Chapitre 2

Espaces L^p

2.1 Rappels d'intégration

Dans ce cours, il sera exclusivement question d'intégration sur $\mathbf{R}^N$ pour la mesure de Lebesgue.

Un pavé de $\mathbf{R}^N$ est un ensemble de la forme

$$P(a,b) = [a_1, b_1[\times \ldots \times [a_N, b_N[\text{ où } a, b \in \mathbf{R}^N \text{ avec } a_j \leq b_j \text{ pour } j = 1, \ldots, N\,.$$

On note $|P(a,b)|$ la mesure de ce pavé :

$$|P(a,b)| = \prod_{j=1}^{N} (b_j - a_j)\,.$$

Définition 2.1.1 *Un ensemble E de $\mathbf{R}^N$ est de mesure nulle si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite (P_n) de pavés de $\mathbf{R}^N$ telle que*

$$E \subset \bigcup_{n \geq 0} P_n \quad et \quad \sum_{n \geq 0} |P_n| < \epsilon\,.$$

On vérifie que

Proposition 2.1.2 *Une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle ;*

Toute partie dénombrable de $\mathbf{R}^N$ est de mesure nulle : par exemple, $\mathbf{Q}^N$ est de mesure nulle.

Si $(\mathcal{P}_x)$ est une famille de propriétés indexées par $x \in \mathbf{R}^N$, on dit que $\mathcal{P}_x$ est vraie pp. si

$$\{x \in \mathbf{R}^N \,|\, \mathcal{P}_x \text{ est fausse }\} \text{ est un ensemble de mesure nulle.}$$

Par exemple, étant donnée une fonction $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, on dira que $f(x) \geq 0$ pp. si

$$\{x \in \mathbf{R}^N \,|\, f(x) < 0\} \text{ est un ensemble de mesure nulle.}$$

Comme pour l'intégrale de Riemann, on construit l'intégrale de Lebesgue à partir des fonctions en escalier, pour lesquelles la notion d'intégrale est évidente.

Définition 2.1.3 *Une fonction en escalier à support compact de* $\mathbf{R}^N$ *est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de pavés de* $\mathbf{R}^N$ *deux à deux disjoints. On notera* $E_c(\mathbf{R}^N)$ *l'espace vectoriel des fonctions en escalier à support compact sur* $\mathbf{R}^N$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$.

Rappelons la notion de fonction mesurable :

Définition 2.1.4 *On dit que* $f : \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *est mesurable si il existe une suite* (ϕ_n) *de fonctions de* $E_c(\mathbf{R}^N)$ *telle que*

$$\phi_n(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

Les fonctions mesurables vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.5 *a) Soient* f *et* g *deux fonctions mesurables sur* $\mathbf{R}^N$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$. *Alors* $f+g$, fg *sont mesurables ; plus généralement, pour tout* $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *continue, l'application composée* $x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$ *est mesurable.*

b) Soit (f_n) *une suite de fonctions mesurables sur* $\mathbf{R}^N$ *; alors les fonctions*

$$x \mapsto \sup_{n\geq 0}(f_n(x))\,, \quad x \mapsto \inf_{n\geq 0}(f_n(x))$$

sont mesurables, ainsi que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \inf_{n\geq 0}\sup_{k\geq n}(f_k(x)) \text{ et } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \sup_{n\geq 0}\inf_{k\geq n}(f_k(x))\,.$$

En particulier

$$\text{si } f_n(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N\,, \text{ alors } f \text{ est mesurable.}$$

c) Soit f *fonction mesurable sur* $\mathbf{R}^N$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$ *telle que* $f(x) \neq 0$ *pp. en* $x \in \mathbf{R}^N$, *et* $\Phi : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. Alors* $\Phi \circ f$ *est mesurable. Par exemple,* $1/f$ *et* $\ln|f|$ *sont mesurables sur* $\mathbf{R}^N$.

On rappelle la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier à support compact :

$$\text{si } \phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j \mathbf{1}_{P_j}\,, \text{ alors } \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \phi_j |P_j|\,.$$

On définit ensuite l'intégrale d'une fonction mesurable positive :

Définition 2.1.6 *Soit* $f : \mathbf{R}^N \to [0, +\infty]$ *; l'intégrale de* f *est définie comme suit :*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = \sup\left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx \,\middle|\, \phi \in E_c(\mathbf{R}^N) \text{ et } 0 \leq \phi \leq f \text{ pp.} \right\}\,.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction mesurable positive est toujours un élément bien défini de $[0, +\infty]$; il se peut que

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = +\infty\,.$$

Théorème 2.1.7 (de convergence monotone) *Soit f_n suite croissante de fonctions mesurables positives sur $\mathbf{R}^N$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx\,.$$

Lemme 2.1.8 (Fatou) *Soit f_n suite de fonctions mesurables positives sur $\mathbf{R}^N$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx\,.$$

On définit ensuite la classe des fonctions sommables :

Définition 2.1.9 *Soit $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est sommable si*

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|dx < \infty\,.$$

On définit alors l'intégrale d'une fonction sommable f comme suit : pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, on pose

$$\begin{aligned} f^+(x) = \sup(f(x), 0) \quad &= \tfrac{1}{2}(|f(x)| + f(x))\,, \\ f^-(x) = \sup(-f(x), 0) \quad &= \tfrac{1}{2}(|f(x)| - f(x))\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ et } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N\,.$$

Définition 2.1.10 *Alors, si $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ est sommable, f^+ et f^- sont des fonctions sommables positives et on pose*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} f^+(x)dx - \int_{\mathbf{R}^N} f^-(x)dx$$

Une fonction $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est sommable si $\Re f$ et $\Im f$ sont sommables, ce qui équivaut au fait que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|dx < \infty\,.$$

Dans ce cas, on pose

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} \Re f(x)dx + i\int_{\mathbf{R}^N} \Im f(x)dx\,.$$

Le résultat fondamental sur les fonctions sommables est le suivant :

Théorème 2.1.11 (de convergence dominée) *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^N$ tq.*

a) $f_n(x) \to f(x)$ pp. en $x \in \mathbf{R}^N$;

b) il existe une fonction sommable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N \text{ et pour tout } n \geq 0\,.$$

Alors f est sommable et

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx \to \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx \text{ pour } n \to \infty\,.$$

On note $S^1(\mathbf{R}^N)$ l'ensemble des fonctions sommables sur $\mathbf{R}^N$; c'est un espace vectoriel, et

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

définit une forme linéaire sur $S^1(\mathbf{R}^N)$.

De plus cette forme linéaire est positive sur les fonctions positives : plus précisément, si $f : \mathbf{R}^N \to [0, \infty|$ est mesurable, alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx \geq 0$$

et

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = 0 \text{ ssi } f(x) = 0 \text{ pp. en } x\,.$$

Considérons maintenant $f : \mathbf{R}^{N_1+N_2} \to \mathbf{C}$ comme fonction de deux variables $f(x) = f(x_1, x_2)$, en identifiant $\mathbf{R}^{N_1+N_2}$ au produit cartésien $\mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$.

Théorème 2.1.12 (Tonelli) *Soit $f : \mathbf{R}^{N_1+N_2} \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors la fonction $f(x_1, \cdot)$ est mesurable pp. en x_1 ; de plus l'application*

$$F_1 : \; x_1 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N_2}} f(x_1, x_2)dx_2$$

définie pp. en x_1 est mesurable sur $\mathbf{R}^{N_1}$ et on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N_1+N_2}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{N_1}} F_1(x_1)dx_1\,.$$

Enonçons maintenant le théorème de Fubini

Théorème 2.1.13 (Fubini) *Soit $f \in S^1(\mathbf{R}^{N_1+N_2})$. Alors la fonction $f(x_1, \cdot)$ est sommable sur $\mathbf{R}^{N_2}$ pour presque tout $x_1 \in \mathbf{R}^{N_1}$; de plus la fonction*

$$F_1 : \, x_1 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N_2}} f(x_1, x_2)dx_2$$

définie pour presque tout $x_1 \in \mathbf{R}^{N_1}$ est sommable et on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N_1+N_2}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{N_1}} F_1(x_1)dx_1\,.$$

Evidemment dans les deux théorèmes précédent, ce qui a été dit de F_1 vaut aussi pour

$$F_2 : x_2 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N_1}} f(x_1, x_2) dx_1$$

qui est définie pour presque tout $x_2 \in \mathbf{R}^{N_2}$, et on a, dans les deux cas

$$\int_{\mathbf{R}^{N_1+N_2}} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^{N_2}} F_1(x_2) dx_2 \,.$$

Un ensemble $X \subset \mathbf{R}^N$ est dit mesurable si sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_X$ est une fonction mesurable. Les ensembles $\emptyset, \mathbf{R}^N$ sont mesurables ; une réunion dénombrable, ou bien une intersection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable ; le complémentaire d'un ensemble mesurable dans $\mathbf{R}^N$ est mesurable.

Pour $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on définit sa mesure, notée $|X|$, par

$$|X| = \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_X(x) dx \,.$$

Etant donnés f mesurable sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $[0, \infty]$, ou bien à valeurs dans $\mathbf{C}$ et sommable, et $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on pose

$$\int_X f(x) dx := \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_X(x) f(x) dx \,.$$

Réciproquement, étant donné $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on dira qu'une fonction f définie sur X est mesurable ssi son prolongement F par 0 à $\mathbf{R}^N$ est mesurable.

On dira que f est sommable sur X ssi F est sommable sur $\mathbf{R}^N$. On définit ainsi l'espace vectoriel $S^1(X)$, et

$$\int_X f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} F(x) dx \,.$$

Tout ce qui été dit plus haut sur les intégrales de fonctions mesurables définies sur $\mathbf{R}^N$ se transpose aux fonctions mesurables définies sur une partie mesurable X de $\mathbf{R}^N$.

Citons enfin une inégalité élémentaire mais très utile :

Inégalité de Bienaimé-Tchebychev

Pour $f \in S^1(X)$ et $\lambda > 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}$ est mesurable et de mesure

$$|\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f(x)| dx \,.$$

2.2 Espaces L^p

Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble mesurable, de mesure $|X| > 0$. Pour $p \in [1, \infty[$, on note l'espace des applications p-sommables

$$S^p(X) = \left\{ f : X \mapsto \mathbf{C} \text{ mesurable } \mid \int_X |f(x)|^p dx < \infty \right\} \,.$$

La fonction

$$]0,\infty[\ni z \mapsto z^p \in]0,\infty[$$

étant convexe, pour tout $x \in X$

$$\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{2}\right)^p \leq \tfrac{1}{2}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)\,.$$

Donc, si $f, g \in S^p(X)$

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p dx \leq 2^{p-1}\int_X (|f(x)|^p + |g(x)|^p)dx < \infty$$

de sorte que $f+g \in S^p(X)$. On vérifie alors que $S^p(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

2.2.1 Inégalités de Jensen, de Hölder et de Minkowski

Soit $m \in S^1(X)$ telle que

$$m(x) \geq 0 \text{ p.p., and } \int_X m(x)dx = 1\,.$$

Soit $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ convexe et continue en 0 ; on sait que ϕ est donc continue sur $\mathbf{R}_+$ et qu'en tout point $z \in]0,\infty[$, la fonction ϕ admet une dérivée à droite $\phi'_d(z)$ et à gauche $\phi'_g(z)$; de plus, pour tout $z \in \mathbf{R}_+$

$$\phi(z) \geq \phi(z_0) + \lambda(z - z_0) \text{ dès que } \lambda \in [\phi'_g(z_0), \phi'_d(z_0)]\,.$$

Inégalité de Jensen

Soit $f : X \to \mathbf{R}_+$ mesurable ; alors

$$\phi\left(\int_X f(x)m(x)dx\right) \leq \int_X \phi(f(x))m(x)dx\,.$$

Démonstration. On pose

$$M = \int_X f(x)m(x)dx\,.$$

Si $M = 0$, on a $f(x)m(x) = 0$ p.p., et les deux membres de l'inégalité ci-dessus sont égaux à $\phi(0)$.

