Corrigé du TD5 : Le théorème de Van Kampen

Une partie des exercices de cette feuille (et leurs corrections) sont extraits des chapitres 2 et 3 de [2].

Exercice 1. Présentations et abélianisés ⋆

1. On montre que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle t; t^n\rangle$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = \langle a, b; aba^{-1}b^{-1}\rangle$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle a, b; a^3, b^5, aba^{-1}b^{-1}\rangle$.
2. Pour les groupes $\langle a, b; abab^{-1}\rangle$ et $\langle u, v; u^2v^2\rangle$, on peut remarquer que ces deux groupes sont des présentations différentes du groupe fondamental de la bouteille de Klein (vue comme un quotient de $[0,1]^2$ ou comme la somme connexe de deux plans projectifs). On peut également directement construire un isomorphisme entre ces deux groupes. Considérons
$$\psi : \langle a, b; abab^{-1}\rangle \to \langle u, v; u^2v^2\rangle \quad \text{définie par} \quad \psi(a) = uv,\ \psi(b) = v^{-1} \quad \text{et}$$
$$\phi : \langle u, v; u^2v^2\rangle \to \langle a, b; abab^{-1}\rangle \quad \text{définie par} \quad \phi(u) = ab,\ \phi(v) = b^{-1}\ .$$
On vérifie que ces deux applications sont bien définies et qu'il s'agit de deux homéomorphismes de groupes inverses l'un de l'autre.
Pour $\langle a, b; a^3b^{-2}\rangle$ et $\langle u, v; uvuv^{-1}u^{-1}v^{-1}\rangle$, on considère les homéomorphismes suivants
$$\psi : \langle a, b; a^3b^{-2}\rangle \to \langle u, v; uvuv^{-1}u^{-1}v^{-1}\rangle \quad \text{définie par} \quad \psi(a) = uv,\ \psi(b) = uvu \quad \text{et}$$
$$\phi : \langle u, v; uvuv^{-1}u^{-1}v^{-1}\rangle \to \langle a, b; a^3b^{-2}\rangle \quad \text{définie par} \quad \phi(u) = a^{-1}b,\ \phi(v) = b^{-1}a^2\ .$$
3. On considère l'homéomorphisme $\varphi : \mathbb{Z}^{n-1}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to G_{ab}$ définit par
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 + a_n, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n)\ .$$
Il s'agit d'un isomorphisme d'inverse $(b_1, \ldots, b_n) \mapsto (b_1 - b_n, \ldots, b_{n-1} - b_n, b_n)$.
Plus généralement, l'abélianisé du groupe libre à n générateurs est le groupe abélien libre à n générateurs. De même, l'abélianisé d'un groupe de présentation $\langle S; R\rangle$ est le quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{|S|}$ par l'image $\pi(R)$ de R à travers la surjection canonique $\pi : \langle S\rangle \to \mathbb{Z}^{|S|}$. On montre ce résultat en vérifiant la propriété universelle.

Exercice 2. Calculs de groupes fondamentaux ⋆

1. (a) Si M est une variété, on peut choisir un voisinage V du point x_0, muni d'un homéomorphisme $\phi : V \to D$, où D est la boule ouverte de rayon 1 centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et où $\phi(x_0) = 0$. On définit alors une homotopie, $H : V \times [0,1] \to V$, par $H(x,t) = \phi^{-1}((1-t)\phi(x))$.
   (b) On note V_{x_0} et V_{y_0} les voisinages ouverts de x_0 et y_0 qui se rétractent par déformation sur $\{x_0\}$ et $\{y_0\}$ respectivement et H_{x_0}, H_{y_0} les homotopies associés. Le bouquet $X \vee Y$ admet un recouvrement ouvert formé des deux ouverts $U = X \vee V_{y_0}$ et $V = V_{x_0} \vee Y$. L'application $K : U \times [0,1] \to U$ définie par $K(x,t) = x$ pour $x \in X$ et $K(x,t) = H_{y_0}(y,t)$ pour $y \in V_{y_0}$ montre que X est un rétracte par déformation de U. De même, Y est un rétracte par déformation de V, et le point $\{[x_0] = [y_0]\}$ un rétracte par déformation de $U \cap V$. On en déduit par le théorème de Van Kampen l'égalité $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(U) * \pi_1(V) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.
2. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ est un point, donc est bien simplement connexe. Supposons maintenant maintenant que le résultat est vrai pour un $n \geq 1$. On sait que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^1\backslash\mathbb{S}^{2n+1}$ est réunion disjointe de $\mathbb{C}^n \simeq \{z_n \neq 0\}$ et $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \{z_n = 0\}$. On voudrait alors prendre un voisinage ouvert de ce dernier et appliquer Van Kampen. Regardons alors l'ouvert U qui est la projection des élèments $(z_0, \cdots, z_n) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ avec $|z_n| < \frac{1}{4}$ et soit V l'ouvert $\{z_n \neq 0\}$. Alors U se rétracte sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, donc est simplement connexe, l'intersection $U \cap V$ est connexe par arcs et V est contractile. Par Van Kampen, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

