Théorème 13 Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ définissable. Alors
$\dim(cl(A) \setminus A) < \dim(A)$.

Dém La preuve est par induction sur n, et si $n=1$, c'est évident : si $\dim(A) = 0$, alors A est clos, et si $\dim(A) = 1$, alors $cl(A) \setminus A$ est vide ou bien consiste de points.

On suppose $n > 1$, et que le résultat est vrai pour $n-1$.
Pour $i = 1, \dots, n$, on pose

$$cl_i(A) = \{ \underset{(x_1, \dots, x_n)}{x} \in \mathbb{R}^n \mid x \in cl(\underbrace{A \cap \{y_i = x_i\}}_{\{y \in A \mid y_i = x_i\}}) \} \subseteq \pi_i^{-1}(\pi_i(A))$$

Etape 1 $\dim(cl(A) \setminus A) \leq \sup_i \dim(cl_i(A) \setminus A)$

Tout d'abord $cl_i(A) \subseteq cl(A)$ $\{x_i\} \times cl(A_{x_i}) \subseteq cl(A)$ $\forall x_i \in \pi_i(A)$

$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, projection sur la i-ème coordonnée.

$$x \in cl_i(A) \Leftrightarrow x \in cl(\pi_i^{-1}(x_i) \cap A)$$
$$\Leftrightarrow (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in cl(A_{x_i})$$

Donc $x \in cl(A) \setminus cl_i(A)$ ssi $x_i \in D_i$, D_i un ensemble fini.
Alors $x \in cl(A) \setminus \bigcup cl_i(A) = \bigcap_i (cl(A) \setminus cl_i(A))$ ssi
$x \in \prod_{i=1}^{n} D_i$, un ensemble fini.

Etape 2 $\dim(cl_i(A) \setminus A) < \dim(A)$ $\forall i$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Comme $\dim\{x \mid x_i = a_i\} = n-1$, l'HI nous donne que ou bien $cl(A \cap \{x_i = a_i\}) \setminus (A \cap \{x_i = a_i\})$ est vide, ou bien a dimension $< \dim(A \cap \{x_i = a_i\})$

Exercice Soient $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ définissables, $A \neq \emptyset$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\dim(A_x) < \dim(B_x)$, ou $A_x = \emptyset$.
Alors $\dim(A) < \dim(B)$. (Sans hyp. de gpe).

Lemme 52 (g2) Soit $C \subseteq \mathbb{R}^m$ une cellule bornée, $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ la projection sur les $(m-1)$ premières coordonnées.

Alors $\pi\, cl(C) = cl(\pi C)$.

(borné : il existe $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $C \subseteq (r_1, r_2)^m$).

Dém Soit $D = \pi C$. On suppose d'abord $C = (f, g)_D$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ continues, $f < g$ sur D. Alors $\pi\, cl(C) \subseteq cl(\pi C)$.

Soit $a \in cl(D) \setminus D$. Il existe une application définissable $\gamma : (0, \varepsilon) \to D$ telle que $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = a$. Comme C est bornée, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $-r < f(x) < g(x) < r$ pour tout $x \in D$. On pose $\lambda : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$: $\lambda(t) = \frac{1}{2}(f \circ \gamma(t) + g \circ \gamma(t))$

Alors $-r < \lambda(t) < r$, et par le théorème de monotonicité, $\lim_{t \to 0^+} \lambda(t) = s \in \mathbb{R}$. Donc $t \mapsto (\gamma(t), \lambda(t))$ est une fonction continue $(0, \varepsilon) \to C$, ayant pour limite $(a, s) \in \mathbb{R}^m$ quand $t \to 0^+$. Donc $(a, s) \in cl(C)$, $a \in \pi\, cl(C)$.

Si $C = \Gamma(f)$, $f : D \to \mathbb{R}$ continue, alors on utilise le fait que f est bornée pour déduire que $\lim_{t \to 0^+} f \circ \gamma(t) = s \in \mathbb{R}$. Et on conclut pareillement.

