Analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 11

Espaces de Sobolev

Séance du 11 mai 2020

Exercice 1. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbb{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer, pour $h \in \mathbb{R}^d$, $\tau_h f : x \longmapsto f(x+h)$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$. ALors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ satisfait les trois conditions suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$.*

(ii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'équicontinuité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall h \in B(0,\delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

(iii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'uniforme intégrabilité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} < \varepsilon.$$

Partie réciproque. On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

1. Soit $R > 0$, et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$. On définit $\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{n,R} := \left\{ (\rho_n * f)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}} \,\middle|\, f \in \mathcal{F} \right\}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour $n \geq N$,

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \|\rho_n * f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

3. En déduire que $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$ et conclure.

Partie directe. On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

4. Montrer que pour $f \in L^p(\Omega)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

5. Conclure : montrer que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Application.

6. On suppose Ω borné de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte (au sens où la boule unité de $H_0^1(\Omega)$ est compacte dans $L^2(\Omega)$).

⋆

Exercice 2. *Échauffement : petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$.

2. Montrer que l'injection de $H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$, pour $s_1 \geq s_2$, est continue.

3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'opérateur différentiel $P = -\Delta + \lambda$ est un isomorphisme de $H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \displaystyle\bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^d)$. On pourra montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est d'ordre m, alors T appartient à $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -m - \frac{d}{2}$.

5. On suppose maintenant que $s \in]\frac{d}{2}, \frac{d}{2} + 1[$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et x, y, $\xi \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de d et α) telle que $|e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}| \leq C|x-y|^\alpha|\xi|^\alpha$.

b) En déduire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tout $\alpha \in]0, s - \frac{d}{2}[$, il existe $C(\alpha, d)$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha, d)\|u\|_{H^s}.$$

c) En conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans l'ensemble $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ des fonctions α-höldériennes bornées.

⋆

Exercice 3. *Cas limite d'injection de Sobolev*

1. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Indication : On pourra considérer une fonction $f : x \mapsto \chi(|x|)(\ln|x|)^{\frac{1}{3}}$, sachant qu'en coordonnées polaires, $\nabla f = \partial_r f \overrightarrow{\mathbf{e_r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta f \overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}$.

2. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|\partial_{x_2} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$.

3. En déduire que

$$\forall \theta \geq 2, \quad \|u\|^\theta_{L^{2\theta}(\mathbb{R}^2)} \leq \theta\|u\|^{\theta-1}_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

4. Montrer que pout tout $\theta \geq 1$, il existe une constante $C(\theta)$ telle que

$$\|u\|_{L^{2\theta}(\mathbb{R}^2)} \leq C(\theta)\left(\|u\|_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right).$$

En conclure que pour tout $q \geq 2$, $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$.

⋆

Exercice 4. *Injection de Sobolev homogène*

On définit l'ensemble $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ (pour *Bounded Mean Oscillations*) comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} := \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_{|B}|\,dx < \infty\,, \quad \text{avec} \quad f_{|B} := \frac{1}{|B|}\int_B f\,dx$$

où le sup est pris sur toutes les boules euclidiennes de $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que $(L^1_{loc} \cap \dot{H}^{\frac{d}{2}})(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$ est une semi-norme mais pas une norme.

2. Soit $f \in (L^1_{loc} \cap \dot{H}^{\frac{d}{2}})(\mathbb{R}^d)$ et pour tout réel strictement positif A, $f_{\flat,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\mathcal{F}f)$. Montrer que

$$\|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} \leq CRA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}$$

où R est le rayon de B.

3. On définit $f_{\sharp,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{^cB(0,A)}\mathcal{F}f)$. Montrer que

$$\int_B |f - f_{|B}|\frac{dx}{|B|} \leq \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{\sqrt{|B|}}\|f_{\sharp,A}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

4. Conclure.

⋆