Invariants conformes et probabilité

Ceci est une version provisoire des notes du mini-cours "Transformations conformes" donné en 2011 dans le cadre des leçons de mathématiques pour les étudiants de l'Ens de seconde année. Si vous localisez une ou plusieurs erreur(s) merci de la (les) signaler à *nicolas.curien@ens.fr*

1 Transformations conformes

Une transformation conforme $f : \Omega \to \Omega'$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui conserve localement les angles. La matrice Jacobienne de f en tout point est une rotation fois une matrice scalaire. En dimension $d \geqslant 3$, l'ensemble des transformations conformes est relativement pauvre puisqu'il est engendré par les homothéties, les réflexions, les isométries et les inversions [1]. Le cas planaire est autrement plus intéressant car les transformations conformes coïncident avec les fonctions holomorphes injectives...
À partir de maintenant on se place en dimension 2.

1.1 Représentation conforme

Théorème 1.1 (Énoncé dans la thèse de B. Riemann en 1851)**.** *Tout ouvert simplement connexe $\Omega \neq \mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection bi-holomorphe*[2] *$f : \Omega \to \mathbb{D}$.*

Remarque 1.2. *D'après le théorème de Liouville (2ème)*[3]*, le plan $\mathbb{C}$ n'est pas conformément équivalent à un domaine borné.*

Remarque 1.3. *En particulier on en déduit que tous les ouverts simplement connexes du plan (différents du plan tout entier) sont homéomorphes. Le théorème de Riemann montre donc que la famille des transformations conformes est très riche.*

Remarque 1.4. *L'extension du théorème de Riemann à des ouverts non simplement connexes (avec plusieurs trous) n'est pas aussi souple. Par exemple deux anneaux sont conformément équivalents si et seulement si le rapport de leurs rayons est le même (voir plus loin). Il existe cependant des représentants assez simples de chaque classe conforme de domaines "avec trous", voir par exemple le théorème d'uniformisation de Koebe.*

1.2 Les groupes des transformations conformes de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ le groupe des transformations conformes du disque unité $\mathbb{D}$ et $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ celui de $\mathbb{C}$.

Proposition 1.5. *Le groupe $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ est engendré par les translations et les dilatations*

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Remarque 1.6. *Ainsi le groupe des transformations conformes de $\mathbb{C}$ est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.*

[1] C'est le théorème de Liouville (1er)
[2] Il suffit en fait que ce soit une bijection et qu'elle soit holomorphe
[3] Théorème de Liouville (2ème) : Toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier est constante.

Proof. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une bijection bi-holomorphe. On considère la fonction $F : z \mapsto f(z^{-1})$. Il est clair que F est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ comme composition de fonction holomorphe. D'après la classification des singularités isolées d'une fonction holomorphe[4] on en déduit que 0 est un pôle de F. En particulier il existe un m tel que $F(z)z^m \to 0$ quand $z \to 0$. Ainsi $|f(z)z^{-m}|$ est borné quand $z \to \infty$. Une application du Théorème de Liouville (2ème) amélioré[5] montre que f est un polynôme. Enfin le théorème de d'Alembert-Gauss implique par injectivité que ce polynôme est de degré un[6]. Réciproquement les fonctions affines sont des bijections conformes du plan $\mathbb{C}$. □

Proposition 1.7. *Le groupe $\mathcal{C}(\mathbb{D})$, appelé groupe des transformations de Mœbius, satisfait*

$$\mathcal{C}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta}\frac{z+b}{\bar{b}z+1} : \theta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{D} \right\}.$$

Exercice 1. *Vérifiez que les fonctions $z \mapsto e^{i\theta}\frac{z+b}{\bar{b}z+1}, \theta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{D}$ sont bien des bijections conformes de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$.*

