$\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k \xrightarrow{\phi_1 \vee \phi_2} X,$$

où la première flèche est la contraction de l'équateur. Or, on peut construire une homotopie

$$H : \mathbb{S}^k \times [0,1] \to \mathbb{S}^k.$$

qui préserve le point base s_0 et fait tourner l'équateur E. On définit alors l'application suivante $\psi(x,t) = \phi_1(x)$ si $x \in H(.,t)(A_1)$, et $\psi(x,t) = \phi_2(x)$ si $x \in H(.,t)(A_2)$. C'est une homotopie entre $\phi_1 * \phi_2$ et $\phi_2 * \phi_1$.

Exercice 7. Homotopie libre ⋆⋆⋆

On note $L(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie libre de X. Comme deux lacets homotopes sont bien entendu également librement homotopes, il y a une application bien définie

$$\pi_1(X,x) \to L(X)$$

envoyant la classe d'un lacet sur sa classe d'homotopie libre. Elle est surjective : soit γ un lacet de base un point $y \in X$, et soit $\ell : [0,1] \to X$ un chemin de x vers y. Alors γ est librement homotope au chemin $\ell\gamma\ell^{-1}$ par l'homotopie :

$$H(t,s) = \begin{cases} \ell(s+4t(1-s)) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma(4t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \ell(s+(1-s)(2-2t)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nous devons montrer que cette application est constante sur les classes de conjugaison dans $\pi_1(X,x)$. Pour cela, on peut encore utiliser l'homotopie ci-dessus. L'application ci-dessus passe donc au quotient pour donner une application bien définie des classes de conjugaison dans $\pi_1(X,x)$ vers $L(X)$. Il suffit maintenant de montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que deux lacets basés en x et librement homotopes sont conjugués dans $\pi_1(X,x)$.

Soient f_0 et f_1 deux lacets basés en x et librement homotopes, et soit $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie libre telle que $H(\cdot,0) = f_0$ et $H(\cdot,1) = f_1$. On remarque que le chemin $\gamma : t \mapsto H(0,t)$ est un lacet basé en x. Nous allons construire une homotopie de lacets entre f_0 et $\gamma f_1 \gamma^{-1}$. A temps t, cette homotopie parcourt le lacet γ de 0 à t, puis parcourt le lacet $H(\cdot,t)$, puis reparcourt γ de t à 0. Une telle homotopie est donnée par exemple par :

$$H(t,s) = \begin{cases} H(0,4st) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H(4t-1,s) & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(0,s\,(2-2t)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Remarque. Une autre manière de voir qu'un lacet et son conjugué sont librement homotopes : soient α, β deux lacets. On rappelle que par définition $\alpha\beta$ est le lacet γ qui parcourt tout α pendant une moitié du temps ($s \in [0,1/2]$), et β pendant l'autre moitié du temps ($s \in [1/2,1]$). On construit une homotopie libre entre $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ de la manière suivante : à l'instant t, l'application $H(\cdot,t)$ commence à parcourir α de t à 1, ensuite parcourt β, et puis parcourt α de 0 à t.

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha\beta(t+\frac{s}{2}) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha\beta\left(t-1+\frac{s}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi, β est librement homotope à $\alpha^{-1}\beta\alpha$.

Références

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Copyright © 2002 by Cambridge University Press. `http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf`