FILIERE MP : ENS (PARIS) – ENS LYON – ENS CACHAN

PAGE DE GARDE DU RAPPORT DE TIPE 2012

NOM : FEYDY Prénoms : Jean, Bảo, Pierre

Lycée : Lycée Marcelin Berthelot

Classe : MP*

Ville : Saint-Maur des Fossés

Concours auxquels vous êtes admissible dans la banque inter-ENS :

(Mettre une croix très visible dans la ou les case(s) vous concernant)

ENS Cachan	MP - option MP	X	MP - option MPI	
	Informatique			
ENS Lyon	MP - option MP		MP - option MPI	
	Informatique - option M	X	Informatique - option P	
ENS (Paris)	MP - option MP		MP - option MPI	X
	Informatique			

Matière dominante du TIPE : Mathématiques
(mathématiques, informatique ou physique)

Titre du TIPE : Les groupes hyperboliques sont automatiques.

Nombre de pages (à porter dans les cases ci-dessous) :

Texte	T	4	Illustrations	I	2	Bibliographie	B	0

Résumé imprimé (6 lignes) :

On montre que les groupes "hyperboliques" au sens de Gromov (i.e. dont les triangles d'un graphe de Cayley sont uniformément fins) sont automatiques. Ceci permet, entre autres, d'obtenir un algorithme quadratique pour le "problème du mot", dans le cas des groupes hyperboliques.

A Joinville, le 11 juin
Signature du (de la) candidat(e)

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

Cachet de l'établissement

Les groupes hyperboliques sont automatiques

Jean Feydy

11 juin 2012

Au cours de ce TIPE, nous allons nous intéresser à deux classes de groupes : les groupes *automatiques* et les groupes *hyperboliques*. La propriété d'être automatique est algorithmique et permet une meilleure compréhension du groupe étudié (algorithme décidant le problème du mot ("word problem") en temps quadratique, notemment), tandis que celle d'être hyperbolique est essentiellement géométrique. Le principal résultat de ce travail, à savoir que tous les groupes hyperboliques sont automatiques, donne alors un exemple fructueux d'utilisation de la géométrie en algèbre.

1 Les groupes automatiques

Automates à deux têtes de lecture

On s'intéresse ici à un groupe G, muni d'une partie génératrice finie S. On suppose que $e_G \notin S$ et que $S = S^{-1}$. On prend S comme alphabet, et on se donne $\bar{\cdot} : S^\star \to G$ morphisme de monoïdes canonique (dans $S^\star$, pas de simplification : les éléments de S sont vus comme des lettres). Pour parler simplement, les groupes automatiques sont ceux dont la structure est décrite par une collection finie d'automates finis. Ces automates prendront en entrée un couple de mots de $S^\star$, et nous renverront des informations utiles (typiquement : ces deux mots codent-t-ils le même élément de G ?), sans avoir besoin d'effectuer les (coûteux) calculs dans G. Aussi, nous avons besoin de définir des automates pouvant lire simultanément deux mots de longueurs possiblement différentes.

Définition 1 *On introduit un nouveau symbole, supposé ne pas appartenir à S, \$, qui représente la fin de lecture. On note $B = (S \cup \{\$\})^2 \backslash \{(\$, \$)\}$. Formellement, on complète avec des \$ les langages de $S^\star \times S^\star$ en langages de $B^\star$: pour $\omega \in S^\star$ et $k \in \mathbb{N}$, on identifiera ω et $\omega\$^k$.*

Structure automatique de G

Définition 2 *On dit que G est automatique si, avec $S = \{e_G = s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, on dispose de $n+2$ automates finis, W, M_0, M_1, ..., M_n tels que :*

i) W automate sur S, et $\overline{\mathcal{L}(W)} = G$, i.e. tout élément de G s'écrit commme un mot reconnu par W.

ii) pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, M_i automate sur B, et

$$\mathcal{L}(M_i) = \{(m, m') \in B^\star, (m, m') \in (\mathcal{L}(W))^2, \overline{m'} = \overline{m} \cdot s_i\}$$

On appelle structure automatique de G la donnée de tels automates, auxquels on adjoint S.