3. On rappelle qu'une variété topologique est un espace topologique séparé à base dénombrable qui admet un recouvrement par des ouverts $(U_i)_i$ tel que chaque U_i est homéomorphe à un ouvert d'un certain $\mathbb{R}^{n_i}$. La variété est dite de dimension n si pour tout i, $n_i = n$.

   Il suffit de traiter le cas où on enlève un seul point x. Soit U un ouvert autour de x homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ et $W = V\backslash\{x\}$. On applique Van-Kampen au recouvrement ouvert de V donné par W et U. Comme $W \cap U$ est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ privée d'un point et qui à on tour se rétracte sur sa frontière en projetant depuis le point enlevé. La frontière est une sphère de dimension $n-1$ et elle est donc simplement connexe pour $n \geq 3$. D'où :

$$\pi_1(V) = \pi_1(W) \times_{\pi_1(W\cap U)} \pi_1(U) \simeq \pi_1(W) \ .$$

4. Par définition, on peut écrire $SX = C^+X \cup C^-X$, où

$$C^+X := X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]/X \times \{0\}, \quad C^-X := X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]/X \times \{1\}.$$

   Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on va noter C_ε^+X (resp. C_ε^-X) un ε-voisinage ouvert de C^+X (resp. C^-X). On remarque que C^+X et C^-X sont des cônes, donc sont contractiles. En particulier, les ouverts C_ε^+X et C_ε^-X, qui se rétractent par déformation sur ces derniers, sont simplement connexes. De plus, $X_\varepsilon := C_\varepsilon^+X \cap C_\varepsilon^-X$ se rétracte par déformation sur X, qui est connexe par arcs, et donc on peut appliquer le théorème de Van Kampen. Si X est connexe par arcs et s'écrit $X = U \cup V$ avec U et V deux ouverts non-vides simplement connexes tels que $U \cap V$ soit non-vide et connexe par arcs, alors X est simplement connexe.

Exercice 3. Espaces topologiques à groupe fondamental donné $\star$

Soit X un espace connexe par arcs, $f : (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ une application pointée et $Y = X \cup_f e^n$.

1. Supposons d'abord que $n \geq 2$. On considère un recouvrement de Y par les ouverts U et V suivants. L'ouvert U est l'image dans Y de la boule ouverte de rayon $1/2$ contenu dans e^n et V est la réunion de X et de l'image du complémentaire de la boule fermée de rayon $1/4$. L'ouvert U est homéomorphe à une boule donc est contractile et $U \cap V$ a le même type d'homotopie qu'une sphère $\mathbb{S}^{n-1}$. En projetant le complémentaire de la boule de rayon $1/4$ sur son bord, on définit une équivalence d'homotopie entre V et l'espace X. Ces ouverts étant connexes par arcs, le théorème Van Kampen s'applique et donne

$$\pi_1(Y) = \pi_1(X) *_{\pi_1(\mathbb{S}^{n-1})} \pi_1(U) \ .$$

   Lorsque $n \geq 3$, les égalités $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = \pi_1(U) = 0$ entrainent l'existence d'un isomorphisme entre $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$. Lorsque $n = 2$, la formule précédente donne $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/[f]$.