Remarque 1.8. *Ainsi le groupe des transformations conformes de $\mathbb{D}$ est (localement) de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ (le groupe est même isomorphe à $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$). On remarque qu'il agit transitivement sur $\mathbb{D}$, c'est-à-dire que n'importe quel point de $\mathbb{D}$ peut-être envoyé sur n'importe quel autre par une transformation de Mœbius.*

Proof. Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une bijection bi-holomorphe. En composant f avec une transformation de Mœbius bien choisie, on peut supposer que $f(0) = 0$ (et que $f'(0) \in \mathbb{R}_+^*$). D'après le lemme de Schwarz[7] on a $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout z dans $\mathbb{D}$. Mais puisque f^{-1} satisfait les mêmes hypothèses on a $|f^{-1}(f(z))| = |z| \leqslant |f(z)|$ ainsi $|f(z)| = |z|$ et d'après le lemme de Schwarz $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi f est bien une transformation de Mœbius. □

D'après l'étude du groupe $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ on peut introduire un invariant conforme d'un domaine simplement connexe Ω muni d'un point distingué $z \in \Omega$:

Définition 1.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe différent de $\mathbb{C}$ et $z \in \Omega$. Soit f l'unique bijection conforme $f : \Omega \to \mathbb{D}$ telle que $f(z) = 0$ et $f'(z) > 0$. Le* rayon conforme *de Ω vu de z est par définition*

$$\mathrm{Rad}(\Omega, z) \quad = \quad f'(0)^{-1}.$$

2 Le mouvement brownien et l'invariance conforme

2.1 Définition

Le mouvement brownien est une *fonction continue aléatoire*, pour le définir on va donc se placer sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la métrique $\|\|_\infty$ et de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\|\|_\infty}$ associée.

Théorème 2.1. *Il existe une mesure de probabilité sur $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}_{\|\|_\infty})$ appelée mesure de Wiener telle que si $(B_t : t \geqslant 0)$ est une variable aléatoire distribuée selon cette loi alors*

- *la fonction $t \mapsto B_t$ est presque sûrement continue,*

[4] Une singularité isolée a d'une fonction holomorphe f ne peut être qu'un des trois types suivants

- a est *éliminable* c'est-à-dire que la fonction f est bornée au voisinage de $a \iff f$ se prolonge à a,
- a est un *pôle*, c'est-à-dire que $f(z) = z^{-m}g(z)$ pour un certain $m \geqslant 1$ et g une fonction analytique au voisinage de a,
- a est une singularité essentielle, c'est-à-dire une horreur : l'image de tout voisinage épointé de a est dense dans $\mathbb{C}$.

[5] Théorème de Liouville (2ème) amélioré : si f est une fonction holomorphe bornée par un polynôme alors f est un polynôme.

[6] en effet, soit le polynôme a plusieurs zéros, dans ce cas il n'est pas injectif, soit il a un zéro multiple et n'est alors pas localement injectif

[7] Lemme de Schwarz : Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe avec $f(0) = 0$. Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a $|f(z)| \leqslant |z|$. De plus si il existe un $z_0 \in \mathbb{D}$ avec $|f(z_0)| = |z_0|$ alors f est une rotation.

- *pour tout* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < \infty$ *les accroissements* $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}$ *sont indépendants et ont pour loi* $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \overset{(d)}{=} \mathcal{N}(0, t_{i-1} - t_i)$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$. *On rappelle que la densité de la loi normale centré* $\mathcal{N}(0, s)$ *de variance* s *est*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}.$$

La variable aléatoire $(B_t : t \geqslant 0)$ *est appelé* mouvement brownien standard*.*

Le mouvement brownien en dimension d est simplement le processus obtenu en considérant d mouvements browniens indépendants pour chaque coordonnées.