Ainsi, la structure automatique d'un groupe permet de vérifier si deux mots d'un langage qui décrit tout G, $\mathcal{L}(W)$, définissent le même élément, ou diffèrent d'un élément de S.

Notons qu'un exemple de structure automatique est donné dans les appendices (Figure 3).

2 Les groupes hyperboliques

Graphes de Cayley

Définition 3 *On définit le graphe de Cayley $\mathcal{C}(G, S)$ comme le graphe*

$$\mathcal{C}(G, S) := (G, \{\{g, gx\}, x \in S, g \in G\})$$

De sorte que chaque arrête corresponde à une multiplication par un élément de S.

Notons que le fait que $S = S^{-1}$ légitime cette définition.

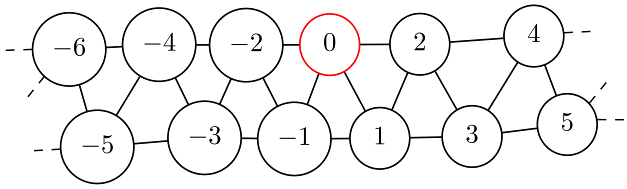

Figure 1 – $\mathcal{C}(\mathbb{Z}, \{-2, -1, 1, 2\})$

Distances dans G, géodésiques

Définition 4 *On définit, pour $\gamma, \beta \in G$*

$$|\gamma|_S = \min\{n \in \mathbb{N}, \exists a_1, \ldots, a_n \in S, \gamma = a_1 \cdots a_n\}$$

$$d_S(\gamma, \beta) = |\gamma^{-1}\beta|_S$$

Ainsi, dans $\mathcal{C}(G, S)$, $d_S(\gamma, \beta)$ est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut emprunter pour passer de γ à β.

Définition 5 *On appellera géodésique de γ à β toute suite finie $(\gamma = g_1, g_2, \ldots, g_n = \beta)$ d'éléments de G tels que, pour tout i, $g_{i+1} \in (g_i \cdot S)$ et $n = d_S(\gamma, \beta)$. On s'autorisera à noter ces géodésiques de manière générique, $[\gamma, \beta]$.*

De plus, on appellera chemin géodésique de γ à β le mot $(g_1^{-1}g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1}g_n)$ de $S^\star$.

Ainsi, dans ces conventions, une géodésique correspond à une suite de sommets du graphe de Cayley, et un chemin géodésique correspond à une suite d'arêtes.

Hyperbolicité

Un groupe G est hyperbolique s'il existe S partie génératrice finie de G telle que, dans $\mathcal{C}(G, S)$, tout les triangles (géodésiques) soient "fins", et ce, de manière uniforme sur tous les triangles. On formalise cette notion comme suit :

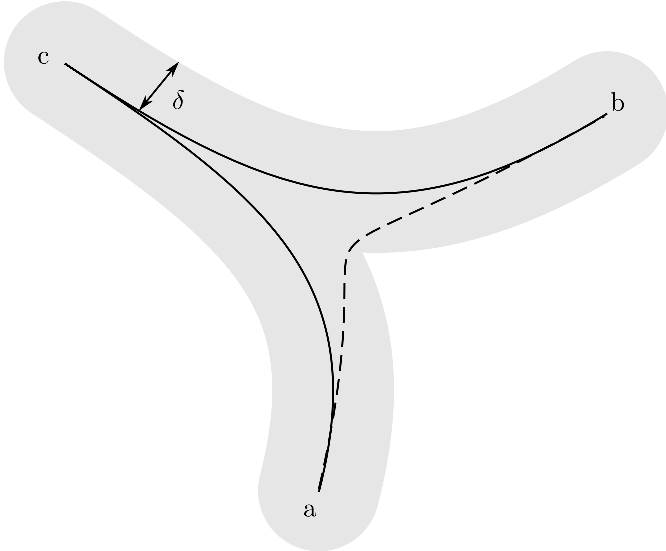

Figure 2 – Un triangle hyperbolique

Définition 6 *G muni de d_S est δ-hyperbolique si, pour tout triangle géodésique $[a,b,c]$, pour tout $z \in [a,b]$, $d(z,[b,c] \cup [c,a]) \leqslant \delta$*

Définition 7 *On dit que G est hyperbolique s'il existe une partie génératrice finie S de G et $\delta \in \mathbb{N}$ tels que G muni de d_S soit δ-hyperbolique.*

Un exemple de graphe de Cayley hyperbolique est donné dans les appendices (Figure 4).