Supposons que $M > 0$, et choisissons $\lambda \in [\phi'_g(M), \phi'_d(M)]$: donc on a

$$\phi(z) \geq \phi(M) + \lambda(z - M) \text{ pour tout } z \in \mathbf{R}_+\,.$$

Donc

$$\phi(f(x)) \geq \phi(M) + \lambda(f(x) - M) \text{ pour tout } x \in X\,.$$

En multipliant par $m(x)$ et en intégrant sur X les deux membres de l'inégalité ci-dessus, on trouve que

$$\int_X \phi(f(x))m(x)dx \geq \phi(M) + \lambda \int (f(x) - M)m(x)dx = \phi(M)\,.$$

■

Soit $p \in]1, \infty[$. On notera p' le nombre dual de p, défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,, \quad \text{soit } p' = \frac{p}{p-1}\,.$$

INÉGALITÉ DE HÖLDER

Pour tout $(f, g) \in S^p(X) \times S^{p'}(X)$, on a

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}\,.$$

Démonstration. D'abord, en changeant f en $|f|$ et g en $|g|$, on peut se ramener au cas où $f \geq 0$ et $g \geq 0$. Si

$$\left(\int_X |g(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'} = 0$$

$g(x) = 0$ pp., de sorte que les deux membres de l'inégalité de Hölder sont nuls. On supposera donc que

$$G = \int_X |g(x)|^{p'} dx > 0\,.$$

Posons

$$h(x) = \frac{f(x)g(x)}{g(x)^{p'}} \text{ si } g(x) > 0\,, \text{ et } h(x) = 0 \text{ si } g(x) = 0\,.$$

La fonction h est mesurable, comme limite pp. de la suite de fonctions mesurables

$$h_n(x) = \frac{f(x)g(x)}{\frac{1}{n} + g(x)^{p'}}\,.$$

On applique l'inégalité de Jensen à la fonction h et à la fonction convexe $z \mapsto z^p$:

$$\begin{aligned}\left(\int_X h(x)\tfrac{g(x)^{p'}}{G}dx\right)^p &= \frac{1}{G^p}\left(\int_X f(x)g(x)dx\right)^p \\ &\leq \int_X h(x)^p \tfrac{g(x)^{p'}}{G}dx = \frac{1}{G}\int_X \frac{f(x)^p g(x)^p}{g(x)^{pp'}} g(x)^{p'} dx\,.\end{aligned}$$

Puisque $p + p' = pp'$, cette inégalité se réduit à

$$\left(\int_X f(x)g(x)dx\right)^p \leq G^{p-1} f(x)^p dx\,.$$

Comme $p-1=p/p'$,

$$G^{p-1}=\left(\int_X |g(x)|^{p'}dx\right)^{p/p'}$$

de sorte que la dernière inégalité ci-dessus se réduit précisément à l'inégalité de Hölder. ■

Lorsque $p=2$, on a $p'=2$ et l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz rappelée ci-dessous.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(f,g)\in S^p(X)\times S^{p'}(X)$, on a

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_X |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_X |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Minkowski est également fondamentale : elle jouera le rôle de l'inégalité triangulaire dans les espaces L^p.

Inégalité de Minkowski

Pour tout $(f,g)\in S^p(X)\times S^p(X)$, on a

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^pdx\right)^{1/p}\le\left(\int_X |f(x)|^pdx\right)^{1/p}+\left(\int_X |g(x)|^pdx\right)^{1/p}.$$

On remarque que cette inégalité est encore vraie — et triviale — pour $p=1$.

Démonstration. On se ramène au cas où $f\ge 0$ et $g\ge 0$ pp., car

$$\int_X |f(x)+g(x)|^pdx\le\int_X (|f(x)|+|g(x)|)^pdx$$

puisque

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)| \text{ pour tout } x\in X\,.$$

Pour commencer,

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))^pdx &= \int_X (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)dx\\ &+\int_X (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)dx\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)dx &\le \left(\int_X f(x)^pdx\right)^{1/p}\left(\int_X (f(x)+g(x))^{(p-1)p'}dx\right)^{1/p'}\\ &= \left(\int_X f(x)^pdx\right)^{1/p}\left(\int_X (f(x)+g(x))^pdx\right)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

et de même

$$\int_X (f(x)+g(x))^{p-1} g(x)dx \le \left(\int_X g(x)^p dx\right)^{1/p} \left(\int_X (f(x)+g(x))^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}} .$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))^p dx \le & \left(\int_X (f(x)+g(x))^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ & \times \left(\left(\int_X f(x)^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_X g(x)^p dx\right)^{1/p}\right) .\end{aligned}$$

Soit

$$\int_X (f(x)+g(x))^p dx = 0$$

auquel cas l'inégalité de Minkowski est triviale, soit

$$\int_X (f(x)+g(x))^p dx > 0$$

auquel cas l'inégalité de Minkowski découle de l'avant-dernière inégalité. ■

C'est un exercice élémentaire d'énoncer et de démontrer, à partir des inégalités de Jensen, de Minkowski et de Hölder, les inégalités analogues pour les espaces de suite de type $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$, et en particulier de vérifier que $x \mapsto \|x\|_p$ définit bien une norme sur $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$.

2.2.2 L^p comme espace de Banach

Pour $1 \le p < \infty$ et pour tout $f \in S^p(X)$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p\right)^{1/p} .$$

Pour $p = 1$, $f \mapsto \|f\|_1$ définit évidemment une semi-norme sur l'espace des fonctions sommables $S^1(X)$.

Pour $p \in]0,\infty[$, l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire pour $f \mapsto \|f\|_p$; ainsi $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $S^p(X)$.

Pour $f \in S^p(X)$,

$$\|f\|_p = 0 \text{ ssi } f(x) = 0 \text{ pp.}$$

De plus, si f et $g \in S^p(X)$ et vérifient $f(x) = g(x)$ pp. en $x \in X$, alors on a $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Posons

$$\mathcal{N} = \{f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}\,\text{mesurable } \mid f(x) = 0 \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N\} ;$$

clairement, $\mathcal{N}$ est un sev de $S^p(X)$ pour tout $1 \le p < \infty$.

Définition 2.2.1 *On pose $L^p(X) = S^p(X)/\mathcal{N}$; de plus, pour $f \in L^p(X)$, on pose*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f_0(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

où f_0 est un représentant quelconque de la classe d'équivalence f dans $S^p(X)$ — en vertu des remarques ci-dessus, la valeur de $\|f\|_p$ ne dépend pas du choix de ce représentant.

L'inconvénient de cette définition est que, pour un point particulier x_0 fixé, on ne peut pas parler de $f(x_0)$ pour $f \in L^p(X)$: comme f est une classe d'équivalence de fonctions égales pp., la valeur en x_0 d'un représentant de cette classe peut-être absolument quelconque.

