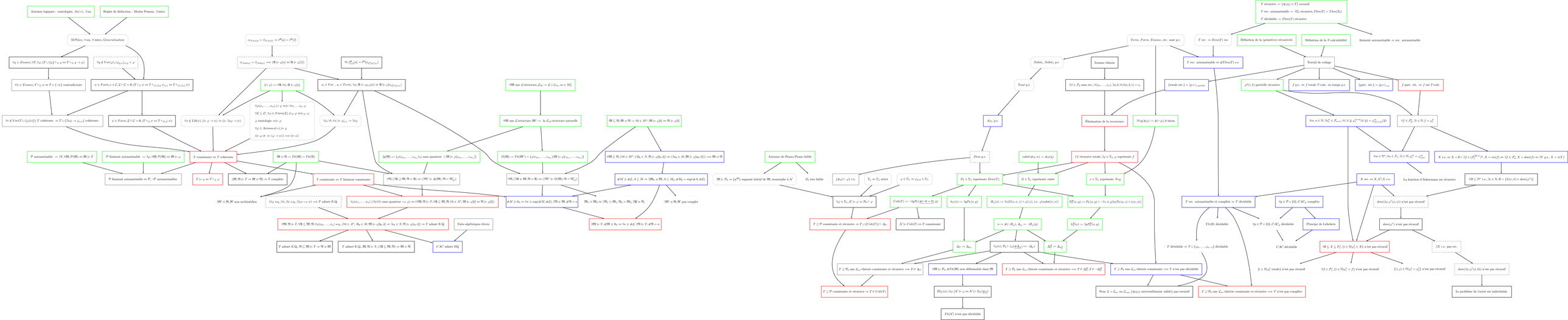

Axiomes logiques : tautologies, $Ax(=)$, $\exists$-ax
Règles de déduction : Modus Ponens, $\exists$-intro
T récursive $:= \{\#\varphi|\varphi \in T\}$ recursif
T rec. axiomatisable $:= \exists T_0$ récursive, $Thm(T) = Thm(T_0)$
T décidable $:= Thm(T)$ récursive
$MPGen$, $\forall$-ax, $\forall$-intro, *Generalisation*
$\alpha_{\restriction Var(t)} = \beta_{\restriction Var(t)} \Rightarrow t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = t^{\mathfrak{A}}[\beta]$
$Term$, $Form$, $Enonce$, etc. sont p.r.
T rec $\Rightarrow Dem(T)$ rec
Définition de la (primitive) récursivité
Définition de la T-calculabilité
finiment axiomatisable $\Rightarrow$ rec. axiomatisable
$\forall\chi \in Enonce, \forall T, \forall\varphi, (T\cup\{\chi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{\mathcal{L}} \chi \to \varphi)$
$\forall y \notin Var(\varphi), (\varphi_{y/x})_{x/y} = \varphi$
$\alpha_{\restriction Lib(\varphi)} = \beta_{\restriction Lib(\varphi)} \Longrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \Leftrightarrow \mathfrak{A}\models\varphi[\beta])$
$\forall t, t^{\mathfrak{A}}_{\overline{s}/\overline{x}}[\alpha] = t^{\mathfrak{A}}[\alpha_{s_i^{\mathfrak{A}}[\alpha]/x_i}]$
$Subst_t$, $Subst_f$ p.r.
Lemme chinois
T rec. axiomatisable $\Leftrightarrow \#Thm(T)$ r.e.
Travail de codage
$\forall\psi \in Enonce, T\vdash_{\mathcal{L}}\psi \Leftrightarrow T\cup\{\neg\psi\}$ contradictoire
$\psi \in Form, c\in\mathcal{C}, \mathcal{L}\cap\mathcal{C}=\emptyset, (T\vdash_{\mathcal{L}}\psi \Leftrightarrow T\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c\}} \psi_{c/x} \Leftrightarrow T\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c\}}\psi)$
$(\models\varphi) := \forall\mathfrak{A},\forall\alpha,\mathfrak{A}\models\varphi[\alpha]$
$x_i\in Var$, $s_i \in Term$, $\forall\varphi,\mathfrak{A}\models\varphi_{\overline{s}/\overline{x}}[\alpha] \Leftrightarrow \mathfrak{A}\models\varphi[\alpha_{s_i^{\mathfrak{A}}[\alpha]/x_i}]$
$\forall\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\mathcal{L}_M := \mathcal{L}\cup\{c_m, m\in M\}$
$Taut$ p.r.