Exercice 2. *Vérifiez que cette définition ne dépend pas du système de coordonnées choisi.*

Un mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}^d$ est simplement $(x + B_t : t \geqslant 0)$ où B est un mouvement brownien en dimension d. On notera $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{E}_x$ la probabilité et l'espérance relatives à un mouvement brownien issu de x. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, le premier temps de sortie de Ω par B est

$$T_\Omega \quad = \quad \inf \{s \geqslant 0 : B_s \notin \Omega\}.$$

2.2 Le problème de Dirichlet

Dans la suite on identifiera à loisir $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. Si $x \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $C(x, r)$ et $D(x, r)$ le cercle et le disque de centre x et de rayon r.

Définition 2.2 (et propriétés)**.** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction localement bornée. La fonction* u *est* harmonique *si et seulement si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:*

- *(Propriété de la moyenne) Pour tout* $x \in \Omega$ *et tout* $r < \mathrm{dist}(x, \Omega^c)$ *on a*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(x,r)} u,$$

autrement dit, la moyenne de u *sur tout cercle dont le disque est inclus dans* Ω *est égale à la valeur de* u *au centre de ce cercle.*

- *(*$\Delta = 0$*) La fonction* u *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *et satisfait* $\Delta u = 0$ *où* Δ *est l'opérateur* $\partial_{xx} + \partial_{yy}$[8]*.*

- *La fonction* u *est de classe* $\mathcal{C}^2(\Omega)$ *et satisfait* $\Delta u = 0$*.*

Exercice 3. *Montrer l'équivalence de ces assertions. La plus difficile est* $3 \Rightarrow 1$*.*

Remarque 2.3. *Attention, les propriétés précédentes ne sont pas équivalentes à la propriété de la moyenne locale : Pour tout* $x \in \Omega$*, il existe* $r_0 > 0$ *tel que pour tout* $r < r_0$*,* u *vérifie la propriété de la moyenne sur* $C(x, r)$*. En effet, la fonction (discontinue) qui vaut* 0 *sur le demi plan inférieur,* 1 *sur le demi plan supérieur et* $1/2$ *à l'interface vérifie la propriété de la moyenne locale sans être harmonique.*

Exemple fondamental : Si $f = u(x, y) + iv(x, y)$ est une fonction holomorphe alors d'après les formules de Cauchy-Riemann la partie réelle u et la partie imaginaire v de f sont harmoniques.
Réciproquement, si Ω est simplement connexe et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique alors il existe une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ unique à constante additive près telle que u soit la partie réelle de f[9]. On en déduit par exemple facilement que si $f : \Omega' \to \Omega$ est une fonction holomorphe et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, alors $u \circ f$ est harmonique.

[8] On remarque en particulier que la définition du Laplacien est indépendante du système de coordonnées.

[9] Démonstration rapide de l'existence : On considère $g : \partial_x u - i\partial_y u$ qui est holomorphe sur Ω d'après les formules de Cauchy-Riemann. Ainsi g admet une primitive $f = f_1(x, y) + if_2(x, y)$. On vérifie alors que $\mathcal{R}e\,(f) - u$ est constante.

Remarque 2.4. *Cette stabilité des fonctions harmoniques par composition à gauche par une fonction holomorphe parait anodine. Elle constituera cependant la clé de la "démonstration" du théorème principal d'invariance du mouvement brownien.*

Exercice 4. *Montrer qu'en général les fonctions harmoniques ne sont pas stables par composition à gauche par une transformation conforme en dimension plus grande que* 2*.*

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert *borné*. On se donne $\xi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (pour la topologie induite par $\mathbb{C}$). **Le problème de Dirichlet** est la donnée de l'équation différentielle avec conditions au bord suivante

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \xi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'unicité de la solution du problème de Dirichlet n'est pas difficile à obtenir en utilisant le principe du maximum. Toute la subtilité de cette équation différentielle réside donc dans *l'existence* de la solution. Nous allons voir qu'elle existe toujours en dimension 2 pour des domaines simplement connexes bornés.