Toutefois, cet inconvénient est grandement compensé par le résultat suivant.

Théorème 2.2.2 *Pour $p \in [1, \infty[$, $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur l'espace $L^p(X)$ qui est un espace de Banach pour cette norme.*

Démonstration. Que $f \mapsto \|f\|_p$ est évident, puisqu'on a quotienté $S^p(X)$ précisément par l'ensemble des fonctions annulant $\|\cdot\|_p$ — l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|_p$ sont inchangées par passage au quotient.

Pour montrer que $L^p(X)$ est un Banach, il suffit de prouver que toute série normalement convergente dans $L^p(X)$ est convergente (voir Proposition 1.3.8).

Soit donc (f_n) suite de $L^p(X)$ tq.

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty\,.$$

Soit g définie par

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} |f_n(x)| \text{ pp. en } x \in X\,.$$

La fonction g est définie pp. en x, mesurable sur X et à valeurs dans $[0, \infty]$, comme limite d'une suite croissante de fonctions mesurables positives ou nulles.

L'inégalité de Minkowski montre que, pour tout N fini, on a

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} |f_n|\right\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p\,.$$

En appliquant le lemme de Fatou, on trouve que

$$\|g\|_p \leq \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty \text{ d'où en particulier } g(x) \text{ est fini pp. en } x \in X\,,$$

grâce à l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev.

Comme $\mathbf{C}$ est complet et que la série

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x)$$

est absolument convergente pp. en $x \in \mathbf{R}^N$, elle est convergente pp. en $x \in \mathbf{R}^N$. Notons alors

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N ,$$

et montrons que cette série converge vers f dans $L^p(X)$.

En appliquant à nouveau le lemme de Fatou, on voit que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p \leq \varliminf_{M\to\infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{M} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty$$

car

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p \text{ est le reste de la série } \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty .$$

En particulier, $f \in L^p(X)$, cqfd. ■

En considérant le cas de fonctions en escalier de la forme

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} f_k \mathbf{1}_{P(k,k+\vec{1})}$$

où on a noté $\vec{1} = (1, \ldots, 1)$, le résultat ci-dessus démontre la complétude de $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.

L'argument de la démonstration implique le résultat suivant :

Corollaire 2.2.3 *Soit (f_n) suite de $L^p(X)$ tq. $f_n \to f$ dans $L^p(X)$ lorsque $n \to \infty$. Il existe une suite extraite de (f_{n_k}) tq.*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ pp. en $x \in X$;

b) il existe $g \in L^p(X)$ tq. $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. Comme la suite (f_n) converge dans $L^p(X)$, elle est de Cauchy. On peut donc extraire une sous-suite (f_{n_k}) tq.

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} ;$$

(voir la preuve de la proposition 1.3.8).

On conclut comme dans la preuve du théorème de complétude ci-dessus en posant

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{k\geq 0} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| .$$

■

L'inégalité de Hölder montre que, pour tout $1 < p < \infty$ et tout $f \in L^{p'}(X)$ l'application

$$T(f) : \phi \mapsto \int_X f(x)\phi(x)dx$$

est une forme linéaire continue sur $L^p(X)$, de norme

$$\|T(f)\| = \|f\|_{p'} .$$

On admettra le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 *L'application linéaire T est une bijection isométrique de $L^{p'}(X)$ dans le dual topologique de $L^p(X)$.*

On identifiera donc $L^{p'}(X)$ à $L^p(X)'$ — cette identification est à l'origine de la terminologie "exposants duaux" désignant p et $p' = \frac{p}{p-1}$.

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat ; elles demandent soit de connaître un peu plus de théorie de la mesure que ce qui est rappelé ici (en particulier le théorème de Radon-Nikodym), soit d'utiliser des propriétés fines de convexité de la boule unité de $L^p(X)$.

2.2.3 Approximation dans L^p.

Soit X un ouvert non vide de $\mathbf{R}^N$.

Proposition 2.2.5 *Pour $p \in [1, \infty[$, $E_c(X)$ est dense dans $L^p(X)$.*

Démonstration. Pour simplifier un peu, on se restreindra au cas de la dimension 1 : autrement dit, X est un ouvert non vide de $\mathbf{R}$.

Soit donc $f \in L^p(X)$; montrons qu'il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier à support compact dans X telle que

$$\|f - \phi_n\|_p \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

D'abord, toute fonction $f \in L^p(X)$ se décompose sous la forme

$$f(x) = \Re f(x)^+ - \Re f(x)^- + i\Im f(x)^+ - i\Im f(x)^-$$

et chacune des fonctions $(\Re f)^\pm$ et $(\Im f)^\pm$ appartient à $L^p(X)$. Il suffit donc de démontrer la convergence ci-dessus pour $f \geq 0$ pp..

De plus, quitte à prolonger f par 0 en dehors de X, on peut se ramener au cas où $X = \mathbf{R}$.

Soit donc $f \geq 0$ pp. appartenant à $L^p(\mathbf{R})$; comme $f^p \geq 0$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$, il existe une suite (ϕ_n) de $E_c(\mathbf{R})$ tq.

$$0 \leq \phi_n(x) \leq f(x)^p \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ et pp. en } x$$

et

$$\int_X \phi_n(x)dx \to \int f(x)^p dx \text{ pour } n \to \infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite de (ϕ_n), on peut supposer d'après le corollaire 2.2.3 que $\phi_n(x) \to f(x)^p$ pp. en $x \in \mathbf{R}$.

Or les fonctions ϕ_n sont de la forme

$$\phi_n(x) = \sum_{1\leq j\leq J_n} \lambda_{n,j} \mathbf{1}_{[a_{n,j}, b_{n_j}[}(x)$$

avec

$$\lambda_{n,j} > 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, J_n$$

et

$$a_{n,j} < b_{n,j} \le a_{n,j+1} \text{ pour tout } n \ge 0 \text{ et } j = 1, \ldots, J_n - 1 .$$

Alors

$$\phi_n(x)^{1/p} = \sum_{1 \le j \le J_n} \lambda_{n,j}^{1/p} \mathbf{1}_{[a_{n,j}, b_{n_j}[}(x)$$

définit un élément de $E_c(\mathbf{R})$, et on a

$$\phi_n^{1/p}(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \text{ pour } n \to \infty .$$

Donc

$$\left| f(x) - \phi_n(x)^{1/p} \right|^p \to 0 \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \text{ pour } n \to \infty$$

et

$$\left| f(x) - \phi_n(x)^{1/p} \right|^p \le f(x)^p \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} .$$

Par convergence dominée, on en déduit que

$$\| f - \phi_n^{1/p} \|_p \to 0 \text{ pour } n \to \infty ,$$

cqfd. ■

Théorème 2.2.6 *Pour tout ouvert non vide $X \subset \mathbf{R}^N$, l'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. A nouveau, par souci de simplicité, nous allons nous restreindre à la dimension 1, c'est à dire au cas où X est un ouvert non vide de $\mathbf{R}$.

Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de montrer que, pour toute fonction en escalier à support compact $f \in E_c(\mathbf{R})$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\phi \in C_c(\mathbf{R})$ tq. $\| f - \phi \|_p < \epsilon$.

Par linéarité, il suffit de considérer le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle fini :

$$f = \mathbf{1}_{[a,b[} \text{ où } a < b .$$

Posons alors

$$C^\epsilon_{[a,b[}(x) = 1 \text{ si } x \in [a,b] , \quad C_{[a,b[}(x) = 0 \text{ si } x \le a - \epsilon \text{ ou } x \ge b + \epsilon$$
$$C^\epsilon_{[a,b[}(x) = 1 + \tfrac{1}{\epsilon}(x - a) \text{ si } x \in]a - \epsilon, a[,$$
$$C^\epsilon_{[a,b[}(x) = 1 - \tfrac{1}{\epsilon}(x - b) \text{ si } x \in]b, b + \epsilon[.$$

Evidemment, $C^\epsilon_{[a,b[}$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ de support $[a - \epsilon, b + \epsilon]$ qui est compact.

Alors, comme pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \le \mathbf{1}_{[a,b[}(x) \le C^\epsilon_{[a,b[}(x) \le 1 ,$$

il s'ensuit que

$$0 \le |C^\epsilon_{[a,b[}(x) - \mathbf{1}_{[a,b[}(x)| = C^\epsilon_{[a,b[}(x) - \mathbf{1}_{[a,b[}(x) \le 1$$

de sorte que

$$\|C^{\epsilon}_{[a,b[} - \mathbf{1}_{[a,b[}\|_p^p \leq \int_{\mathbf{R}} (C^{\epsilon}_{[a,b[}(x) - \mathbf{1}_{[a,b[}(x))dx = \epsilon\,,$$

cqfd. ∎

Une autre conséquence importante de la densité de la classe des fonctions en escalier à support compact dans L^p est la séparabilité de L^p pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 2.2.7 *Un espace métrique est dit séparable si il contient une partie dénombrable dense.*

Par exemple, $\mathbf{R}^N$ (muni de sa topologie d'evn de dimension finie) est séparable, car il contient $\mathbf{Q}^N$ qui est dénombrable et dense.

Tout espace métrique précompact est séparable : en effet, pour tout $m \geq 1$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2^{-m} ; il suffit de prendre comme partie dénombrable dense l'ensemble des centres de toutes ces boules pour m décrivant $\mathbf{N}^*$. Cette partie est dénombrable car c'est une réunion dénombrable d'ensembles finis ; de plus, pour tout $m \geq 1$, tout point de l'espace précompact considéré est à une distance au plus 2^{-m} d'un de ces centres : cette partie est donc dense.

Théorème 2.2.8 *Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(X)$ est séparable.*

Démonstration. De nouveau, pour éviter d'avoir à manipuler des notations trop lourdes, nous donnons la démonstration de ce résultat qu'en dimension 1, c'est à dire pour X ouvert non vide de $\mathbf{R}$, et pour des fonctions à valeurs réelles.

Comme pour démontrer la densité de $E_c(X)$ dans $L^p(X)$, il suffit de traiter le cas de $X = \mathbf{R}$, en prolongeant les fonctions définies pp. sur X par 0 en dehors de X.

Considérons, dans $E_c(\mathbf{R})$ la classe

$$E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j[} \right\}$$

avec

$$l_j \in \mathbf{Q} \text{ et } a_j, b_j \in \mathbf{Q} \text{ pour tout } j = 1, \ldots, n\,,$$

et

$$a_j < b_j \leq a_{j+1} \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, n-1\,.$$

L'ensemble $E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis — obtenus en restreignant n, les dénominateurs de λ_j et ceux de a_j et de b_j à être plus petits que M tandis que $n \leq M$, $|\lambda_j| \leq M$, $|a|$ et $|b| \leq M$. Donc $E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ est un ensemble dénombrable.

Montrons que $E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ est dense dans $L^p(\mathbf{R})$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

D'après la proposition 2.2.5, il suffit de vérifier que, pour tout $\phi \in E_c(\mathbf{R})$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ tq. $\|\phi - f\|_p < \epsilon$.

Ecrivons
$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{1}_{[\alpha_j, \beta_j[}$$
avec
$$\alpha_j < \beta_j \leq \alpha_{j+1} \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, n-1\,.$$

Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$, étant donné $\epsilon > 0$, il existe $l_j \in \mathbf{Q}$ tel que $|\lambda_j - l_j| < \epsilon$ pour $j = 1, \ldots, n$; de même il existe $a_j, b_j \in \mathbf{Q}$ pour $j = 1, \ldots, n$ tels que l'on ait
$$|\alpha_j - a_j| + |\beta_j - b_j| < \epsilon \text{ pour } j = 1, \ldots, n\,,$$
ainsi que
$$a_j < b_j \leq a_{j+1} \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, n-1\,.$$
Posons alors
$$f = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j[} \in E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})\,.$$