Remarque $f : X \to Y$ continue, Y Hausdorff ($=$ séparé, $= T2$) alors $\Gamma(f)$ est fermé dans $X \times Y$.

Lemme 53 $X \subset \mathbb{R}^m$ fermé borné, $f : X \to \mathbb{R}^n$ définissable continue. Alors $f(X)$ est borné dans $\mathbb{R}^n$.

Dém Ops $n = 1$. Sinon on aurait pour tout $t \in \mathbb{R}$ un $x \in X$ tel que $|f(x)| > t$. Par choix définissable, il existe une fonction définissable $g : \mathbb{R}^{>0} \to X$ telle que $|f \circ g(t)| > t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{>0}$.

Par monotonicité, g est continue sur un intervalle $(r, +\infty)$. Comme X est borné et fermé, Nous avons alors $\lim_{t \to +\infty} g(t) \in X$.

Cela donne une contradiction :

$$\lim_{t \to +\infty} f \circ g(t) = f\left(\lim_{t \to +\infty} g(t)\right) \in \mathbb{R}$$

mais $\lim_{t \to +\infty} |f \circ g(t)| = +\infty \notin \mathbb{R}$.

<u>Proposition 54</u> Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue définissable, avec $X \subseteq \mathbb{R}^m$ fermé borné. Alors $f(X)$ est fermé borné.

<u>Dém</u> Nous savons que $f(X)$ est borné, il faut montrer qu'il est fermé.

On sait que $\Gamma(f)$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}^n$, et donc dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ puisque X est fermé. D'autre part l'application $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(x,y) \mapsto (y,x)$ est un homeomorphisme. Donc $Y = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{n+m}$. Si $Y = C_1 \cup \dots \cup C_k$ est une décomposition cellulaire de Y, et $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées, alors $\pi\, cl(C_i)$ est fermé (induction sur m + lemme) et $Y = \bigcup cl(C_i)$, d'où $\pi Y = \bigcup cl(\pi C_i)$ est fermé. Mais $\pi(Y) = f(X)$.

<u>Cor 55</u> Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue définissable, X fermé borné non vide. Alors f atteint ses valeurs maximales et minimales.

<u>Cor 56</u> Soit $f : X \to \mathbb{R}^n$ continue injective definissable, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ fermé borné. Alors f est un homéomorphisme entre X et $f(X)$.

En effet f envoie les fermés de X sur des fermés de $f(X)$, et donc les ouverts de X sur des ouverts de $f(X)$.

<u>Cor</u> 57 Soit $f : X \to R^n$ continue définissable, $X \subseteq R^m$ fermé borné, et $Y = f(X)$.

(a) Un sous-ensemble définissable $S \subseteq Y$ est fermé si et seulement si $f^{-1}(S)$ est fermé.

(b) Une application définissable $g : Y \to R^p$ est continue si et seulement si $g \circ f : X \to R^p$ est continue

<u>Proposition</u> 58 Soit $X \subseteq R^m$ définissable, fermé et borné. Si $Y \subseteq R^n$ est définissable alors la projection $q : X \times Y \to Y$ envoie les sous-ensembles définissables fermés de $X \times Y$ sur des sous-ensembles fermés de Y.

<u>Dém</u> Soit $A \subseteq X \times Y$ définissable fermé, et $y \in cl_Y(q(A))$. Pour chaque $t > 0$, il existe $a \in A$ tel que

$$|q(a) - y| < t$$

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \sup \{ |x_i| \}.$$

Par choix définissable et monotonicité, il existe une application continue définissable $\alpha : (0, \varepsilon) \to A$ telle que $|q \circ \alpha(t) - y| < t \quad \forall t \in (0, \varepsilon)$.

Ecrivons $\alpha(t) = (\underset{X}{\beta(t)}, \underset{Y}{\gamma(t)})$. Alors $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = y$.