   Pour $n = 1$, comme X est connexe par arcs, l'application $f : \mathbb{S}^0 \to X$ est homotope à l'application constante sur x_0. On a alors la proposition suivante.

   Proposition 2.10 Si $f, g : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ sont des application homotopes, alors les espaces $X \cup_f e^n$ et $X \cup_g e^n$ ont le même type d'homotopie.

   Proof. Voir [1, Proposition 0.18]

   Elle implique que Y a le même type d'homotopie que le bouquet $X \vee \mathbb{S}^1$. On conclut en utilisant le théorème de Van Kampen.

2. L'espace $X = \mathbb{S}^1 \cup_f e^2$, où f est une application de $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ de degré n, répond à la question.

3. Soit $G = \langle t_1, \ldots, t_n; r_1, \ldots, r_s\rangle$ un groupe de présentation finie. On note X un bouquet de n cercles, on a $\pi_1(X) = \langle t_1, \ldots t_n\rangle$. Chaque élément de $\langle t_1, \ldots t_n\rangle$ correspond à une application continue pointée de $\mathbb{S}^1$ dans X. On considère $f_1, \ldots, f_s$ des applications continues pointées de $\mathbb{S}^1$ dans X avec $[f_i] = r_i$ pour i allant de 1 à s. On ajoute à X des 2-cellules, le long de ces applications f_i pour former l'espace Y,

$$Y = (\ldots((X \cup_{f_1} e^2) \cup_{f_2} e^2) \cdots \cup_{f_s} e^2) \ .$$

   On obtient avec la question précédente $\pi_1(Y) = G$.

4. L'espace $L_{p,q}$ est défini comme quotient d'une boule E^3 par une relation d'équivalence R qui ne concerne que les points de son bord $\mathbb{S}^2$. Si on note X le quotient de $\mathbb{S}^2$ par cette relation, on a $L_{p,q} = X \cup_\pi e^3$ où $\pi : \mathbb{S}^2 \to X$ est l'application quotient. La première question implique que $\pi_1(L_{p,q}) = \pi_1(X)$. On est donc ramenés à étudier l'espace X. On note H^2_+ l'hémisphère nord de $\mathbb{S}^2$ et H^2_+/R le quotient par la relation d'équivalence précédente. Cette dernière identifie un point x du bord $\mathbb{S}^1$ de H^2_+ avec le point $e^{2\pi q/p}x$.

   L'injection $H^2_+ \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ induit un homéomorphisme $H^2_+/R \cong X$. Décomposons le cercle $\mathbb{S}^1$ en p arcs de même longueur. Dans le quotient H^2_+/R ces arcs sont identifiés et forment un cercle $\mathbb{S}^1_a$. On peut répéter le raisonnement du début : la relation d'équivalence R ne concerne que les points du bord de la boule H^2_+, l'espace quotient se décrit par

$$X \cong H^2_+/R = \mathbb{S}^1 \cup_{\pi'} e^2 \ ,$$

   où $\pi' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est l'application qui parcourt p fois le cercle. En conséquence, en utilisant la question 1, on obtient $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Pour aller plus loin ⋆ ⋆

1. Commençons par le cas $n = 2$: on enlève deux points au plans $\mathbb{R}^2$ et on voit alors la surface obtenue a le même d'homotopie qu'un bouquet de deux cercles. En particulier, le groupe fondamental est le produit libre de deux copies de $\mathbb{Z}$.

   Passons au cas général : on va construire deux ouverts U et V tels que $U\backslash A_1$ et $V\backslash A_2$ se rétractent sur $\mathbb{R}^n\backslash A_1$ et $\mathbb{R}^n\backslash A_2$ respectivement et recouvrent $\mathbb{R}^n\backslash(A_1 \cup A_2)$ et l'intersection $U\backslash A_1 \cap V\backslash A_2$ est contractile. Modulo ce résultat, on voit que $U\backslash A_1$ et $V\backslash A_2$ ont le même d'homotopie que $\mathbb{R}^n\backslash A_1$ et $\mathbb{R}^n\backslash A_2$ respectivement et on applique alors Van Kampen qui le groupe fondamental cherché est le produit libre du groupe fondamental de $\mathbb{R}^n\backslash A_1$ et de $\mathbb{R}^n\backslash A_2$. Or, on a vu que $\mathbb{R}^n\backslash A_i$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n_i-1}$ où n_i est la codimension de A_i, donc $\pi_1(\mathbb{R}^n\backslash A_i)$ est égal à $\mathbb{Z}$ si la codimension de A_i vaut 2 et trivial sinon.