Estimons
$$\begin{aligned}\|\phi - f\|_p &\leq \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j \mathbf{1}_{[\alpha_j, \beta_j[} - l_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j[}\|_p \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - l_j| \|\mathbf{1}_{[\alpha_j, \beta_j[}\|_p + \sum_{j=1}^{n} |l_j| \|\mathbf{1}_{[\alpha_j, \beta_j[} - \mathbf{1}_{[a_j, b_j[}\|_p\,.\end{aligned}$$
La première somme dans le membre de droite est majorée par
$$n\epsilon |\operatorname{supp}(f)|$$
La seconde est majorée par
$$\begin{aligned}&\left(\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |f(x)| + \epsilon\right) \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{1}_{[\alpha_j, \beta_j[} - \mathbf{1}_{[a_j, b_j[}\|_p \\ &\qquad\qquad \leq \left(\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |f(x)| + \epsilon\right) \sum_{j=1}^{n} |[\alpha_j, \beta_j[\Delta [a_j, b_j[|^{1/p}\,.\end{aligned}$$
Or
$$|[\alpha_j, \beta_j[\Delta [a_j, b_j[| \leq |\alpha_j - a_j| + |\beta_j - b_j| \leq 2\epsilon\,.$$
Donc au total
$$\|\phi - f\|_p \leq n |\operatorname{supp}(f)| \epsilon + n \left(\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |f(x)| + \epsilon\right) (2\epsilon)^{1/p} = O(\epsilon^{1/p})$$
cqfd. ■

2.3 L'espace L^∞

Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble mesurable et $g : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

Définition 2.3.1 *On appelle "borne supérieure essentielle" de g, le nombre*

$$\operatorname*{supess}_{x\in X} g = \inf\{\lambda \geq 0 \,|\, g^{-1}(]\lambda, \infty]) \textit{ est de mesure nulle } \}$$

Dans cette définition l'inf est atteint, car

$$g^{-1}(]\operatorname*{supess}_{x\in X} g, \infty]) = \bigcup_{n\geq 1} g^{-1}(]\operatorname*{supess}_{x\in X} g + \tfrac{1}{n}, \infty])$$

et que le membre de droite est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Définition 2.3.2 *Pour $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ fonction mesurable définie pp., on pose*

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{supess}_{x\in X} |f(x)|\,.$$

On définit

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbf{C} \textit{ mesurable tq. } \|f\|_\infty < \infty\}/\mathcal{N}$$

où

$$\mathcal{N} = \{f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}\textit{mesurable tq. } f(x) = 0 \textit{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N\}\,.$$

Proposition 2.3.3 *L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur l'espace $L^\infty(X)$ qui en fait un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) série normalement convergente dans $L^\infty(X)$:

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty = M < \infty\,.$$

Notons $E_n = \{x \in X \text{ tq. } |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$. Alors

$$E = \bigcup_{n\geq 0} E_n \text{ est de mesure nulle}$$

comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, et

$$\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|_\infty \leq M \text{ pour tout } x \in X \setminus E\,.$$

Comme $\mathbf{C}$ est complet, il existe $f : X \setminus E \to \mathbf{C}$ telle que

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in X \setminus E\,.$$

Clairement, $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X \setminus E$; de plus f est mesurable comme somme d'une série de fonctions mesurables convergeant pp. : donc $f \in L^\infty(X)$.

Enfin

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty \text{ pour tout } x \in X \setminus E$$

c'est à dire que

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\| \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty \to 0$$

pour $N \to \infty$, cqfd. ■

On vérife sans peine que es inégalités de Hölder et de Minkowski valent encore pour $p = 1$ et $p' = \infty$.

Proposition 2.3.4 *Soit X ouvert non vide de $\mathbf{R}^N$; l'espace $L^\infty(X)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. Soit $X =]a, b[$; alors l'espace $L^\infty(X)$ n'est pas séparable : considérons en effet la famille de fonctions

$$\phi_z(x) = 1 \text{ si } a < x_1 < z\,, \text{ et } \phi_z(x) = 0 \text{ si } z \leq x < b\,.$$

Cette famille est non dénombrable ; d'autre part

$$\|\phi_z - \phi_{z'}\|_\infty = 1 \text{ pour tous } z \neq z' \in]a, b[\,.$$

Il ne peut donc exister de suite dénombrable dense dans $L^\infty(]a, b[)$. Ceci démontre le résultat annoncé en dimension $N = 1$: en effet, X contient un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$, et $L^\infty(]a, b[)$ s'identifie au sous-espace de $L^\infty(X)$ des fonctions nulles pp. en dehors de $]a, b[$. Le cas d'un N général est identique. ■

De même, $C_c(\Omega)$ n'est jamais dense dans $L^\infty(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide, car une limite uniforme de fonctions continues est continue. En fait, l'adhérence dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ de $C_c(\mathbf{R}^N)$ est l'espace $C_0(\mathbf{R}^N)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

2.4 Convolution

Commençons par définir le produit de convolution pour les fonctions continues à support compact.

Définition 2.4.1 *Soient $f, g \in C_c(\mathbf{R}^N)$. Le produit de convolution de f par g est la fonction*

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy\,.$$

On vérifie par convergence dominée que $f \star g$ est continue ; de plus, on a la majoration élémentaire suivante du support de $f \star g$:

MAJORATION DU SUPPORT DE $f \star g$

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g) := \{x_1 + x_2 \text{ tq. } x_1 \in \operatorname{supp}(f) \text{ et } x_2 \in \operatorname{supp}(g)\}\,.$$

On vérifie également que

$$f \star g = g \star f \text{ autrement dit que } f \star g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y)dy\,.$$

Nous allons établir ensuite l'inégalité fondamentale qui joue, pour le produit de convolution, le rôle de l'inégalité de Hölder pour le produit usuel des fonctions.

INÉGALITÉ DE YOUNG

Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; alors pour f, g continues à support compact sur $\mathbf{R}^N$, on a

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

Avant de donner la preuve de cette inégalité, énonçons une extension de l'inégalité de Hölder :

INÉGALITÉ DE HÖLDER

Soient $p_1, \ldots, p_n \geq 1$ tels que $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1$. Alors, pour tous $f_1 \in L^{p_1}(X)$,...,$f_n \in L^{p_n}(X)$

$$\|f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n}\,.$$

Démonstration. Appliquer l'inégalité de Hölder à $f = f_1$ et $g = f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ et faire un raisonnement par récurrence sur n. ■

Démonstration. Le cas où $r = \infty$ découle d'une simple application de l'inégalité de Hölder usuelle ('a deux facteurs).

En passant aux modules de f et g, on voit qu'il suffit de montrer cette inégalité pour f et g positives ou nulles.

