

TD5 : Variétés topologiques

Applications du cours ★ à préparer en l'avance et corriger en début de séance
 Pour s'entraîner et approfondir ★★ à traiter pendant la séance
 Pour aller plus loin ★★★ facultatifs

Exercice 1. Exemples de variétés topologiques ★

1. Soit $n \geq 0$. Montrer que les espaces suivants sont des variétés topologiques de dimension n .
 - (a) L'espace \mathbb{R}^n et n'importe quel ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$
 - (b) Le graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 - (c) La sphère S^n
 - (d) L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$
 - (e) La réunion disjointe $M \sqcup N$ de deux variétés topologiques M et N de dimension n
2. Montrer qu'un ouvert / une composante connexe d'une variété est une variété.
3. Montrer qu'un espace topologique est une variété de dimension 0 si et seulement si il s'agit d'un espace discret dénombrable.

Exercice 2. Produits de variétés et surfaces classiques ★

Soit M et N deux variétés topologiques de dimensions respectives m et n .

1. Montrer que le produit $M \times N$ est une variété topologique de dimension $m + n$.
2. Pour $n \geq 1$, on définit le tore de dimension n noté T^n comme le produit de n copies du cercle,

$$T^n := S^1 \times \dots \times S^1$$

Montrer que T^n est une variété topologique de dimension n .

3. Munir le ruban de möbius et la bouteille de Klein d'une structure de variété topologique.

Exercice 3. Somme connexe ★

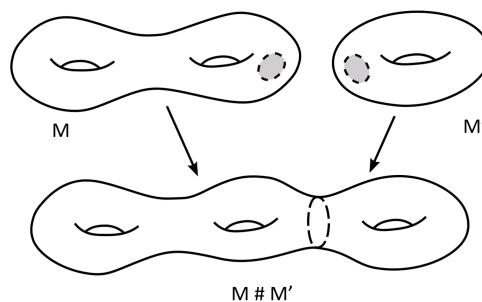
Soient M et M' deux variétés topologiques connexes de dimension $n \geq 1$.

On note $B = \overset{\circ}{\mathbb{D}}^n$ la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n , et $B_{1/2} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1/2\}$ la boule ouverte de rayon moitié et de bord $S_{1/2}$. Soient $\phi : B \rightarrow M$ et $\phi' : B \rightarrow M'$ deux homéomorphismes sur leur image et $f : \phi(S_{1/2}) \rightarrow \phi'(S_{1/2})$ la restriction de $\phi' \circ \phi^{-1}$.

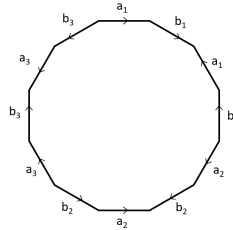
On appelle *somme connexe* de M et M' l'espace topologique obtenu par recollement de $M - \phi(B_{1/2})$ et de $M' - \phi'(B_{1/2})$ par f :

$$M \# M' = (M - \phi(B_{1/2})) \sqcup_f (M' - \phi'(B_{1/2})) .$$

On peut montrer qu'à homéomorphisme près, la somme connexe $M \# M'$ ne dépend pas du choix de ϕ, ϕ' .



1. Montrer que $M \# M'$ est une variété topologique de dimension n .
2. Si $n \geq 2$, montrer que $M \# M'$ est connexe si et seulement si M et M' sont connexes.
3. Montrer que $M \# S^n$ est homéomorphe à M .
4. Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs $\mathbb{R}P^2$ est une bouteille de Klein.
5. On note Σ_g la surface compacte de genre g introduite en cours comme le recollement d'un polygone à $4g$ le long de paires d'arrêtes. Montrer que la somme connexe de g tores \mathbb{T} est homéomorphe à Σ_g . En déduire que Σ_g est une variété topologique dimension 2.



Remarque. On peut montrer que toute surface topologique compacte connexe est homéomorphe à une sphère, à la somme connexe de $g \geq 1$ copies du tore \mathbb{T} ou à la somme connexe de $g \geq 1$ copies du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ et deux telles surfaces ne sont pas homéomorphes.

Exercice 4. Classification des variétés de dimension 1 ***

1. Montrer qu'une variété topologique compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle S^1 .
2. Montrer qu'une variété topologique connexe non compacte de dimension 1 est homéomorphe à \mathbb{R} .
3. En déduire qu'une variété topologique de dimension 1 est somme disjointe d'un ensemble dénombrable d'espaces homéomorphes à \mathbb{R} ou à S^1 .

