Analyse fonctionnelle
TD n° 12

Opérateurs

Séance du 18 mai 2020

Exercice 1. *Question de cours : relations entre noyau et image*

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné, à domaine dense.

1. Montrer que

$$\ker T \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp, \quad \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\ker T)^\perp.$$

2. On suppose de plus que T est fermé. Montrer qu'alors $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

⋆

Exercice 2. *Échauffement : adjoint et domaine*

Soit $T : D(T) \subset \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ l'opérateur non borné défini par

$$D(T) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \,\middle|\, (nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \right\}, \quad T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (nu_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que $D(T)$ est dense, et que T est fermé.
2. Déterminer $D(T^*)$, T^*, et $\overline{D(T^*)}$.

⋆

Exercice 3. *Opérateurs compacts et suites*

Soient E et F deux espaces de Banach, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est réflexif. Montrer que T est compact si et seulement si l'image par T de toute suite faiblement convergente de E est une suite fortement convergente de F.

⋆

Exercice 4. *Opérateur de multiplication*

Sur l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère la multiplication par $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $M_a : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto (a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Montrer que M_a est un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{N})$ si et seulement si $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que M_a est compact si et seulement si $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

⋆

Exercice 5. *Idéaux de $\mathcal{L}(H)$*

Soit H un espace de Hilbert, et $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$, que l'on suppose fermé en norme et non réduit à $\{0\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ contient les opérateurs compacts.

Indication : On pourra montrer que $\mathcal{I}$ contient toutes les projections selon une droite, puis tous les opérateurs de rang fini.

⋆

Exercice 6. *Fonctions à support dans un même compact*

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. On note $L^2_K(\mathbb{R})$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions à support dans K, que l'on munit de la norme induite.

1. Soit $u \in L^2_K(\mathbb{R})$. Montrer que la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$, définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, qui est la restriction à la droite réelle d'une fonction entière.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^2_K(\mathbb{R})$. On suppose que $u_n \rightharpoonup 0$ (pour la convergence faible). Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\widehat{u_n}(\xi) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que la convergence précédente est en fait uniforme sur les compacts.

4. En déduire que la transformée de Fourier

$$\mathcal{F} : L^2_K(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

est une application linéaire compacte.

⋆

Exercice 7. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 1. *On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H telle que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$.*

1. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hilbertienne $(\tilde{e}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de H, $\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2$. On note $\|T\|^2_{HS}$ cette quantité.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est continu, de norme $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.

3. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

Indication : Penser à l'exercice 3.

4. (*Un exemple.*) On considère dans cette question $H = \ell^2(\mathbb{N})$, et on fixe $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$. On définit l'opérateur d'anti-convolution Γ_c par

$$\Gamma_c : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \mapsto \left(\sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p \right)_{n\in\mathbb{N}} \in H.$$

Montrer que Γ_c est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum (1+n)|c_n|^2 < +\infty$.

⋆

Exercice 8. *Opérateurs à noyaux*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de $L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit

$$(T_K f)(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) dy.$$

Montrer que T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt, avec $\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

2. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme T_K.

3. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer directement que T_K est limite en norme d'opérateurs de rang fini.

⋆