Alors, en appliquant l'inégalité de Hölder ci-dessus avec $n = 3$, $p_1 = r$, $p_2 = (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})^{-1}$ et $p_3 = (\frac{1}{q} - \frac{1}{r})^{-1}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\|f \star g\|_r^r = & \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)^{\frac{p}{r}} g(y)^{\frac{q}{r}} f(x-y)^{1-\frac{p}{r}} g(y)^{1-\frac{q}{r}} dy \right)^r dx \\
\leq & \int_{\mathbf{R}^N} f^p \star g^q(x) \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)^p dy \right)^{r\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \left(\int_{\mathbf{R}^N} g(y)^q dy \right)^{r\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} dx \\
= & \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbf{R}^N} f^p \star g^q(x) dx\,.
\end{aligned}$$

Ensuite, on applique le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} f^p \star g^q(x)dx &= \iint_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} f(x-y)^p g(y)^q dxdy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} g(y)^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)^p dx\right) dy \\ &= \|f^p\|_1 \int_{\mathbf{R}^N} g(y)^q dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q\,.\end{aligned}$$

En regroupant les deux formules ci-dessus, on aboutit à

$$\|f\star g\|_r^r \le \|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}\|f\|_p^p\|g\|_q^q = \|f\|_p^r\|g\|_q^r\,,$$

qui est précisément le résultat annoncé. ∎

Nous allons définir le produit de convolution $f\star g$ pour f et $g\in L^1(\mathbf{R}^N)$. Par densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$, il existe une suite (f_n) de $C_c(X)$ tq. $f_n\to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n\to\infty$. La même formule que ci-dessus permet de définir $f_n\star g(x)$ pour tout $x\in\mathbf{R}^N$; on vérifie par convergence dominée que $f_n\star g$ est continue sur $\mathbf{R}^N$.

Puis, en appliquant le théorème de Tonelli comme dans la preuve de l'inégalité de Young (avec ici $p=q=1$), on trouve que pour tout $n\ge 0$

$$\|f_n\star g\|_1 \le \|f_n\|_1\|g\|_1\,.$$

Le seul point un peu délicat est la question de mesurabilité : pour tout $n\ge 0$, la fonction $(x,y)\mapsto f_n(x-y)$ est mesurable car continue, et de même la fonction $(x,y)\mapsto g(y)$ (définie pp. en (x,y)) est mesurable puisque $g\in L^1(\mathbf{R}^N)$. Donc la fonction produit

$$(x,y)\mapsto f_n(x-y)g(y)$$

est mesurable sur $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$.

Comme $f_n\to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n\to\infty$, la suite (f_n) est de Cauchy dans $L^1(\mathbf{R}^N)$; comme

$$\|(f_n-f_{n+m})\star g\|_1 \le \|f_n-f_{n+m}\|_1\|g\|_1$$

la suite $(f_n\star g)$ est de Cauchy dans $L^1(\mathbf{R}^N)$: elle converge donc car $L^1(\mathbf{R}^N)$ est complet.

Définition 2.4.2 *Pour $f,g\in L^1(\mathbf{R}^N)$, on définit*

$$f\star g = \lim_{n\to\infty} f_n\star g$$

pour toute suite (f_n) de fonctions continues à supports compacts sur $\mathbf{R}^N$ tq. $f_n\to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n\to\infty$. De plus

$$\|f\star g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1\,.$$

On doit seulement vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (f_n) convergeant vers f dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$. Soit (ϕ_n) une autre suite de fonctions continues à supports compacts sur $\mathbf{R}^N$ tq. $\phi_n \to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$: on a

$$\|(f_n - \phi_n) \star g\|_1 \leq \|f_n - \phi_n\|_1 \|g\|_1 \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Donc $f_n \star g$ et $\phi_n \star g$ convergent vers la même limite pour $n \to \infty$, cqfd.

Enfin, par la même méthode, on montre que, pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et tout $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$, et pourvu que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, on définit ainsi un élément unique de $f \star g \in L^p(\mathbf{R}^N)$

Définition 2.4.3 *Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tq. $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et tout $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$, on pose*

$$f \star g = \lim_{n \to \infty} f_n \star g$$

pour toute suite (f_n) de fonctions continues à supports compacts sur $\mathbf{R}^N$ tq. $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$. De plus

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

L'une des applications les plus importantes de la convolution est l'approximation par des fonctions régulières des éléments de $L^p(\mathbf{R}^N)$.

Commençons par rappeler la construction d'approximation de l'identité.

On choisit d'abord une fonction ϕ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ et à support compact. Voici comment on en construit une : considérons la fonction

$$\Phi : r \mapsto \exp\left(\frac{1}{r-1}\right) \text{ pour } r < 1\,, \quad \text{et } r \mapsto 0 \text{ pour } r \geq 1\,.$$

C'est un exercice classique que de vérifier que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et que $\operatorname{supp} \Phi =]-\infty, 1]$.

La fonction $\phi : x \mapsto \Phi(\|x\|_2^2)$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ comme composée de Φ et de la fonction $x \mapsto \|x\|_2^2$ (où $\|x\|_2$ désigne la norme euclidienne canonique de $x \in \mathbf{R}^N$). Son support est l'image réciproque du support de Φ par l'application $x \mapsto \|x\|_2^2$, c'est à dire que

$$\operatorname{supp} \phi = \overline{B}_2(0, 1)\,,$$

(où $\overline{B}_2(0, 1)$ désigne la boule unité fermée de $\mathbf{R}^N$ muni de la norme euclidienne canonique). Enfin $\phi > 0$ dans la boule ouverte $B_2(0, 1)$: donc

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx > 0\,.$$

On va donc poser

$$\chi(x) = \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx}\,, \text{ et } \chi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ pour } x \in \mathbf{R}^N \text{ et } \epsilon > 0\,.$$

Clairement, $\chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ avec

$$\operatorname{supp}\chi_\epsilon = \overline{B}_2(0,\epsilon)\,, \quad \chi_\epsilon \geq 0\,, \quad \int_{\mathbf{R}^N} \chi_\epsilon(x)dx = 1\,.$$

Rappelons ensuite le théorème de dérivation sous le signe somme :

Théorème 2.4.4 (de dérivation sous le signe somme) *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^D$ un ouvert, et $f : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$; supposons que f vérifie les propriétés suivantes :*

a) pour tout $x \in \Omega$, l'application partielle $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbf{R}^N)$;

b) pour presque tout $y \in \mathbf{R}^N$, l'application

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y) \in \mathbf{C}$$

est continue sur Ω ;

c) il existe $G \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que, pour presque tout $y \in \mathbf{R}^N$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right| \leq G(y) \text{ pour tout } x \in \Omega\,.$$

Alors la fonction

$$F : \Omega \ni x \mapsto F(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x,y)dy \in \mathbf{C}$$

admet une dérivée partielle en x_j donnée par la formule

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)dy$$

qui est continue sur Ω.