Remarque 2.5. *Le problème de Dirichlet est très intimement lié au théorème d'uniformisation de Riemann. D'ailleurs la démonstration originale de Riemann reposait sur la résolution (d'ailleurs considérée comme physiquement triviale) du problème de Dirichlet.*

Théorème 2.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné et simplement connexe. Le problème problème de Dirichlet associé à une fonction $\xi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continue a une unique solution donnée par*

$$u(x) \quad = \quad \mathbb{E}_x \left[\xi\left(B_{T_\Omega}\right)\right]. \tag{1}$$

Esquisse de preuve. En regardant la fonction définie par (1) on se rend compte qu'elle vérifie la propriété de la moyenne caractérisant les fonctions harmoniques : si $C(x, r)$ est le cercle centré en x de rayon r tel que le disque $D(x, r)$ soit inclus dans Ω, en appliquant la propriété de Markov fort au temps d'arrêt $T_{D(x,r)}$ on a

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[\xi\left(B_{T_\Omega}\right)\right] = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}\left[\xi\left(B_{T_\Omega}\right) \mid \mathcal{F}_{T_{D(x,r)}}\right]\right] = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{B_{T_{D(x,r)}}} \left[\xi\left(B_{T_\Omega}\right)\right]\right] = \mathbb{E}_x \left[u\left(B_{T_{D(x,r)}}\right)\right].$$

Par invariance par rotation, la variable $B_{T_{D(x,r)}}$ est uniformément distribuée sur $C(x, r)$. Ceci montre la propriété de la moyenne pour u. La condition au bord s'obtient pour des domaines dits "réguliers", ce qui est le cas des domaines simplement connexes en dimension 2 (voir exposé). □

Exercice 5. *Montrer que le problème de Dirichlet suivant n'a pas de solution : $\Omega = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ et $\xi|_{\partial\mathbb{D}} = 0$, $\xi(0) = 1$.*

Remarque 2.7. *Cette connexion entre mouvement brownien et fonctions harmoniques permet de calculer effectivement beaucoup de quantités (probabilité d'atteinte, mesure harmonique...) sur le mouvement brownien. Réciproquement, on va voir que le mouvement brownien permet d'attaquer simplement quelques problèmes d'analyse harmonique.*

Proposition 2.8 (Théorème de Liouville (3ème))**.** *Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique bornée. Alors u est constante.*

Proof. Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$. On a pour tout $t \geqslant 0$

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(B_t)].$$

En effet, la distribution du mouvement brownien arrêté au temps t est invariante par rotation et l'égalité découle donc de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques. L'idée est de *coupler*[10] deux mouvements browniens B et $\tilde{B}$ respectivement issus de x et y tels que $B_t = \tilde{B}_t$ pour des t assez grands.

[10] c'est-à-dire les définir sur le même espace de probabilité

Pour ce faire on considère l'hyperplan H_x^y médian entre x et y. Soit B est un mouvement brownien issu de x et notons $\tau = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in H_x^y\}$. On construit alors le processus $\tilde{B}$ comme suit

$$\begin{cases} \tilde{B}_s = \mathrm{Refl}(B_s, H_x^y), & 0 \leqslant s \leqslant \tau, \\ \tilde{B}_s = B_s, & s \geqslant \tau. \end{cases}$$

Où nous avons noté $\mathrm{Refl}(., H_x^y)$ pour la réflexion orthogonale par rapport à H_x^y. Il alors facile de vérifier que $\tilde{B}$ a la loi d'un mouvement brownien issu de y. On a alors

$$|u(x) - u(y)| = \left|\mathbb{E}[u(B_t) - u(\tilde{B}_t)]\right| \leqslant \mathbb{P}(B_t \neq \tilde{B}_t)\ \sup u.$$

D'après les propriétés classiques du mouvement en dimension deux, on a $\mathbb{P}(B_t \neq \tilde{B}_t) \to 0$ quand $t \to \infty$, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Exercice 6. *Montrer qu'une fonction harmonique positive sur $\mathbb{R}^2$ est constante.*