   Revenons maintenant à la construction des deux ouverts U et V. Quand $n = 2$, on peut prendre deux demi-plans qui se coupent en une bande contractile. Pour n plus grand, on peut toujours supposer que A_1 est l'espace linéaire $\mathbb{R}^{n-n_i}$. Donc A_2 est contenu dans $A_1 \times \mathbb{R}^{n_1}\backslash\{0\}$. La projection de $p(A_2)$ sur $\mathbb{R}^{n_1}$ est encore un espace affine (fermé !) qui évite 0, donc de distance strictement positive à 0. On peut alors trouver T_1 et T_2 deux demi-espaces ouverts de $\mathbb{R}^{n_1}$ d'intersection une bande contractile, $T1$ contient 0 mais pas $p(A_2)$ et T_2 contient $p(A_2)$ mais pas 0 : ceci est possible car $n_1 \geq 2$. Soit $U = A_1 \times T_1$ et $V = A_1 \times T_2$: ce sont deux demi-espaces dans $\mathbb{R}^n$, $A_2 \subset V$ et vérifient les conditions souhaitées.
2. Notons U l'image de la première copie du cercle et V l'image de la seconde copie. L'intersection est contractile, donc le groupe fondamental est un groupe libre à deux générateurs.
3. Le groupe fondamental de la droite à deux origines, que l'on va noter $D_{:}$, est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Deux preuves possibles :
   - Soit C un cercle, x, x' deux points diamétralement opposés du cercle, et $U = C \setminus \{x'\}$. On choisit un homéomorphisme $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = 0$, et on recolle C sur $D_{:}$ en recollant U sur le complémentaire d'une des deux origines, suivant ϕ. L'intersection est homéomorphe à $\mathbb{R}$, contractile, et l'union homéomorphe au cercle à deux origines : le théorème de Van Kampen fournit alors

$$\pi_1(D_{:}, x) * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

     Dès lors, $\pi_1(D_{:}, x)$ est un groupe libre et en abélianisant on voit qu'il est de rang 1.
   - On peut aussi utiliser une déformation d'homotopie pour se ramener au groupe fondamental d'un cercle. Soient H^+, H^- les demi-plans fermés supérieur et inférieur respectivement. On note L^+, L^- les bords de H^+, H^-, ainsi que O^+, O^- les origines de L^+, L^-, et x^+, x^- les coordonnées de L^+, L^- respectivement. Comme H^+ (resp. H^-) se rétracte par déformation sur L^+ (resp. L^-), on sait que le groupe fondamental de la droite à deux origines est isomorphe à celui de

$H^+ \coprod H^- / \{x^+ \sim x^-,\ x \neq 0\}$. On remarque que l'inclusion $H^+ \setminus \{O^+\} \hookrightarrow H^+$ est une équivalence d'homotopie. Donc on a

$$\pi_1(D_:, x) = \pi_1\Big(\Big(H^+ \setminus \{O^+\}\Big) \coprod \Big(H^- \setminus \{O^-\}\Big) \Big/ \{x^+ \sim x^-;\ x \neq 0\}, x\Big).$$

Or l'espace à droite est $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

4. C'est le groupe libre sur $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Théorème de Brouwer ⋆⋆⋆

1. C'est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
2. On rappelle qu'une telle rétraction est une application continue $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ telle que, si $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{D}^2$ est l'inclusion, on a $r \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$. Les applications i et r induisent alors des morphismes de groupes

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{D}^2) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$$

dont la composée est l'identité, ce qui est impossible puisque $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ n'est pas trivial alors que $\pi_1(\mathbb{D}^2)$ l'est.

On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ sans point fixe. On construit alors une rétraction $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ de la manière suivante : pour tout x, on définit $r(x)$ comme l'intersection de $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ avec la demi-droite $[x, f(x)[$. Cette opération est continue car $r(x)$ peut s'exprimer par des formules variant continûment en fonction des coordonnées de x et $f(x)$. On conclut en utilisant la question précédente.

