TD1 : Le langage des catégories

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆ ⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆ ⋆ ⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Premiers exemples ⋆

1. Est-ce que l'association qui à un espace vectoriel V associe son groupe des automorphismes linéaires $GL(V)$ définit un foncteur ?
2. Est-ce que l'association qui à un groupe G associe son centre $Z(G)$ définit un foncteur ?
3. Soit C une catégorie et soit S un objet de C. On note $S\backslash\mathsf{C}$ la catégorie définie comme suit.
   - Ses objets sont les couples (X, f) où X est un objet de C et où $f : S \to X$ est un morphisme.
   - Un morphisme de (X, f) vers (Y, g) est un morphisme $\varphi : X \to Y$ tel que $g = \varphi \circ f$.

   Décrire la catégorie $S\backslash\mathsf{C}$ dans le cas où $\mathsf{C} = \mathrm{Top}$ et $S = \{*\}$ et dans le cas où $\mathsf{C} = \mathrm{Ann}$ et $S = A \in \mathsf{ob}\ \mathsf{C}$.

Exercice 2. Morphismes d'une catégorie ⋆

Soit C une catégorie. Un morphisme $f : A \to B$ est un *epimorphisme* s'il est simplifiable à droite, i.e.

$$\forall g, h : B \to C,\ g \circ f = h \circ f \implies g = h\ .$$

On dit qu'un morphisme $f : A \to B$ est un *monomorphisme* s'il est simplifiable à gauche, i.e.

$$\forall g, h : C \to A,\ f \circ g = f \circ h \implies g = h\ .$$

1. Montrer que dans les catégories des ensembles, des groupes, des anneaux et des k-espaces vectoriels (pour k un corps fixé), un morphisme est un monomorphisme si et seulement s'il est injectif.
2. Montrer que dans les catégories des ensembles et des groupes, un morphisme est un épimorphisme si et seulement s'il est surjectif.
3. Donner un exemple d'épimorphisme d'anneaux non surjectif.

Exercice 3. Transformations naturelles entre foncteurs ⋆ ⋆

Soient C et D deux catégories et soient F et G deux foncteurs de C vers D. Pour tout objet $A \in \mathsf{ob}\ \mathsf{C}$, on se donne un morphisme $\Phi(A) : F(A) \to G(A)$ de D. On dit que la famille $\Phi = \{\Phi(A)\}_{A \in \mathsf{ob}\ \mathsf{C}}$ est une transformation naturelle de F vers G, notée $\Phi : F \implies G$, si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\Phi(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\Phi(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

1. Trouver une transformation naturelle entre les foncteurs suivants.
   - Soit $F : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Grp}$ le foncteur qui à tout anneau commutatif R associe ses unités $R^\times$ et à tout morphisme d'anneau $f : R \to S$ associe la restriction $R^\times \to S^\times$.
   - Soit $G : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Grp}$ le foncteur qui à tout anneau commutatif R associe le groupe $Gl_n(R)$ et à tout morphisme d'anneau $f : R \to S$ associe $\tilde{f} : Gl_n(R) \to Gl_n(S)$, l'application de f à chaque composante de la matrice d'entrée.
2. Pour tout endormorphisme u d'un espace vectoriel V, on note u^* l'endormosphime du dual V^* tel que $u^*(f) = f \circ u$. Trouver une transformation naturelle entre les foncteurs suivants.
   - Soit $D : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Vect}_k$ le fonteur qui à V associe V^{**} et à tout $u : V \to V$ associe u^{**}.
   - Soit $id : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Vect}_k$ le fonteur identité des espaces vectoriels.

Remarque : On dira que Φ est un *isomorphisme de foncteur* si pour tout $A \in \mathsf{ob}\,\mathsf{C}$, le morphisme $\Phi(A)$ est un isomorphisme. Une *équivalence de catégories* entre deux catégories C et D est la donnée de deux foncteurs $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tels que l'on ait des isomorphismes $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ et $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$.

Exercice 4. Le lemme de Yoneda ⋆⋆

Soit C une catégorie. On considère $\tilde{\mathsf{C}}$ la catégorie des foncteurs de C vers les ensembles dont les morphismes sont les transformations naturelles. Pour tout objet X de C, on note $h^X \in \mathrm{ob}\,\tilde{\mathsf{C}}$, le foncteur qui à $Y \in \mathrm{ob}\,\mathsf{C}$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\,(X, Y)$ et à $f : Y \to Z$ associe

$$f_* : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\,(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\,(X, Z)\,, \quad u \longmapsto f \circ u\ .$$

1. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur et X un objet de C. Montrer qu'il existe une bijection
$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathsf{C}}}(h^X, F) \cong F(X)\ ,$$
naturelle en X et en F.
2. En déduire que deux objets X et Y sont isomorphes dans C si et seulement si h^X et h^Y sont naturellement isomorphes.

Exercice 5. Groupoïde ⋆⋆⋆

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tout morphisme est inversible. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde.

1. Montrer que pour tout objet X de $\mathcal{G}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ est un groupe.
2. Montrer que si X et Y sont deux objets de $\mathcal{G}$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y) \neq \varnothing$ alors les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(Y, Y)$ sont isomorphes. On dit que le groupoïde $\mathcal{G}$ est *connexe* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ est non vide pour tous X, Y.
3. Soit G un groupe. On note BG le groupoïde qui a un seul objet $\bullet$ et tel que $\mathrm{Hom}_{BG}(\bullet, \bullet) = G$. Monter que si $\mathcal{G}$ est connexe, alors pour tout objet X, il existe une équivalence de catégorie entre $B\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ et $\mathcal{G}$.
4. *à traiter après le TD3* - Soit M un espace topologique. Son *groupoïde fondamental* est la catégorie $\pi(M)$ dont les objets sont les points de M et les morphismes sont les classes d'homotopie des chemins entre deux points. Montrer qu'il s'agit bien d'un groupoïde.
5. Justifier la terminologie "connexe" ci-dessus.

Exercice 6. Fonteurs représentables ⋆⋆⋆

Soit C une catégorie. Pour tout objet X de C, on note h^X le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\,(X, -)$. Un foncteur $\mathsf{C} \to \mathrm{Ens}$ est dit *représentable* s'il existe un objet X de C et un isomorphisme de foncteur entre h_X et F. Montrer que les foncteurs suivants sont représentables.

1. Le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$ qui envoie un espace topologique sur son ensemble sous-jacent.
2. Soit A un anneau et n un entier non nul. On consider le foncteur $F : \mathrm{Alg}_A \to \mathrm{Ens}$ qui envoie une A-algèbre B sur l'ensemble B^n.
3. Soit n un entier. On considère le foncteur $G : \mathrm{Gp} \to \mathrm{Ens}$ qui envoie un groupe G sur
$$G_n \coloneqq \{g \in G \mid g^n = e\}\ .$$