Exercice 7. *Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique u vérifiant $\lim_{|x| \to \infty} \left|\frac{u(x)}{x}\right| = 0$, est constante.*

Remarque 2.9. *Contrairement à la théorie des fonctions holomorphes, la définition et la théorie des fonctions harmoniques s'étend aisément aux dimensions supérieures. Par exemple l'analogue du théorème de Liouville (3ème) prouvé ci-dessus est vrai et la démonstration est identique. La résolution du problème de Dirichlet à l'aide du mouvement Brownien est encore valide, à condition d'imposer des (petites) restrictions sur les domaines considérés.*

2.3 Invariance conforme

Un mouvement brownien complexe $(B_t : t \geqslant 0)$ issu de x est simplement une somme $B_t = x + B_t^{(1)} + \mathrm{i}B_t^{(2)}$ où $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont deux mouvements browniens standards en dimension 1.

Théorème 2.10 (Levy)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $x \in \Omega$ et $f : \Omega \to \Omega'$ une fonction holomorphe. Si B est un mouvement brownien complexe issu de x, le processus $(f(B_t) : t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien complexe issu de $f(x)$ changé de temps : il existe $(\tilde{B}_t : t \geqslant 0)$ un autre mouvement brownien (pas indépendant) issu de $f(x)$ tel que pour tout $t \in [0, T_\Omega)$ on ait*

$$f(B_t) \quad = \quad \tilde{B}_{\sigma_t} \qquad \textit{avec} \qquad \sigma_t \quad = \quad \int_0^t |f'(B_s)|^2 \mathrm{d}s.$$

Remarque 2.11. *On peut prouver que si $\Omega = \mathbb{C}$ alors $\sigma_t \to \infty$ quand $t \to \infty$.*

Idées de preuve. La preuve classique de ce théorème utilise la formule d'Itô, pierre de base du calcul stochastique. En son absence, nous allons seulement donner quelques intuitions pour montrer que ce théorème est vraissemblable, en particulier nous n'expliquerons pas comment prouver la formule donnant le changement de temps $t \to \sigma_t$.
Considérons pour simplifier le cas où f est bijective et conforme de Ω sur Ω', deux ouverts simplement connexes et bornés de $\mathbb{C}$, et tentons de comprendre pourquoi $(f(B_t) : t \geqslant 0)$ est encore un mouvement brownien (changé de temps) stoppé à la sortie de Ω'. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit la suite de temps $\tau_1^{(\varepsilon)}, \tau_2^{(\varepsilon)}, \ldots$ définie récursivement par

$$\tau_0^{(\varepsilon)} = 0 \text{ et pour } i \geqslant 1, \text{ si } \operatorname{dist}(f(B_{\tau_{i-1}^{(\varepsilon)}}), \Omega') > \varepsilon$$

$$\text{alors } \tau_i^{(\varepsilon)} = \inf\left\{ s \geqslant \tau_{i-1}^{(\varepsilon)} : |f(B_s) - f(B_{\tau_{i-1}^{(\varepsilon)}})| \geqslant \varepsilon \right\}.$$

On note $I \in \{0, 1, ...\} \cup \{\infty\}$ le premier instant où la condition pour la définition de $\tau_I^{(\varepsilon)}$ n'est pas remplie, alors la suite $\tau_\cdot^{(\varepsilon)}$ s'arrête. Il est aisé de voir à l'aide des propriétés du mouvement brownien B dans Ω que la suite $\tau_i^{(\varepsilon)}$ est alors presque sûrement bien définie. Pour simplifier les notations, on note pour tout $i < I$

