Analyse fonctionnelle
TD n° 7

Convolution des distributions

Séance du 30 mars 2020

Exercice 1. *Échauffement*

1. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) : $T \star \delta_a$ où $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $H \star \delta_a$, $\mathbb{1} \star \delta_0'$, $(x^m \delta_0^{(n)}) \star (x^p \delta_0^{(q)})$, $(\mathbb{1}_{[a,b]} \star \mathbb{1}_{[c,d]})''$, $\mathbb{1} \star T$ et $\exp \star T$, où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

2. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u \star \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

$\star$

Exercice 2. *Fonctions lipschitziennes*

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer l'équivalence :

1. f est lipschitzienne, *i.e.* : $\exists C > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$;
2. les dérivées partielles de f (au sens des distributions) vérifient $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\quad \forall j \in [\![1, d]\!]$.

$\star$

Exercice 3. *Équations différentielles linéaires*

Soient $a_0, \ldots, a_K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On appelle *solution fondamentale* d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_{k=0}^{K} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

toute distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour le second membre f, en considérant $u \star f$ (lorsque c'est bien défini).

1. On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(u) \subset \mathbb{R}_+\}$. Expliquer pourquoi on peut convoler deux distributions de $\mathcal{D}'_+$. En déduire que $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre commutative pour $\star$, d'élément neutre δ_0.

On notera $u^{\star n}$ la n-ième puissance de u pour la convolution, pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta_0' - \lambda\delta_0$ est inversible, et que :

$$(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{\star -1} = H(t)e^{\lambda t}.$$

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{\star -n} = H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$.

$\star$

Exercice 4. *Équation de Volterra*

On considère l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+$ définie dans l'exercice précédent.

1. Soient $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions de $\mathcal{D}'_+$ qui converge vers T. Montrer que $T \in \mathcal{D}'_+$, et que si $S \in \mathcal{D}'_+$, alors $S \star T_k \to S \star T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $K \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{supp} K \subseteq \mathbb{R}_+$. Pour tout $a > 0$, on pose $M_a := \sup_{y\in[0,a]} |K(y)|$. Montrer que

$$\forall x \in [0,a],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |K^{\star n}(x)| \leq M_a^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

3. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n K^{\star n}$ converge dans $\mathcal{D}'_+$. En déduire que la distribution $(\delta_0 + K)$ est inversible, d'inverse $(\delta_0 + L)$, où L est une fonction localement bornée.

4. Soit $X := L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, et $g \in X$. On veut résoudre dans X l'équation suivante, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ donné :

$$f(x) + \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y)dy = g(x), \qquad \forall x \geq 0.$$

Montrer que l'équation équivaut à $(\delta_0 + He^{\lambda x}) \star f = g$ au sens des distributions. En déduire que l'équation admet toujours une solution.

⋆

Exercice 5. *Dérivées successives des fonctions test*

Soit $a > 0$. On note $H_a := \frac{1}{a}(H - \delta_a \star H)$

1. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, alors $u \star H_a \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u \star H_a = \int_{\mathbb{R}} u$.

On considère une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante, telle que $a_n > 0$, et $\sum a_n < \infty$. On pose $u_k = H_{a_0} \star ... \star H_{a_k}$.

3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $u_k \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$ et u_k est à support dans $[0, a_0 + ... + a_k]$.

4. Soit $j < k$. Montrer les estimations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_j}, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |u_k^{(j)}(x)| dx \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_{j-1}}.$$

5. Montrer que les suites $(u_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies à partir d'un certain rang, et de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En déduire que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction u. Que peut-on dire de u ?

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq 2^n (n!)^\alpha$?

⋆

Exercice 6. *Régularisation par polynômes*

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$P_k(x) = \frac{k^n}{\pi^{n/2}} \left(1 - \frac{|x|^2}{k^n}\right)^{k^{n+2}}.$$

Montrer que $P_k \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Indication : On pourra utiliser que, si $y \in [0,p]$, alors $\left| e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{p}\right)^p \right| \leq \frac{1}{e(p-1)}$.

2. Montrer que toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est limite de polynômes au sens des distributions.

⋆