On remarque immédiatement que tout groupe fini est hyperbolique : il suffit de prendre pour δ le diamètre de G. La théorie développée n'a d'interêt que pour les groupes infinis (mais de type fini).

3 Les groupes hyperboliques sont automatiques

On se donne, jusqu'à la fin de cette partie, G un groupe, S partie génératrice finie, close par passage à l'inverse et ne contenant pas e_G. On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème 1 *Si G est hyperbolique, alors G est automatique.*

Avant toute chose, on prouve un lemme technique qui nous servira par la suite :

Lemme 1 *On suppose que G muni de d_S est δ-hyperbolique. Soit $[a,b,c]$ un triangle géodésique tel que $d_S(b,c) = 1$. Alors :*

$$\forall y \in [a,b], \forall z \in [a,c], d_S(a,y) = d_S(a,z) \Rightarrow d_S(y,z) \leqslant 2\delta + 2$$

Mots géodésiques et types coniques

Définition 8 *On définit le langage L_{geod} des mots géodésiques par :*

$$L_{geod} = \{\omega \in S^\star, |\overline{\omega}|_S = |\omega|\}$$

Les mots géodésiques sont donc ceux qui réalisent le cas d'égalité de $|\overline{\omega}|_S \leqslant |\omega|$, *qui est toujours vérifiée.*

Définition 9 *Pour* $u \in S^\star$, *on définit le type conique de* u *comme*

$$T(u) := \{v \in S^\star, uv \in L_{geod}\}$$

On a par exemple $T(\varepsilon) = L_{geod}$, ou encore $T(u) = \emptyset$ si et seulement si $u \notin L_{geod}$.
On a alors, et l'analogie est forte entre les types coniques et les résiduels des langages :

Théorème 2 L_{geod} *est régulier si et seulement si* G *muni de* S *ne possède qu'un nombre fini de types coniques.*

Or on prouve le lemme suivant :

Lemme 2 *Pour* G δ*-hyperbolique,* $\gamma \in G$, $n \in \mathbb{N}$, *on définit le* n*-niveau de* γ, $N_n(\gamma)$ *comme :*

$$N_n(\gamma) := \{h \in G, |h|_S \leqslant n \text{ et } |gh|_S < |g|_S\}$$

Alors, pour tout $u \in L_{geod}$, *le* $(2\delta + 3)$*-niveau de* $\overline{u}$ *détermine* $T(u)$.

Aussi, comme il n'y a qu'un nombre fini de $(2\delta+3)$-niveaux possibles pour $\overline{u}$, G ne possède qu'un nombre fini de types coniques, et donc, si G est hyperbolique, L_{geod} est régulier.

Obtention de la structure automatique

On dispose alors d'un automate sur S reconnaissant L_{geod} : notre futur W. Forts de ce résultat, et à l'aide du lemme 1 , on construira, par le procédé dit de "l'automate standart", la structure automatique de G. On en déduira alors le théorème 1, et une solution en temps quadratique au problème du mot.

Références

[1] J.M. Alonso, T. Brady, D. Cooper, V. Ferlini, M. Lustig, M. Mihalik, M. Shapiro, and H. Short. Notes on word hyperbolic groups. *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63, 1991.

[2] David B. A. Epstein, M. S. Paterson, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. Levy, and W. P. Thurston. *Word Processing in Groups.* A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 1992.

[3] É. Ghys. Les groupes hyperboliques. *Astérisque*, 189(190) :203–238, 1990.