$$B_i^{(\varepsilon)} = B_{\tau_i^{(\varepsilon)}}.$$

La courbe brisée $[f(B_1^{(\varepsilon)}), f(B_2^{(\varepsilon)}), \ldots]$ est donc une approximation à ε près de la courbe $f(B_\cdot)$. Pour $1 \leqslant i < I$, les incréments $f(B_i^{(\varepsilon)}) - f(B_{i-1}^{(\varepsilon)})$ appartiennent à $\varepsilon\partial\mathbb{D}$ et sont indépendants par la propriété de Markov fort (exercice). Montrons qu'ils sont uniformément distribués sur $\varepsilon\partial\mathbb{D}$. Le processus $(B_t\,,\ t \in [\tau_{i-1}^{(\varepsilon)}, \tau_i^{(\varepsilon)}))$ est un mouvement brownien complexe démarré en $B_{i-1}^{(\varepsilon)}$ et stoppé au premier temps de sortie de

$$f^{-1}\left(D\left(f\left(B_{i-1}^{(\varepsilon)}\right), \varepsilon\right)\right).$$

Lemme 2.12. *Soit $\eta > 0$ et $g : B(0, 1+\eta) \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective. On note $\Omega = g(\mathbb{D})$. On considère alors le point de sortie B_{T_Ω} de Ω par un mouvement brownien B issu de $g(0)$. L'image par g^{-1} de cette variable est uniforme sur $\partial\mathbb{D}$, c'est-à-dire pour tout fonction $\xi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue*

$$\mathbb{E}_{g(0)}\left[\xi\left(g^{-1}\left(B_{T_\Omega}\right)\right)\right] \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{d}x\,\xi(x).$$

Proof. Le domaine Ω est borné et simplement connexe et $\partial\Omega$ est sympathique (courbe de Jordan $\mathcal{C}^1$). Soit $\xi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et posons $\zeta = \xi \circ g^{-1} : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. On a une fonction harmonique dans Ω avec condition au bord donnée par ζ qui est simplement

$$v(y) = \mathbb{E}_y\left[\zeta\left(B_{T_\Omega}\right)\right], \quad y \in \Omega$$

et son analogue dans $\mathbb{D}$ avec condition au bord donnée par ξ,

$$u(x) = \mathbb{E}\left[\xi\left(B_{T_\mathbb{D}}\right)\right], \quad x \in \mathbb{D}.$$

Puisque $u \circ g^{-1}$ est aussi harmonique et vérifie la même condition au bord que v on en déduit par l'unicité du problème de Dirichlet que $v = u \circ g^{-1}$ en particulier

$$\mathbb{E}_0[\xi(B_{T_\mathbb{D}})] = u(0) = v(g(0)) = \mathbb{E}_{g(0)}\left[\zeta\big(B_{T_\Omega}\big)\right] = \mathbb{E}_{g(0)}\left[\xi\left(g^{-1}\big(B_{T_\Omega}\big)\right)\right].$$

L'égalité $\mathbb{E}_0[\xi(B_{T_\mathbb{D}})] = \mathbb{E}_{g(0)}[\xi(g^{-1}(B_{T_\Omega}))]$ valable pour toute fonction continue ξ montre bien que $g^{-1}(B_{T_\Omega})$ est uniforme sur $\partial\mathbb{D}$ comme voulu. $\square$

Grâce au lemme précédent on déduit aisément que les incréments $f(B_i^{(\varepsilon)}) - f(B_{i-1}^{(\varepsilon)})$ sont indépendants et identiquement distribués sur $\varepsilon\partial\mathbb{D}$ jusqu'à l'instant ou le processus est à distance moins de ε de $\partial\Omega'$. Cette propriété est également pour l'équivalent du processus $f(B_i^{(\varepsilon)})$ crée à partir d'un mouvement brownien issu de $g(0)$ dans Ω'. On en déduit alors que quand $\varepsilon \to 0$ la loi de $f(B_\cdot)$ tend vers celle d'un mouvement brownien dans Ω' issu de $g(0)$ est stoppé à $T_{\Omega'}$. $\square$

2.4 Applications

Démonstration brownienne du théorème de d'Alembert-Gauss : Soit P une fonction polynomiale de degré au moins un. Alors $P(B_t)$ est un mouvement brownien complexe changé de temps. Si P ne prend jamais la valeur 0 alors $\mathbb{C}\backslash P(\mathbb{C})$ contient un disque $D(0, r)$ centré en 0 pour un petit $r > 0$ (car P est fermé). Mais ceci est impossible car un mouvement brownien en dimension deux visite presque sûrement tout voisinage de 0 infiniment souvent.

