Correction du TD8 : Algèbre homologique

Exercice 1. Le lemme des cinq ⋆

1. Soit $x_3 \in G_3$ tel que $\varphi_3(x_3) = 0$. Alors on a $b_3 \circ \varphi_3(x_3) = \varphi_4 \circ a_3(x_3) = 0$. Comme φ_4 est injective par hypothèses, on en déduit que $a_3(x_3) = 0$. Or la suite est exacte donc Ker a_3 = Im a_2. Il existe donc $y_2 \in G_2$ tel que $a_2(y_2) = g$. Mais comme le diagramme est commutatif,
$$\varphi_3 \circ a_2(y_2) = \varphi_3(x_3) = b_2 \circ \varphi_2(y_2) = 0\ .$$
Comme Ker b_2 = Im b_1, il existe $z_1 \in H_1$ tel que $b_1(z_1) = \varphi_2(y_2)$. De plus φ_1 est surjective, donc il existe $u_1 \in G_1$ tel que $\varphi_1(u_1) = z_1$. On a par construction
$$b_1 \circ \varphi_1(u_1) = b_1(z_1) = \varphi_2 \circ a_1(u_1)$$
et on obtient $\varphi_2(a_1(u_1)) = \varphi_2(y_2)$. Comme par hypothèses φ_2 est injective cela implique que $y_2 = a_1(u_1)$ et $y_2 \in$ Im a_1 = Ker a_2. Ainsi, $g = a_2(y_2) = 0$ et φ_3 est injective.
2. Soit $x_3 \in H_3$. Comme φ_4 est surjective, il existe $y_4 \in G_4$ tel que $\varphi_4(y_4) = b_3(x_3)$. Par commutativité du diagramme, on a
$$\varphi_5 \circ a_4(y_4) = b_4 \circ \varphi_4(y_4) = b_4 \circ b_3(x_3) = 0\ .$$
Comme φ_5 est injective par hypothèses, on en déduit que $a_4(y_4) = 0$. Donc $y_4 \in$ Ker a_4 = Im a_3 et il existe $z_3 \in G_3$ tel que $a_3(z_3) = y_4$. Par construction, on a
$$\varphi_4 \circ a_3(z_3) = \varphi_4(y_4) = b_3 \circ \varphi_3(z_3)\ .$$
On en déduit que $b_3(x_3) = b_3 \circ \varphi_3(z_3)$ donc $x_3 - \varphi_3(z_3) \in$ Ker b_3 = Im b_2. Il existe donc $u_2 \in H_2$ tel que $b_2(u_2) = x_3 - \varphi_3(z_3)$ et comme φ_2 est surjective, on trouve également $v_2 \in G_2$ tel que $\varphi_2(v_2) = u_2$. Enfin,
$$b_2 \circ \varphi_2(v_2) = \varphi_3 \circ a_2(v_2) = x_3 - \varphi_3(z_3)\ .$$
Ainsi, $x_3 = \varphi_3(a_2(v_2) + z_3)$ et φ_3 est surjective.
3. Immédiat avec les deux questions précédentes.

Exercice 2. Le lemme du serpent ⋆

1. En considérant l'inclusion i_α du noyau Ker α de α dans A et la projection π_α de A' sur son conoyau Coker α, on a une suite exacte
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \alpha \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\alpha} A' \xrightarrow{\pi} \mathrm{Coker}\ \alpha \longrightarrow 0$$
On obtient de même une suite exacte pour β qui s'insère dans le diagramme commutatif suivant
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \alpha \arrow[r, "i_\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Coker}\ \alpha \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \beta \arrow[r, "i_\beta"] & B \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r, "\pi_\beta"] & \mathrm{Coker}\ \beta \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
Considérons $\overline{f} := f_{|\mathrm{Ker}\ \alpha}$ et $a \in$ Ker α. Alors $\beta \circ f(a) = g \circ \alpha(a) = 0$ et $f(a) \in$ Ker β. On en déduit que l'image de $\overline{f}$ est incluse dans Ker β et que $\overline{f}$: Ker $\alpha \to$ Ker β est bien défini. On a de plus que $f \circ i_\alpha = i_\beta \circ g$.
Considérons $\overline{g}$: Coker $\alpha \to$ Coker β définie par $\pi_\alpha(a) \mapsto \pi_\beta \circ g(a)$. Notons que l'application est bien définie puisque que si $a' \in A$ alors
$$g(\alpha(a')) = \beta \circ f(a') \quad \text{et} \quad \overline{g}([\alpha(a')]) = [\beta \circ f(a')] = 0\ .$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à coline.emprin@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T12.