3. Il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{D}^n \to \Delta^n$. Ainsi, si $f : \Delta^n \to \Delta^n$ n'admet pas de point fixe, il en est de même pour $h^{-1} \circ f \circ h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$.
4. On appelle *face* de la triangulation chaque triangle de la triangulation, ainsi que le domaine à l'extérieur du triangle. On définit un graphe planaire de la manière suivante : l'ensemble des sommets est l'ensemble des faces. On relie deux sommets si les faces correspondantes ont une arête en commun dont une extrémité est de couleur 1 et l'autre de couleur 2. On appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arêtes qui en partent. Puisque A_1 et de couleur 1, A_2 est de couleur 2, et tout sommet de la triangulation appartenant au segment $[AB]$ est de couleur 1 ou 2, le segment $[A_1A_2]$ contient un nombre impair d'arêtes dont les extrémités sont de couleurs différentes. Ainsi, la face extérieure est de degré impair.

On rappelle le lemme des poignées de mains : pour tout graphe sans boucles (les extrémités d'une arête sont toujours distinctes) (V, E), où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes, on a

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|,$$

où $d(v)$ est le degré du sommet v. En effet, dans la somme à gauche, une arête reliant deux sommets v et v' est comptée une fois dans le terme $d(v)$, et une autre fois dans le terme $d(v')$. Cette formule implique que le nombre de sommets de degré impair est pair.

Ainsi, en appliquant cela à notre graphe, on voit qu'il existe un nombre impair de faces autres que la face extérieure qui sont de degré impair. Or, pour une face triangulaire, être de degré impair signifie exactement que les trois sommets sont de couleurs différentes.

Nous avons donc prouvé un résultat un peu plus fort : pour tout coloriage de Sperner, il existe un nombre impair (et donc en particulier non-nul) de triangles ayant leurs trois sommets de couleurs différentes.

5. Chaque point $v \in \Delta^2$ est repéré de manière unique par ses coordonnées barycentriques (a, b, c) : ce sont des réels positifs, de somme 1, tels que $v = aA_1 + bB_2 + cC_2$. On note $f(v) = (a', b', c')$ (en coordonnées barycentriques également) et on colorie v de la manière suivante :

— Si $a > a'$, on pose $c(v) = 1$
— Si $a \leq a'$ et $b > b'$, on pose $c(v) = 2$
— Si $a \leq a'$, $b \leq b'$ mais $c > c'$, on pose $c(v) = 3$.

Si on suppose que f n'a pas de point fixe, alors v est nécessairement dans l'un des cas de figure ci-dessus, et on peut le colorier. On considère une suite de triangulations $(S_k, T_k)_{k\geq 0}$ dont le diamètre (c'est-à-dire le maximum des diamètres des triangles) converge vers zéro. Pour tout k, on note $B_{1,k}B_{2,k}B_{3,k}$ un triangle tricolore de la triangulation T_k : on suppose que $c(B_{i,k}) = i$ pour $i = 1, 2, 3$. Par compacité, quitte à extraire on peut supposer que les suites $B_{1,k}$, $B_{2,k}$ et $B_{3,k}$ convergent. Puisque le diamètre du triangle $B_{1,k}B_{2,k}B_{3,k}$ tend vers 0, ces suites ont la même limite C. Soient (a, b, c) les coordonnées barycentriques de C, et (a', b', c') celles de $f(C)$. Alors
— Puisque $B_{1,k} \to C$, on a $a \geq a'$.
— Puisque $B_{2,k} \to C$, on a $a \leq a'$ et $b \geq b'$.
— Puisque $B_{3,k} \to C$, on a $b \leq b'$ et $c' \geq c$.

Ainsi, nous avons $a = a'$, $b = b'$, et puisque $a + b + c = a' + b' + c' = 1$, aussi $c = c'$, donc C est un points fixe de f.

Références

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Copyright © 2002 by Cambridge University Press.
`http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf`

[2] Félix, Yves, and Daniel Tanré. *Topologie algébrique : cours et exercices corrigés.* Dunod, 2010.