$\exists\beta \in \mathcal{F}_3$ sans rec., $\forall(c_0,\ldots,c_n), \exists a,b,\forall i\beta(a,b,i)=c_i$
$\{$totale réc.$\} = \langle p.r.\rangle_{\circ,\mu total}$
$\varphi^p(i,\overline{x})$ partielle récursive
f p.r. $\Leftrightarrow f$ totale T-calc. en temps p.r.
$\{$part. réc.$\} = \langle p.r.\rangle_{\circ,\mu}$
f part. réc. $\Leftrightarrow f$ est T-calc.
$\forall c\notin Var(T\cup\{\varphi(x)\}), T$ cohérente $\Rightarrow T\cup\{\exists x\varphi\to\varphi_{c/x}\}$ cohérente
$\psi\in Form, \mathcal{L}\cap\mathcal{C}=\emptyset, (T\vdash_{\mathcal{L}}\psi\Leftrightarrow T\vdash_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}\psi)$
$\forall x\notin Lib(\psi), (\models\varphi\to\psi) \Rightarrow (\models\exists x\varphi\to\psi)$
$\forall\varphi(x_1,\ldots,x_n), \models\varphi \Leftrightarrow \models \forall x_1\ldots x_n,\varphi$
$\forall\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}', \forall\varphi\in Form(\mathcal{L}), \models_{\mathcal{L}}\varphi\Leftrightarrow\models_{\mathcal{L}'}\varphi$
φ tautologie $\Rightarrow\models\varphi$
$\forall\varphi\in Axiomes(=),\models\varphi$
$(\models\varphi$ et $\models(\varphi\to\psi)) \Longrightarrow (\models\psi)$
$\forall\varphi,\forall t,\forall x,\models\varphi_{t/x}\to\exists x\varphi$
$\forall\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\mathfrak{M}^* :=$ la $\mathcal{L}_M$-structure naturelle
$\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}, \mathfrak{M}\preccurlyeq\mathfrak{N} := \forall\overline{a}\in M^n, \mathfrak{M}\models\varphi[\overline{a}]\Leftrightarrow\mathfrak{N}\models\varphi[\overline{a}]$
Ax_L p.r.
Élimination de la recurrence
$Neg(\#\varphi) := \#(\neg\varphi), 0$ sinon
$\forall m,n\in\mathbb{N}, \exists s^m_n \in \mathcal{F}_{n+1}, \forall i,\overline{x},\overline{y}, \varphi^{n+m}_i(\overline{x},\overline{y}) = \varphi^m_{s^m_n(i,\overline{x})}(\overline{y})$
$\forall f \in \mathcal{F}^*_p, \exists i\in\mathbb{N}, f=\varphi^p_i$
$\mathcal{P}$ axiomatisable $:= \exists T,\forall\mathfrak{M},\mathcal{P}(\mathfrak{M})\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models T$
$\mathcal{P}$ finiment axiomatisable $:= \exists\varphi,\forall\mathfrak{M},\mathcal{P}(\mathfrak{M})\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi$
T consistance $\Leftrightarrow T$ coherente
$\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{N} := Th(\mathfrak{M}) = Th(\mathfrak{N})$
$\Delta(\mathfrak{M}) := \{\varphi(c_{m_1},\ldots,c_{m_n})|\varphi$ sans quanteur $\wedge\,\mathfrak{M}\models\varphi[c_{m_1},\ldots,c_{m_n}]\}$
$D(\mathfrak{M}) := Th(\mathfrak{M}^*) = \{\varphi(c_{m_1},\ldots,c_{m_n})|\mathfrak{M}\models\varphi[c_{m_1},\ldots,c_{m_n}]\}$
$\forall\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}, (\forall\overline{a}\in M^n, (\exists b_0\in N,\mathfrak{N}\models\varphi[b_0,\overline{a}]) \Leftrightarrow (\exists a_0\in M,\mathfrak{M}\models\varphi[a_0,\overline{a}])) \Longrightarrow \mathfrak{M}\preccurlyeq\mathfrak{N}$
Axiomes de Peano/Peano faible
Dem p.r.