Calcul sur le brownien : Le Théorème 2.9 a aussi beaucoup d'applications sur la théorie du mouvement brownien. Par exemple si $\mathrm{Cone}(\alpha, r)$ est le cône d'angle $\alpha > 0$ centré autour de $[0, \infty)$ et de rayon r, on s'intéresse au calcul de la probabilité qu'un mouvement brownien parti de 1 sorte du cône par la partie circulaire.

Exercice 8. *Comment faire ?*

Théorème 2.13 (Petit théorème de Picard [a]). *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors $\mathbb{C} \backslash f(\mathbb{C})$ est au plus formé d'un seul point.*

[a] Le grand théorème de Picard dit qu'une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend, sur tout voisinage épointé de cette singularité, tout nombre complexe une infinité de fois comme valeur, sauf peut-être un. (Wikipédia)

Théorème 2.14 (Koebe). *Il existe[a] $a > 0$ tel que pour tout $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ injective et telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| = 1$ on ait*

$$D(0, a) \subset f(\mathbb{D}).$$

[a] En fait le meilleur $a > 0$ possible est $1/4$.

Ce théorème permet d'avoir des estimations sur le rayon conforme. Si $x \in \Omega \subset \mathbb{C}$ avec Ω simplement connexe alors on a aisément

$$a \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leqslant \operatorname{Rad}(\Omega, x) \leqslant a^{-1} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

3 Distance extrémale

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une métrique sur Ω est simplement une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$. Intuitivement, ρ décrit comment les longueurs sont étendues localement. Si γ est une courbe $\mathcal{C}^1$ dans Ω alors la longueur de γ est

$$\mathrm{L}(\gamma, \rho) \quad = \quad \int_\gamma \rho(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

L'aire de Ω pour la métrique ρ est

$$\mathrm{A}(\Omega, \rho) \quad = \quad \iint_\Omega \rho^2(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Définition 3.1. *Soit Γ une collection de courbes $\mathcal{C}^1$ dans Ω. La distance extrémale de Γ est*

$$\mathrm{EL}(\Gamma) \quad = \quad \sup_\rho \inf_{\gamma \in \Gamma} \frac{\mathrm{L}^2(\gamma, \rho)}{\mathrm{A}(\Omega, \rho)}.$$

Exemple 1. *Si $A, B \subset \overline{\Omega}$ on peut considérer l'ensemble $\Gamma_{A,B}$ de courbe $\mathcal{C}^1$ de Ω liant un point de A à un point de B. La distance extrémale entre A et B est alors $\mathrm{EL}(\Gamma_{A,B})$.*

Proposition 3.2. *Soit Γ une collection de courbes $\mathcal{C}^1$ dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \Omega^*$ une bijection conforme. On note $\Gamma^* = \{f \circ \gamma\,,\ \gamma \in \Gamma\}$ alors on a*

$$\mathrm{EL}(\Gamma) \quad = \quad \mathrm{EL}(\Gamma^*).$$

Proof. Soit ρ^* une métrique sur Ω^*, on pose alors $\rho = |f'| \cdot \rho^* \circ f$, ainsi d'après la formule de changement de variables on a $\mathrm{A}(\Omega, \rho) = \mathrm{A}(\Omega^*, \rho^*)$ et $\mathrm{L}(\Omega, \gamma) = \mathrm{L}(\Omega^*, f(\gamma))$ pour toute courbe $\mathcal{C}^1$. D'où le résultat par symétrie. □