Comme X est borné, $\lim_{t \to 0^+} \beta(t) \overset{= x}{\in} R^m$, et est dans X car X est fermé. Donc $(x, y) \in X \times Y$, $\lim_{t \to 0^+} \alpha(t) = (x, y)$ et donc $(x, y) \in A$ puisque A est fermé dans $X \times Y$.

Donc $y \in q(A)$

Chemins définissables $(R,+,-,0,1,<,\dots)$

Soit $X \subseteq R^m$. Un chemin définissable de X est une application continue $\gamma : [a,b] \to X \subseteq R^m$, avec $a<b$, $a,b \in R$. On dira que γ relie les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Si $\gamma : [a,b] \to X$ et $\delta : [b',c'] \to X$ sont de chemins définissables tels que $\gamma(b) = \delta(b')$, alors $\gamma \cup \delta' ; [a,c] \to X$ est un chemin définissable.

avec $c = b + (c'-b')$.
$\delta'(t) = \delta(t+b'-b)$

<u>Proposition</u> 59 Soit $X \subseteq R^m$ un ensemble définissable et définissablement connexe. Si $a,b \in X$ alors il existe un chemin définissable reliant a et b. [Je dirai : X est connexe par arc (définissable)]

<u>Dém</u> On suppose d'abord que $X = C$ est une cellule, et la preuve est par induction sur m. Si $m=1$, c'est évident. Pour $m>1$, soit π la projection sur les $(m-1)$ premières coordonnées, et $D = \pi(X)$.

Si $C = \Gamma(f)$ c'est clair : on prend γ_1 reliant $\pi(a)$ et $\pi(b)$, et on définit $\gamma : [c,d] \to C$ par $\gamma(t) = (\gamma_1(t), f \circ \gamma_1(t))$.

définie sur $[c,d]$

Si $C = (f,g)_D$, on prend γ_1 comme ci-dessus, on définit $\lambda(t) : [c,d] \to C$ par $\lambda(t) = (\gamma_1(t), \frac{1}{2}(f\circ\gamma_1(t), g\circ\gamma_1(t)))$

Puis on considère le chemin obtenu en mettant bout à bout les chemins suivants :

$\gamma_0 : [0, |a_m - \frac{1}{2}(f(\pi a) + g\pi(a))|] \to C$

$(a = (\pi(a), a_m))$ qui est contenu dans $\pi^{-1}\pi(a) \cap C$, et relie a et $\lambda\pi(a)$

λ, qui relie $\lambda(\pi(a))$ et $\lambda\pi(b)$

et γ_2 : $\left[0, \left| b_m - \frac{1}{2}(f(\pi b)+g(\pi b))\right|\right]$ qui relie $\lambda\pi(b)$ ~~et~~ b.

Pour le cas général, on prend une décomposition cellulaire $C_1, \dots, C_k$ de X. Pour $I \subset \{1, \dots, k\}$ on pose $C_I = \bigcup_{i \in I} C_i$. On choisit I maximal tel que C_I soit connexe par arc définissable. Nous allons montré que C_I est fermé dans X. En effet, si $a \in cl_X(C_I)$, alors il existe $\gamma : (0, \varepsilon) \to C_I$ définissable continue telle que $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = a$. On définit $\gamma' : [0, \varepsilon/2] \to X$ en posant $\gamma'(t) = \gamma(t)$ pour $t > 0$, $\gamma'(0) = a$.

Chaque C_j est contenu dans un tel C_I.
Si $i \notin I$ alors $C_i \cap C_I = \emptyset$, puisque sinon on contredirait la maximalité de I.

[Remarque évidente : A et B connexes par arcs, $A \cap B \neq \emptyset \to A \cup B$ connexe par arc]

Donc si $C_I \neq X$, pour chaque $j \in \{1, \dots, k\} \setminus I$ il existe $J = J(i)$ tel que $j \in J$, C_J est fermé dans X.
On aurait donc que X est l'union de deux fermés de X définissables non vides disjoints, ce qui contredit notre hypothèse.