$subst(\#\varphi,n) := \#\varphi(\underline{n})$
$\forall f$ récursive totale, $\exists\varphi\in\Sigma_1,\varphi$ représente f
$\forall m\in\mathbb{N}^*, \forall\alpha\in\mathcal{F}_1, \exists i\in\mathbb{N}, \varphi^m_i = \varphi^m_{\alpha(i)}$
X r.e. $\Leftrightarrow X=\emptyset \vee \exists f \in (\mathcal{F}_1^{(\emptyset/*)})^n, X=im(f) \Leftrightarrow \exists f\in\mathcal{F}^*_n, X=dom(f) \Leftrightarrow \exists Y$ p.r., $X=\pi(Y)$
$\mathcal{P}$ finiment axiomatisable $\Leftrightarrow\mathcal{P},\neg\mathcal{P}$ axiomatisables
$T\models\varphi\Leftrightarrow T\vdash_{\mathcal{L}}\varphi$
$(\mathfrak{M},\mathfrak{N}\models T\Rightarrow\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{N})\Rightarrow T$ complète
T consistante $\Leftrightarrow T$ finiment consistante
$\forall\mathfrak{N},(\exists\mathfrak{A}\supseteq\mathfrak{M},\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{A})\Leftrightarrow(\exists\mathfrak{N}^*\models\Delta(\mathfrak{M}),\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^*_{\restriction\mathcal{L}})$
$\forall\mathfrak{N},(\exists\mathfrak{A}\succcurlyeq\mathfrak{M},\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{A})\Leftrightarrow(\exists\mathfrak{N}^*\models D(\mathfrak{M}),\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^*_{\restriction\mathcal{L}})$
$\#M\geqslant\#\mathcal{L},A\subseteq M\Rightarrow\exists\mathfrak{M}_0\preccurlyeq\mathfrak{M},A\subseteq M_0,\#M_0=\sup(\#A,\#\mathcal{L})$
$\mathfrak{M}\models\mathcal{P}_0\Rightarrow\{\underline{n}^{\mathfrak{M}}\}$ segment initial de $\mathfrak{M}$, isomorphe à $\mathcal{N}$
P_0 très faible
$\{\#\varphi|\vdash\varphi\}$ r.e.
$\Sigma_1\Leftrightarrow\Sigma_1$ strict
$\varphi\in\Sigma_1\Rightarrow\varphi_{\overline{s}/\overline{x}}\in\Sigma_1$
$P_T\in\Sigma_1$ représente $Dem(T)$
$G\in\Sigma_1$ représente $subst$
$\nu\in\Sigma_1$ représente Neg
X rec. $\Leftrightarrow X,\mathcal{N}\backslash X$ r.e.
La fonction d'Ackermann est récursive
$\forall R \subseteq \mathbb{N}^n$ r.e., $\exists e\in\mathbb{N}, R=\{\overline{x}|(e,\overline{x})\in dom(\varphi^n)\}$
$\exists\mathfrak{N}'\equiv\mathfrak{N},\mathfrak{N}'$ non archimédien
$(\forall\varphi$ s.q., $\forall x,\exists\psi$ s.q., $\exists x\varphi\sim_T\psi)\Longrightarrow T$ admet E.Q.
$\forall\varphi(x_1,\ldots,x_n),(\exists\psi(\overline{x})$ sans quanteur $\sim_T\varphi)\Leftrightarrow(\forall\mathfrak{M},\mathfrak{N}\models T,\forall\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{M},\mathfrak{N},\forall\overline{a}\in A^n,\mathfrak{M}\models\varphi[\overline{a}]\Leftrightarrow\mathfrak{N}\models\varphi[\overline{a}])$
$\#M\geqslant\aleph_0\Rightarrow\forall\kappa\geqslant\sup(\#M,\#\mathcal{L}),\exists\mathfrak{N}\succcurlyeq\mathfrak{M},\#\mathfrak{N}=\kappa$
$\mathfrak{M}_1\equiv\mathfrak{M}_2\Leftrightarrow\exists\mathfrak{N}_1\simeq\mathfrak{M}_1,\mathfrak{N}_2\simeq\mathfrak{M}_2,\exists\mathfrak{P}\succcurlyeq\mathfrak{N}_i$
$\exists\mathfrak{N}'\preccurlyeq\mathfrak{N},\mathfrak{N}'$ pas complet
$\forall\varphi\in\Sigma_1,\mathcal{N}\models\varphi\Rightarrow\mathcal{P}_0\vdash\varphi$
$Coh(T) := \neg\exists yP_T(\underline{\#(\neg 0=0)},y)$
$h_T(x) := \exists yP_T(x,y)$
$H_\varphi(x) := \exists z(G(x,x,z)\wedge\varphi(z))$, i.e. $\varphi(subst(x,x))$
$P^R_T(x,y) := P_T(x,y)\wedge\neg\exists z\leqslant y\exists u(P_T(u,z)\wedge\nu(x,u))$
T rec. axiomatisable et complète $\Rightarrow T$ décidable
$\forall p\in\mathcal{P}\cup\{0\},CAC_p$ complète
$dom(\lambda x.\varphi^1(x,x))$ n'est pas récursif
$\forall\mathfrak{M},\mathfrak{N}\models T,\forall\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{M},\mathfrak{N},\forall\varphi(x_0,\ldots,x_n)$ s.q., $(\forall\overline{a}\in A^n,\exists b_0\in M,\mathfrak{M}\models\varphi[b_0,\overline{a}]\Rightarrow\exists c_0\in N,\mathfrak{N}\models\varphi[c_0,\overline{a}])\Rightarrow T$ admet E.Q.