Appendices

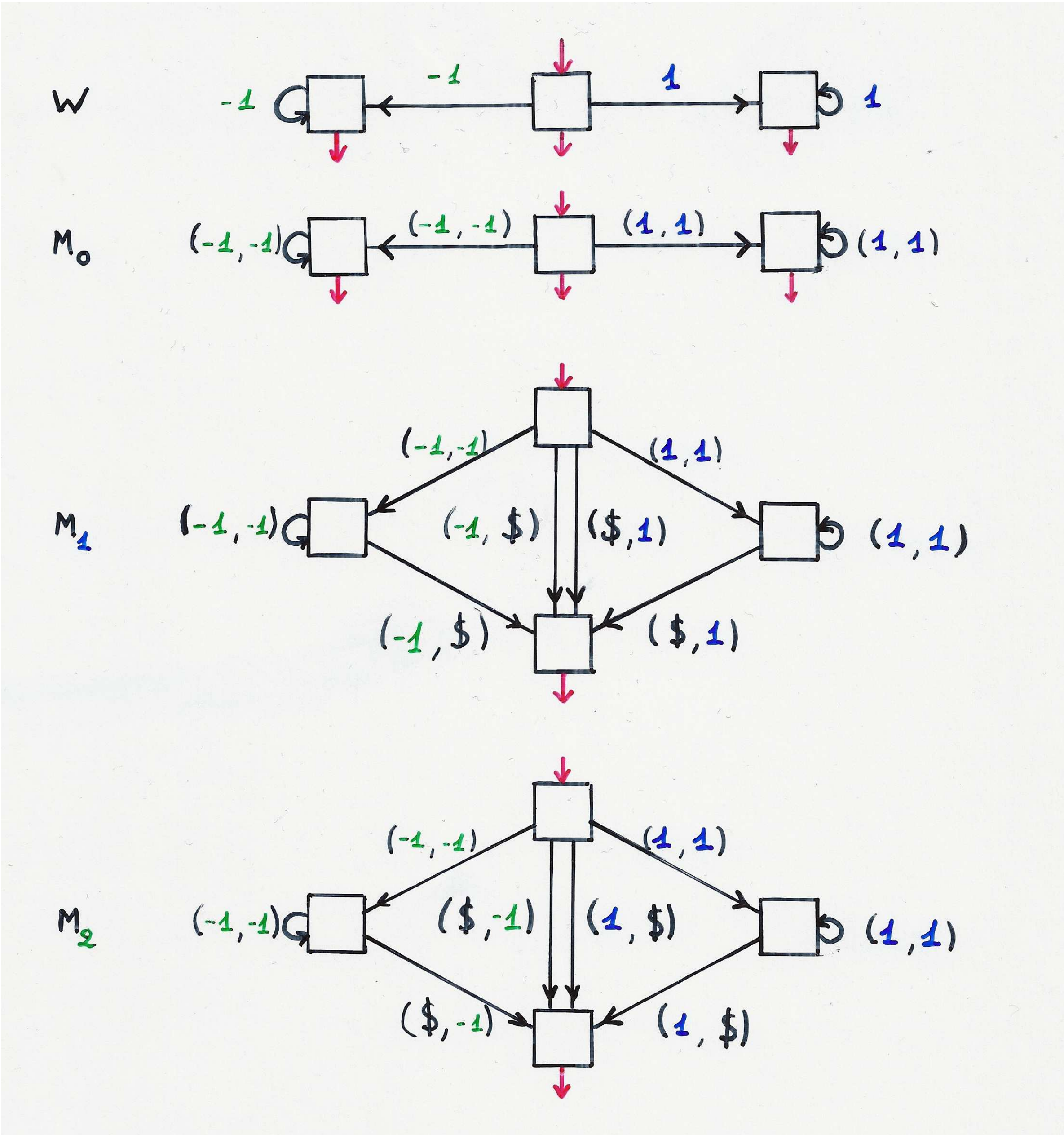

Figure 3 – Un exemple de structure automatique pour $(\mathbb{Z}, +)$

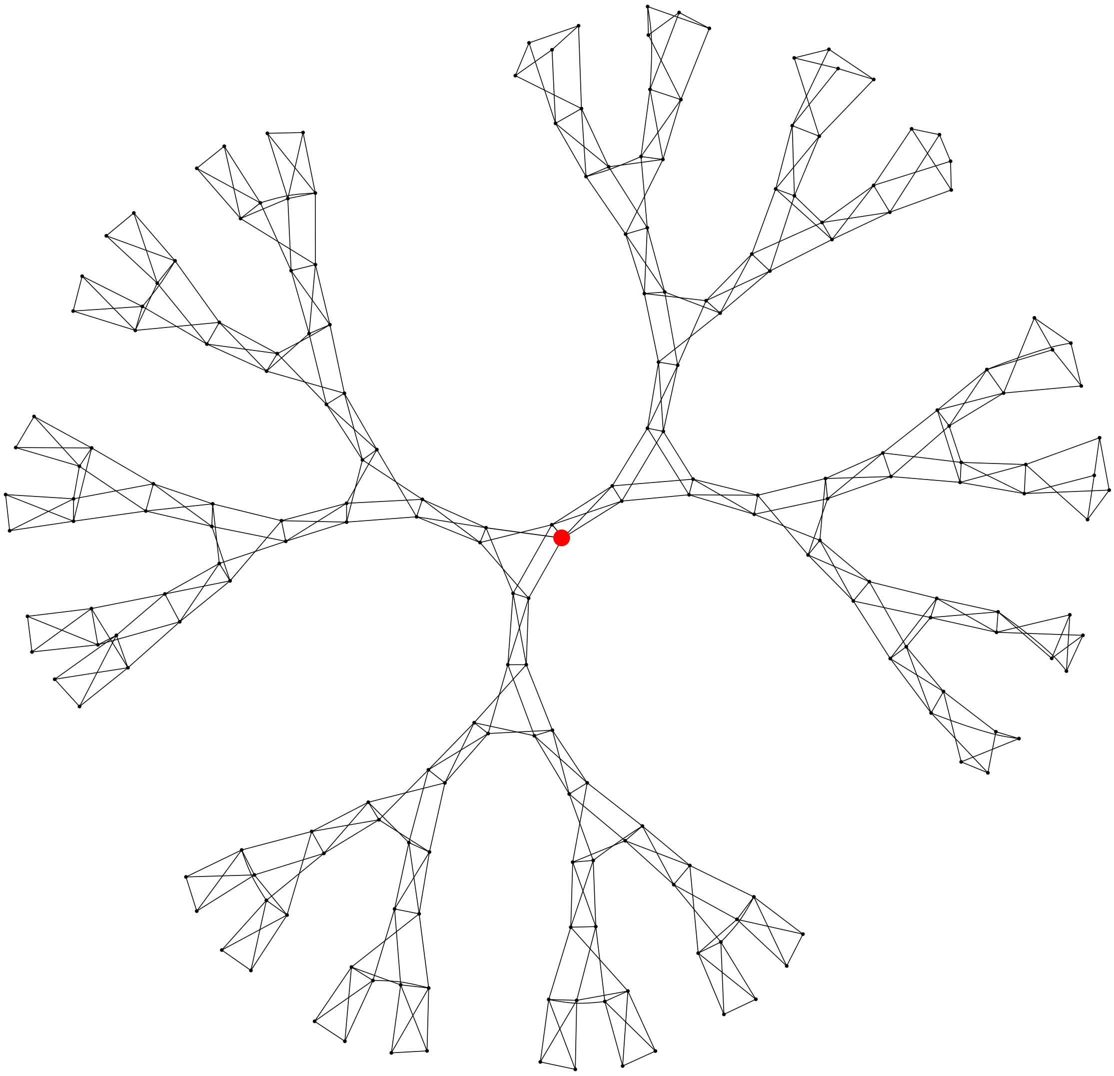

Figure 4 – Le voisinage de l'identité pour un graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique, $SL_2(\mathbb{Z})$, pour un bon système de générateurs (réalisé à l'aide de Graphviz, www.graphviz.org)