Analyse fonctionnelle
TD n° 10

Transformation de Fourier (2)

Séance du 4 mai 2020

Exercice 1. *Échauffement : polynômes de Hermite (cf TD9)*

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

1. Montrer que les polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H.

Indication : On pourra montrer que si $f \in H$ est orthogonal à l'espace engendré par les polynômes, la fonction holomorphe

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt$$

est identiquement nulle, et vérifie $F(ix) = \mathcal{F}(fe^{-t^2})$.

On considère les polynômes de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et les fonctions de Hermite $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$.

2. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

3. Montrer que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ et que $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

4. Montrer que $\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1}$ et que $\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}$.

5. Montrer enfin que $\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\psi_n = -(2n+1)\psi_n$.

6. Montrer que $(\psi_n)_n$ est une base hilbertienne dans $L^2(\mathbb{R})$ de fonctions propres pour la transformée de Fourier.

Indication : On pourra calculer l'équation différentielle satisfaite par $\mathcal{F}(\psi_n)$.

⋆

Exercice 2. *Opérateurs différentiels*

1. Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X^\alpha$ un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ non identiquement nul, $P(D)$ l'opérateur différentiel associé (on utilise la notation $D = (-i\partial_{x_1}, \dots, -i\partial_{x_d})$). Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $P(D)T = 0$, alors $T = 0$.

2. Soit $p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On s'intéresse maintenant à l'opérateur $P\varphi := \mathcal{F}^{-1}(p\widehat{\varphi})$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

a) Soit $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\mathrm{supp}(a * \varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\mathrm{supp}(a) \subset \{0\}$.

b) Montrer que si $\mathrm{supp}(P\varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors p est un polynôme et P un opérateur différentiel.

⋆

Exercice 3. *Transformée de Fourier de la distribution diagonale*

On se propose de calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

1. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\langle \widehat{T}, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon, \quad I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon \xi^2} \widehat{\psi}(\xi, \xi) d\xi.$$

2. En exprimant $\widehat{\psi}(\xi, \xi)$, montrer que

$$I_\varepsilon = 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \psi(x, 2\sqrt{\varepsilon} z - x) dx dz.$$

3. En déduire $\widehat{T}$.

⋆

Exercice 4. *L'équation de Schrödinger*

On considère l'équation sur $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. On suppose $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Résoudre l'équation (1) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$.

2. Justifier dans quel sens la transformée de Fourier de $\xi \mapsto e^{it|\xi|^2}$ est bien définie pour t réel.

3. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, on a $\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \frac{1}{(-4\alpha\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}$.

4. Montrer que cette égalité reste vraie, au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pour α imaginaire pur.

5. En déduire qu'il existe une constante C (à déterminer) telle que pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la solution $u(t, x)$ vérifie, pour $t > 0$ $\|u(t, .)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \|u_0\|_{L^1}$.

⋆

Exercice 5. *Un théorème dû à Hörmander*

Soit d un entier supérieur ou égal à 1. On rappelle que pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $1 \leq p < \infty$, la translation $\tau_h : f \in L^p(\mathbb{R}^d) \mapsto f(\cdot - h) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue.

1. Montrer que pour tout $1 \leq p < \infty$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_h f + f\|_{L^p} \xrightarrow{|h| \to +\infty} 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

Indication : On pourra commencer par le cas où le support de f est compact.

2. Soient $1 \leq p, q < \infty$ avec $p > q$, et on considère une application linéaire T bornée de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, qui commute avec les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}^d$. En étudiant $T(\tau_h f + f)$, montrer que T est nulle.

3. On fixe une fonction test $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ non nulle. Montrer par l'absurde qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $w * f \notin L^1(\mathbb{R}^d)$.

⋆