Faits algébriques divers
$\exists\mathfrak{M}\models T,\#\mathfrak{M}\geqslant\aleph_0\Rightarrow\forall\kappa\geqslant\#\mathcal{L},\exists\mathfrak{N}\models T,\#\mathfrak{N}=\kappa$
$T\supseteq\mathcal{P}$ consistante et récursive $\Rightarrow T\cup\{Coh(T)\}\vdash\Delta_T$
$\mathcal{N}\models Coh(T)\Leftrightarrow T$ consistante
$n := \#(\neg H_\varphi),\ \Delta_\varphi := \neg H_\varphi(\underline{n})$
$h^R_T(x) := \exists yP^R_T(x,y)$
$Th(R)$ décidable
$\forall p\in\mathcal{P}\cup\{0\},CAC_p$ décidable
Principe de Lefschetz
$dom(\varphi^1)$ n'est pas récursif
T admet E.Q., $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}\models T\Rightarrow\mathfrak{N}\preccurlyeq\mathfrak{M}$
T admet E.Q., $\mathfrak{M},\mathfrak{N}\models T,(\exists\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{M},\mathfrak{N})\Rightarrow\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{N}$
CAC admet EQ
$\Delta_T := \Delta_{h_T}$
$\forall\varphi(v),\mathcal{P}_0\vdash(\varphi(\underline{\#\Delta_\varphi})\leftrightarrow\neg\Delta_\varphi)$
$\Delta^R_T := \Delta_{h^R_T}$
T décidable $\Rightarrow T\cup\{\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}\}$ décidable
CAC décidable
$\forall\emptyset\subsetneq X\subsetneq F^*_1,\{i\in\mathbb{N}|\varphi^1_i\in X\}$ n'est pas récursif
$\exists X$ r.e. pas rec.
$T\supseteq\mathcal{P}_0$ une $\mathcal{L}_{ar}$-théorie consistante et récursive $\Longrightarrow T\nvdash\Delta_T$
$\forall\mathfrak{M}\models\mathcal{P}_0,\#Th(\mathfrak{M})$ non définissable dans $\mathfrak{M}$
$T\supseteq\mathcal{P}_0$ une $\mathcal{L}_{ar}$-théorie consistante et récursive $\Longrightarrow T\nvdash\Delta^R_T, T\nvdash\neg\Delta^R_T$
$T\supseteq\mathcal{P}_0$ une $\mathcal{L}_{ar}$-théorie consistante $\Longrightarrow T$ n'est pas décidable
$\{i\in\mathbb{N}|\varphi^1_i$ totale$\}$ n'est pas récursif
$\forall f\in\mathcal{F}^*_1,\{i\in\mathbb{N}|\varphi^1_i=f\}$ n'est pas récursif
$\{(i,j)\in\mathbb{N}|\varphi^1_i=\varphi^1_j\}$ n'est pas récursif
$dom(\lambda x.\varphi^1(x,0))$ n'est pas récursif
$T\supseteq\mathcal{P}$ consistante et récursive $\Rightarrow T\nvdash Coh(T)$
$\nexists S_{\mathcal{N}}(x),\forall\varphi,(\mathcal{N}\models\varphi\Leftrightarrow\mathcal{N}\models S_{\mathcal{N}}(\underline{\#\varphi}))$
Pour $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{ar}$ ou $\mathcal{L}_{ens}$, $\{\#\varphi|\varphi$ universellement valide$\}$ pas recursif
$T\supseteq\mathcal{P}_0$ une $\mathcal{L}_{ar}$-théorie consistante et récursive $\Longrightarrow T$ n'est pas complète
Le problème de l'arrêt est indécidable.
$Th(\mathcal{N})$ n'est pas décidable