Analyse fonctionnelle
TD n° 4

Topologies faibles

Séance du 2 mars 2020

Exercice 1. *Échauffement : Minimum d'une fonction convexe sur un convexe*

1. On étudie la version séquentielle du théorème de Banach-Alaoglu.

a) Soit E un espace vectoriel normé séparable. Démontrer par un procédé d'extraction diagonale que toute suite bornée de E^* admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible $*$.

b) Trouver un contre-exemple dans un espace vectoriel normé non séparable.

c) Montrer que dans un espace non réflexif, on ne peut pas forcément extraire d'une suite bornée une sous-suite faiblement convergente.

2. Application. Soit H un Hilbert, C un convexe fermé de H (pour la topologie forte).

a) Montrer que C est égal à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. Retrouver le fait que C est faiblement séquentiellement fermé.

b) Soit $f : H \to \mathbb{R}$ convexe telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrer que le minimum de f sur C est atteint en un point de C.

⋆

Exercice 2. *La topologie faible n'est pas métrisable*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible. En rappelant pourquoi tout voisinage faible dans E contient une droite, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $x_n \rightharpoonup 0$.

2. Conclure à une contradiction grâce au théorème de Banach-Steinhaus.

On va maintenant démontrer le même résultat d'une autre manière.

3. (Lemme des noyaux) Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, ψ, des formes linéaires sur E telles que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi.$$

Démontrer que ψ s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k.

4. On suppose que la topologie faible est métrisable. Montrer qu'il existe alors une famille dénombrable $F \subset E^*$, telle que toute forme linéaire continue sur E s'écrive comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de F. En déduire une contradiction.

⋆

Exercice 3. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Soit H un Hilbert séparable, muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$. On considère l'ensemble

$$F := \{e_m + me_n \mid m, n \geq 1\}.$$

Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F, mais qu'il appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F.

⋆

Exercice 4. *Convexes fermés fort et non fermés faible* $*$

1. Dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, on considère
$$C := \{u \mid \liminf_{n\to\infty} u_n \geq 0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé fort, non fermé faible $*$.

2. Soit E un espace vectoriel normé.

a) Montrer que les formes linéaires continues sur E^* muni de la topologie faible $*$ $\sigma(E^*, E)$ sont les évaluations du type φ_x, $x \in E$.

b) On suppose que E est un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E^* d'une autre forme que $\varphi_x : \ell \mapsto \ell(x)$, où $x \in E$. Montrer que le noyau d'une telle forme est un hyperplan fermé fort, mais pas fermé faible $*$.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

Le but de cet exercice est de prouver le résultat suivant :

Théorème. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Si A est compacte pour la topologie faible, alors A est séquentiellement (faiblement) compacte.*

1. On dit qu'une famille $(\ell_j)_{j\in J} \subset E^*$ sépare les points si pour tout $x \in E$: $(\forall j \in J, \ell_j(x) = 0) \Rightarrow x = 0$. Montrer qu'un espace normé séparable admet une famille dénombrable de formes linéaires continues séparant les points, de norme 1.

2. Montrer que si E admet une famille dénombrable bornée de formes linéaires séparant les points, alors les compacts faibles sont métrisables.

3. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. On note $F = \overline{\mathrm{Vect}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ (on ne précise pas si l'adhérence est forte ou faible : pourquoi ?). Montrer que $A \cap F$ est séquentiellement compact dans F pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$, et conclure.

4. Montrer que ce résultat est faux pour la topologie faible $*$.

⋆

Exercice 6. *Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via celui de Krein-Milman*

On considère X un espace métrique compact. Le but de cet exercice est d'établir le résultat intermédiaire suivant :

Définition 1. *Soit A une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$. Pour une E une partie de X, on note A_E l'algèbre des restrictions des fonctions de A à E. On dit que E est A-antisymétrique si les seules fonctions à valeurs réelles dans A_E sont constantes.*

Théorème (Bishop)**.** *Supposons que A est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$ qui soit fermée. Soit $g \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$ telle que $g_{|E} \in A_E$ pour toute partie E A-antisymétrique maximale (pour l'inclusion). Alors $g \in A$.*

1. Dans cette question, on veut montrer que le théorème de Bishop entraîne celui de Stone-Weierstrass dans le cas complexe :

Théorème (Stone-Weierstrass)**.** *Soit X un espace métrique compact, et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$ séparant les points, stable par conjugaison complexe, et telle qu'en tout point $x \in X$ il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$.*

a) On pose $A = \overline{\mathcal{A}}$. Montrer que les parties A-antisymétriques maximales sont les singletons.

b) Conclure.

Dans la suite, on démontre le théorème de Bishop. On considère l'ensemble

$$A^{\perp} := \left\{\mu \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C}) \mid \int_X f d\mu = 0,\ \forall f \in A\right\},$$

où $\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des mesures de Radon complexes sur X. On note également

$$K := \left\{\mu \in A^{\perp} \mid \ \|\mu\| \leq 1\right\}.$$

2. Montrer que K est convexe, qu'il est compact pour la topologie faible $*$ sur $\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$, *i.e.* $\sigma(\mathcal{M}(X,\mathbb{C}),\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C}))$, et qu'on peut supposer que K n'est pas réduit à $\{0\}$.

3. Soit μ un point extrémal de K. On introduit E_μ le support de μ, *i.e.* le plus petit compact $E_\mu \subset X$ tel que $|\mu|(E_\mu) = \|\mu\|$.

a) Supposons donnée une application $f \in A$, à valeurs réelles, et telle que $-1 < f(x) < 1$ sur E_μ. On considère alors les mesures $d\sigma := \frac{1}{2}(1+f)d\mu$ et $d\tau := \frac{1}{2}(1-f)d\mu$. Montrer que $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\|$ appartiennent à K, et que μ est une combinaison convexe de ces deux mesures. En déduire f est constante.

b) Conclure que E_μ est A-antisymétrique.

4. Soit g satisfaisant les hypothèses du théorème de Bishop. Déduire du théorème de Krein-Milman que pour tout $\mu \in K$, on a $\langle g,\mu\rangle = 0$. Conclure.

5. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = 0$, pour tout entier $k < 0$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0_{\text{per}}$, qui sépare les points et contient 1. Ce résultat contredit-il le théorème de Stone-Weierstrass ?

⋆