On a de plus que $\overline{g} \circ \pi_\alpha = \pi_\beta \circ g$. Ainsi, les applications f et g s'inscrivent dans le diagramme voulu,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \text{Ker } \alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "\overline{f}"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "g"] & \text{Coker } \alpha \arrow[r] \arrow[d, "\overline{g}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \text{Ker } \beta \arrow[r, "i_\beta"] & B \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r, "\pi_\beta"] & \text{Coker } \beta \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

2. Tout d'abord, on peut compléter le diagramme comme à la question précédente :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \text{Ker } \alpha \arrow[r, "f_{|\text{Ker } \alpha}"] \arrow[d] & \text{Ker } \beta \arrow[r, "h_{|\text{Ker } \beta}"] \arrow[d] & \text{Ker } \gamma \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_\alpha"] & B' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\pi_\beta"] & C' \arrow[d, "\pi_\gamma"] & \\
 & \text{Coker } \alpha \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d] & \text{Coker } \beta \arrow[r, "\overline{k}"] \arrow[d] & \text{Coker } \gamma \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La première et la dernière ligne sont exactes puisque $\text{Im } f = \text{Ker } h$ implique $\text{Im } f_{|\text{Ker } \alpha} = \text{Ker } h_{|\text{Ker } \beta}$ et $\text{Im } g = \text{Ker } k$ implique $\text{Im } \overline{g} = \text{Ker } \overline{k}$.

On est donc ramenés à construire $\delta : \text{Ker } \gamma \to \text{Coker } \alpha$ tel que $\text{Im } h_{|\text{Ker } \beta} = \text{Ker } \delta$ et $\text{Im } \delta = \text{Ker } \overline{g}$, où $\overline{g}$ est l'application induite par g sur $\text{Coker } \alpha$. Soit $x \in \text{Ker } \gamma$. Comme h est surjective, il existe $y \in B$ tel que $h(y) = x$. Puis $\gamma(x) = 0 = k \circ \beta(y)$ donc $\beta(y) \in \text{Ker } k = \text{Im } g$. Il existe $z \in A'$ tel que $g(z) = \beta(y)$. Ce z est unique puisque g est injective. On définit $\delta(x) := \pi_\alpha(z)$.

On doit vérifier que cela ne dépend pas des choix. Soit $y' \in B$ un autre antécédent tel que $h(y') = x$. Alors $h(y - y') = 0$ et $y - y' \in \text{Ker} h \ = \text{Im } f$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(a) = y - y'$. Par commutativité, on a $g \circ \alpha(a) = \beta(y) - \beta(y')$. Ainsi, $\beta(y') = g(z - \alpha(a))$. Comme g est injective, $z - \alpha(a)$ est le seul antécédent possible de $\beta(y')$. Puisque $\pi_\alpha(z - \alpha(a)) = \pi_\alpha(z)$, on en déduit que la définition de $\delta(x)$ ne dépend pas de l'antécédent de x par h.

On obtient donc une application bien définie $\delta : \text{Ker } \gamma \to \text{Coker } \alpha$. Il reste à vérifier l'exactitude.

- $\text{Ker } \delta = \text{Im } h_{|\text{Ker } \beta}$

  Soit $b \in \text{Ker } \beta$. Alors $\beta(b) = 0$ et $g(0) = \beta(b)$. Donc $\delta(h(b)) = \pi_\alpha(0) = 0$ et $h(b) \in \text{Ker } \delta$.
  Réciproquement, si $x \in \text{Ker } \delta$, avec les notations de la construction de δ, $z \in \text{Im } \alpha$. Il existe $a \in A$ tel que $\alpha(a) = z$. Alors $g \circ \alpha(a) = \beta(y) = \beta \circ f(a)$. Donc $y - f(a) \in \text{Ker } \beta$ et $h(y - f(a)) = h(y) = x$. On en déduit que $x \in \text{Im } h_{|\text{Ker } \beta}$.
- $\text{Im } \delta = \text{Ker } \overline{g}$

  Soit $\delta(x) = \pi_\alpha(z)$. Par construction, $g(z) = \beta(y)$ donc $\overline{g} \circ \pi_\alpha(z) = \pi_\beta \circ g(z) = \pi_\beta \circ \beta(y) = 0$. Donc $\pi_\alpha(z) \in \text{Ker } \overline{g}$.
  Réciproquement, soit $\pi_\alpha(a) \in \text{Ker } \overline{g}$. Alors $g(a) = \beta(b)$ pour un certain $b \in B$ et $\delta(h(b)) = \pi_\alpha(a)$.

3. On suppose que f est injective. Soit $x \in A$ tel que $f_{|\text{Ker } \alpha}(x) = 0$. Alors on a aussi $f(x) = 0$ donc $x = 0$ et $f_{|\text{Ker } \alpha}$ est aussi injective.

   On suppose que k est surjective. Soit $\pi_\gamma(c) \in \text{Coker } \gamma$. Alors il existe $u \in B'$ tel que $k(u) = c$ par surjectivité de k. Mais alors $\overline{k} \circ \pi_\beta(u) = \pi_\gamma(c)$. On en déduit que $\overline{k}$ est également surjective.