Remarque 3.3. *Notez que nous avons utilisé très fortement l'holomorphie. En effet, pour que le changement de variables $\rho = |f'| \cdot \rho^* \circ f$ marche pour la longueur et l'aire en même temps il faut que la fonction f soit localement une similitude en tout point, c'est à dire une fonction holomorphe.*

Exemple 2. *Soit* $0 < r_1 < r_2 < \infty$. *On considère l'anneau* $A = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ *et* $C_1 = \{z : |z| = r_1\}$, $C_2 = \{z : |z| = r_2\}$. *Le but est de calculer la distance extrémale dans* A *entre* C_1 *et* C_2 *càd la distance extrémale de l'ensemble des chemins* ($\mathcal{C}^1$) *liant* C_1 *à* C_2.
BORNE INFÉRIEURE. *Calculons* $\inf_\Gamma L^2(\gamma, \rho) A^{-1}(\Omega, \rho)$ *avec* $\rho(z) = |z|^{-1}$. *On obtient* $\frac{\log(r_2/r_1)}{2\pi}$.
BORNE SUPÉRIEURE. *Soit* ρ *une métrique et* $l = \inf_\Gamma \mathrm{L}(\gamma, \rho)$. *Si* γ_θ *est le rayon liant* C_1 *à* C_2 *on a pour tout* $\theta \in [0, 2\pi[$

$$l \leqslant \int_{r_1}^{r_2} \rho(re^{i\theta}) \mathrm{d}r.$$

En intégrant sur θ *et en appliquant Cauchy-Schwarz on obtient*

$$4\pi^2 l^2 \leqslant \iint r \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \rho(re^{i\theta}) \iint r^{-1} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta,$$

ce qui est le résultat voulu.
On en déduit en particulier que deux anneaux sont conformément équivalents si et seulement si le rapport de leurs rayons est le même.

Exercice 9. *Calculer la distance extrémale entre deux côtés opposés d'un rectangle.*

3.1 Distance extrémale discrète

Soit $G = (V, E)$ un graphe (infini). Une métrique ρ est une fonction $E \to [0, \infty]$. La longueur $\mathrm{L}(\gamma, \rho)$ d'un chemin dans G est simplement la somme des poids des arêtes qui le compose et l'aire du graphe est $\mathrm{A}(G, \rho) = \sum_E \rho(e)^2$. Pour deux sommets a, b du graphe, on considère $\Gamma(a, b)$ l'ensemble des chemins reliant a à b dans G et $\Gamma(a, \infty)$ l'ensemble des chemins infinis partant du sommet a.

Théorème 3.4. *Si* $G = (V, E)$ *est interprété comme un réseau électrique avec toutes les arêtes représentant des résistances de* 1Ω, *alors la résistance entre les points* a *et* b *du graphe est*

$$\mathrm{R_{eff}}(a, b) = \mathrm{EL}(\Gamma(a, b)).$$

En particulier, le graphe G *est récurrent pour la marche aléatoire simple si et seulement si* $\mathrm{EL}(\Gamma(a, \infty)) = \infty$.

Exercice 10. *Qui sont ces charmants messieurs ?* [11]

[11] Réponse : Dans l'ordre, Joseph Liouville, Bernhard Riemann, August Ferdinand Möbius, Émile Picard et Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

References

[1] L. V. Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[2] R. F. Bass. *Probabilistic techniques in analysis.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] R. J. Duffin. The extremal length of a network. *J. Math. Anal. Appl.*, 5:200–215, 1962.

[4] Everybody. *wikipedia.org.*

[5] J.-F. Le Gall. *Intégration et Probabilités.*

[6] R. Lyons and Y. Peres. *Probability on Trees and Networks.* Current version available at http://mypage.iu.edu/ rdlyons/, In preparation.

[7] P. Mörters and Y. Peres. *Brownian motion.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. With an appendix by Oded Schramm and Wendelin Werner.

[8] L. Saint-Raymond. *Poly d'analyse complexe.* 2010.