L'approximation des éléments de $L^p(\mathbf{R}^N)$ par des fonctions régulières s'obtient par convolution de la façon suivante :

Proposition 2.4.5 *Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$f \star \chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } f \star \chi_\epsilon \to f \text{ dans } L^p(\mathbf{R}^N)$$

pour $\epsilon \to 0$.

Commençons par un résultat intermédiaire fondamental.

Lemme 2.4.6 *Pour $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ et $h \in \mathbf{R}^N$, on note $\tau_h f$ la fonction f translatée de h, soit*

$$\tau_h f : x \mapsto (\tau_h f)(x) = f(x-h)\,.$$

Alors, pour tout $1 \leq p < \infty$ et pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\|\tau_h f - f\|_p \to 0 \text{ pour } |h| \to 0\,.$$

Ce résultat est faux pour $p = \infty$: par exemple, si $N = 1$ et $f = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ est la fonction d'Heaviside, alors

$$\|\tau_h f - f\|_\infty = 1 \text{ pour tout } h \neq 0\,.$$

C'est d'ailleurs ce même principe qui permet de voir que L^∞ n'est pas séparable.
Démonstration du lemme. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$; par densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ (cf. théorème 2.2.6), il existe $f_\epsilon \in C_c(\mathbf{R}^N)$ tq.

$$\|f - f_\epsilon\|_p < \epsilon\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_p &\leq \|\tau_h f - \tau_h f_\epsilon\|_p + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p + \|f_\epsilon - f\|_p \\ &= 2\|f_\epsilon - f\|_p + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p \leq 2\epsilon + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p\,.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\varlimsup_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon + \varlimsup_{|h|\to 0} \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p \leq 2\epsilon$$

car, pour tout $\epsilon > 0$, $\tau_h f_\epsilon \to f_\epsilon$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $|h| \to 0$ par convergence dominée. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité ci-dessus, on trouve finalement que $\varlimsup_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, cqfd. ■
Démonstration de la proposition. Vérifions que $\chi_\epsilon \star f \to f$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $\epsilon \to 0$.

En effet :

$$f(x) - f_\epsilon(x) = f(x) - \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\chi_\epsilon(y)dy = \int_{\mathbf{R}^N} (f(x) - f(x-y))\chi_\epsilon(y)dy\,,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|f - f_\epsilon\|_p^p &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f(x-y)|\chi_\epsilon(y)dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f(x-y)|^p \chi_\epsilon(y)dy \right) dx\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe $z \mapsto z^p$.

En appliquant ensuite le théorème de Tonelli, on trouve que

$$\begin{aligned}\|f - f_\epsilon\|_p^p &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f(x-y)|^p dx \right) \chi_\epsilon(y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \|f - \tau_y f\|_p^p \chi_\epsilon(y)dy = \int_{\mathbf{R}^N} \|f - \tau_{\epsilon z} f\|_p^p \chi(z)dz\,.\end{aligned}$$

Or $\|f - \tau_{\epsilon z} f\|_p^p \to 0$ pour tout $z \in \mathbf{R}^N$ lorsque $\epsilon \to 0$; d'autre part $\|f - \tau_{\epsilon z} f\|_p^p \leq 2^p \|f\|_p^p$ pour tout $z \in \mathbf{R}^N$ et $\epsilon > 0$. Par convergence dominée, la dernière intégrale dans le membre de droite tend vers 0 avec ϵ.

Montrons ensuite que f_ϵ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$.

Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme à la fonction

$$(x,y) \mapsto \chi_\epsilon(x-y)f(y)\,.$$

Notons que, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$, et tout $x \in B_2(0,R)$ on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}\chi_\epsilon}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}(x-y)f(y)\right|\\ &\qquad \le \epsilon^{-\alpha_1-\ldots-\alpha_N}\sup_{z\in\mathbf{R}^N}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}\chi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}(z)\right|\mathbf{1}_{|y|\le R+\epsilon}|f(y)|\,.\end{aligned}$$

Le membre de droite de cette inégalité est de la forme

$$C_\epsilon \mathbf{1}_{|y|\le R+\epsilon}|f(y)|\,.$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N}\mathbf{1}_{|y|\le R+\epsilon}|f(y)|dy \le |B_2(0,R+\epsilon)|^{1/p'}\|f\|_p\,.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on montre par récurrence que $\chi_\epsilon \star f$ admet des dérivées partielles continues de tous ordres sur $\mathbf{R}^N$, cqfd. ■

Une conséquence très facile de la proposition précédente est la densité dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact.

Théorème 2.4.7 *Soit $p \in [1,\infty[$. Alors $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$.*

Evidemment, le résultat est faux pour $p = \infty$, puisque $C_c(\mathbf{R}^N)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Soit $\eta > 0$ arbitraire ; pour $n \in \mathbf{N}^*$ assez grand,

$$\|f - f\mathbf{1}_{B(0,n)}\|_p < \eta\,.$$

En effet,

$$f(x) - f(x)\mathbf{1}_{B(0,n)}(x) \to 0 \text{ pp. en } x \text{ pour } n \to \infty\,,$$

tandis que

$$|f(x) - f(x)\mathbf{1}_{B(0,n)}(x)|^p \le |f(x)|^p \text{ avec } |f|^p \in L^1(\mathbf{R}^N)$$

de sorte que, par convergence dominée,

$$\|f - f\mathbf{1}_{B(0,n)}\|_p \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Puis, pour n ainsi choisi,

$$\|f_n - f_n \star \chi_\epsilon\|_p < \eta$$

pour $\epsilon > 0$ assez petit, grâce à la proposition précédente.

Par conséquent, pour tout $\eta > 0$, on a ainsi construit $f_n \star \chi_\epsilon$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ et tq.

$$\|f - f_n \star \chi_\epsilon\|_p < 2\eta\,.$$

On conclut en vérifiant que $f_n \star \chi_\epsilon$ est à support dans $\overline{B(0, n+\epsilon)}$ qui est compacte, ce qui découle de la majoration du support d'un produit de convolution donnée au début de cette section, cqfd. ■