Exercice 3. Sommes directes de complexes ⋆

Il suffit de vérifier que $\ker(\partial_n \oplus \partial'_n) = \ker(\partial_n) \oplus \ker(\partial'_n)$ et que $\mathrm{Im}(\partial_n) \oplus \mathrm{Im}(\partial_n) = \mathrm{Im}(\partial_n \oplus \partial'_n)$. On remarque que cela marche pour une somme quelconque de complexes.

Exercice 4. Complexes sur un corps ⋆

1. *Proposition 5.7 du polycopié "Topologie algébrique" de Geoffroy Horel*

   Soit Z_n le sous-espace vectoriel des cycles et $B_n \subset Z_n$ l'espace des bords. On choisit un scindement de l'espace vectoriel C_n comme $Z_n \oplus R_n$, puis un scindement de Z_n comme $B_n \oplus H_n$. En effet, un supplémentaire de B_n dans Z_n est canoniquement isomorphe au quotient $H_n = Z_n/B_n$.

   On définit alors i en degré n comme l'inclusion $H_n \to C_n$ et p comme la projection $C_n \to H_n$. On vérifie sans difficultés que p et i sont des morphismes de complexes et que $p \circ i = \mathrm{id}$.

   On construit maintenant une homotopie entre $i \circ p$ et id. Pour cela, on observe que la différentielle se restreint en un isomorphisme $R_{n+1} \cong B_n$. On définit alors $h_n : B_n \to C_{n+1}$ comme la composée de l'invrese de la différentielle avec l'inclusion $R_{n+1} \to C_{n+1}$. On définit h_n par zéro sur H_n et R_n. On peut alors calculer l'application $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$. Sur B_n et R_n cette application est l'identité. Sur H_n, cette application est nulle.

   On a donc bien construit une homotopie h entre $i \circ p$ et l'identité.

2. Pour tout complexe C_*, notons $i_*^C : C_* \to C_*$ le morphisme homotope à l'identité donné par la question précédente. La composition
   $$C_* \xrightarrow{i_*^C} C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{i_*^D} D_*$$
   est homotope à f et c'est un isomorphisme de complexes.

Exercice 5. Suites exactes courtes ⋆ ⋆

Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens.

1. $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$ sont claires. Pour $(b) \Rightarrow (a)$, définir le morphisme
   $$\begin{array}{ccc} A \oplus C & \to & B \\ (a, c) & \mapsto & f(a) + s(c) \end{array}$$
   et montrer que c'est un isomorphisme donnant le diagramme souhaité. Pour $(c) \Rightarrow (a)$ faire pareil avec
   $$\begin{array}{ccc} B & \to & A \oplus C \\ b & \mapsto & (r(b), g(b)) \end{array}$$
2. Si C est un groupe abélien libre, alors la condition (b) est satisfaite : envoyer chaque générateur de C sur n'importe lequel de ses antécédents.

Exercice 6. Exemples élémentaires de complexes ⋆ ⋆

1. On peut prendre $C_n = A_n$ pour la première question, avec $d = 0$. Pour la deuxième question, on peut écrire chaque A_n comme le quotient d'un groupe abélien libre par un sous groupe libre [1] : $0 \to F_n \to G_n \to A_n \to 0$. On définit $C_n = F_{n-1} \oplus G_n$ avec $d_n(g, f) = (0, i_{n-1}(f))$, où i_{n-1} est l'inclusion $F_{n-1} \to G_{n-1}$.
2. Considérer par exemple le complexe
   $$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \ldots.$$
   Tous ses groupes d'homologie sont nuls.

1. Regarder par exemple le livre "Algebra" de Serge Lang, page 880.

Exercice 7. Caractéristique d'Euler d'un complexe ⋆⋆

Pour tout entier $n \geq 0$, d'après le théorème du rang :

$$\dim C_n = \dim\ker d_{n-1} + \mathrm{rg}\, d_{n-1}.$$

D'autre part, par définition,

$$\dim H_n(C) = \dim\ker d_{n-1} - \mathrm{rg}\, d_n.$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_n (-1)^n \dim H_n(C) &= \sum_n (-1)^n \dim\ker d_{n-1} + \sum_n (-1)^n \mathrm{rg}\, d_n \\ &= \sum_n (-1)^n (\dim\ker d_{n-1} - \mathrm{rg}\, d_{n-1}) \\ &= \sum_n (-1)^n C_n\end{aligned}$$

Exercice 8. Cohomologie des groupes ⋆⋆⋆

1. Il faut vérifier que $\partial_{-n-1} \circ \partial_{-n} = 0$. Remarquer que dans la double somme les termes (i,j) et (j,i) se simplifient.
2. On a $C_0(G,M) \simeq M$ et $\mathrm{Ker}(\partial_0) \simeq \{x \in M, g.x_x = 0 \forall g \in G\} = M^G$.
3. Si l'action est trivial alors ∂_0 est nulle et $(\partial_{-1}.f)(g_1,g_2) = f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$.
4. On a une suite exacte courte de complexes

   $$0 \to C_*(G,M') \to C_*(G,M) \to C_*(G,M'') \to 0.$$

   Puis appliquer les résultats de l'exercice 5.