Cours 4

Plongements projectifs des tores complexes

Références :

[D] : O. Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours spécialisés SMF, 1999.

[M] : D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1974. (Chapitre 1)

Soit L un fibré en droites sur le tore complexe $X = V/\Lambda$. On a vu au cours précédent que $c_1(L)$ correspond à une forme altérée E entière sur $\Lambda \times \Lambda$, tq $E(ix, iy) = E(x,y)$ $\forall x,y \in V$. Faisons l'hypothèse additionnelle que $E(x, ix) > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$. On dit alors que E (ou plutôt son $\mathbb{R}$-linéarisée) est une forme de Kähler entière. Quand existe-t-il sur Λ une telle forme ? La question a été clarifiée par Riemann.

<u>Lemme</u> : Soit E une forme bilinéaire alternée non dégénérée entière sur un réseau Λ. Il existe des entiers $d_1, \dots, d_g > 0$, $d_1 | d_2 | \dots | d_g$ et une base $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$ de Λ dans laquelle la matrice de E est

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_g).$$

On note $\mathrm{pf}(E) := \sqrt{\det E} = d_1 \cdots d_g$ le pfaffien de E.

Dém : Admis (références, ou exercice). ∎

Soit E forme de Kähler entière sur Λ, s'il en existe. Soit $W \subseteq V$ le $\mathbb{R}$-ev engendré par une base $(\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ comme dans le lemme. Sur W, E est nulle, donc si $x \in W \setminus \{0\}$, comme $E(x, ix) > 0$, $ix \notin W$. Donc $V = W \oplus iW$, i.e. $(\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ est une $\mathbb{C}$-base de V.

__Théorème (conditions de Riemann) :__ Pour qu'il existe une forme de Kähler entière sur Λ, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ du $\mathbb{C}$-ev V, $d_1, \dots, d_g$ entiers > 0, $d_1 | \dots | d_g$ et Ω matrice symétrique de taille g avec $\operatorname{Im} H$ définie > 0, tels que dans la base $\mathcal{B}$,

$$\Lambda = \Omega \mathbb{Z}^g \oplus \Delta \mathbb{Z}^g$$

$(\Delta = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_g))$.

Dém : Avec les notations du lemme, posons

$$e_j = \lambda_j / d_j \quad , \; j = 1 \dots g.$$

Par la remarque précédente, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_g)$ est une $\mathbb{C}$-base de V. Soit $(\Delta\ \Omega)$ la matrice de $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$ dans cette base. La matrice de E dans la base réelle $(e_1, \dots, e_{2g})$ de V est

$$\begin{pmatrix} \Delta & \mathrm{Re}\,\Omega \\ 0 & \mathrm{Im}\,\Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & \mathrm{Re}\,\Omega \\ & \mathrm{Im}\,\Omega \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Im}(\Omega)^{-1} \\ -{}^t\mathrm{Im}(\Omega)^{-1} & {}^t\mathrm{Im}(\Omega)^{-1}(\mathrm{Re}\,\Omega - {}^t\mathrm{Re}\,\Omega)\,\mathrm{Im}(\Omega)^{-1} \end{pmatrix}$$

La condition $E(ix, iy) = E(x, y)\ \forall x, y$ donne
$${}^t\mathrm{Im}(\Omega)^{-1}(\mathrm{Re}\,\Omega - {}^t\mathrm{Re}\,\Omega)\,\mathrm{Im}(\Omega)^{-1} = 0$$
et
$${}^t\mathrm{Im}(\Omega)^{-1} = \mathrm{Im}(\Omega)^{-1}.$$
donc $\mathrm{Re}(\Omega)$, $\mathrm{Im}(\Omega)$ symétriques. La matrice de la forme hermitienne associée à E dans $\mathcal{B}$ est donc $\mathrm{Im}(\Omega)^{-1}$, qui est définie positive.
La réciproque se fait en remontant le raisonnement à l'envers. ∎

La question qui va nous occuper dans le cours d'aujourd'hui est celle de savoir quand un tore complexe peut se plonger dans un espace projectif.

Rappelons d'abord le fait général suivant :

X variété complexe, $f : X \to \mathbb{P}W$. Sur $\mathbb{P}W$, (W : e.v. de dim $< \infty$)

on dispose d'un fibré en droites

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1)$ défini comme dual de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1)$, lui-même défini comme suit : la fibre de $p : \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1) \to \mathbb{P}W$ au-dessus de $x \in \mathbb{P}W$ est la droite l_x de W représentée par x. Plus rigoureusement,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1) = \{ (x, w) \in \mathbb{P}W \times W,\ w \in l_x \}$$

avec la première projection. Au-dessus de l'ouvert standard U_α, donné par $x_\alpha \neq 0$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(-1)$ est défini par les équations $x_\alpha w_\beta = w_\alpha x_\beta \quad \forall \beta \neq \alpha$. C'est donc une variété complexe. L'isomorphisme ψ_α est donné par $\psi_\alpha(x, w) = (x, w_\alpha)$

et $g_{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta^{-1}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Notons alors $L = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1)$. On a :

$$\Gamma(f^*) : W^* = \Gamma(\mathbb{P}W, \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1)) \longrightarrow \Gamma(X, L)$$

Une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1)$ s'annule sur un hyperplan.

Donc son image par $\Gamma(f^*)$ est nulle ssi $f(X)$ est contenu dans cet hyperplan. En particulier, $\Gamma(f^*)$ est injective ssi $f(X)$ n'est contenu dans aucun hyperplan.

"système linéaire"

Réciproquement : L fibré en droites sur X, $V \subseteq \Gamma(X, L)$ $\mathbb{C}$-ev de dim $< \infty$

On définit $\varphi_L : X \to \mathbb{P} V^*$ en associant à $x \in X$ l'hyperplan des éléments de V qui s'annulent en x. Cette application n'est pas bien définie si toutes les éléments de V s'annulent en x. On dit que V est sans point base si cet ensemble est vide.

En conclusion : applications holomorphes de X vers un espace projectif dont l'image n'est contenue dans aucun hyperplan $\leftrightarrow$ systèmes linéaires sur X sans point base.

"fibré avec beaucoup de sections".

Quand un morphisme $f : X \to \mathbb{P}W$ définit-il un

compacte

plongement ? Par le théorème d'immersion locale, il faut et suffit pour cela que f soit injective et son application tangente injective en tout point. Supposons que $X = V/\Lambda$ est un tore complexe et que f vient de

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{f}} & W\setminus\{0\} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}W \end{array} \qquad \tilde{f} \text{ holomorphe}$$

Fixons $W \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ et écrivons $\tilde{f} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n)$.
L'application tangente à p en $y \in W\setminus\{0\}$ a pour noyau $\mathbb{C}y$, donc le noyau de $d(p\circ\tilde{f})_z$ est $d\tilde{f}_z^{-1}(\mathbb{C}\tilde{f}(z))$.
Pour que f soit un plongement, il faut et suffit donc que

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \tilde{f}_0(z) & \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial z_g}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_n(z) & \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z_g}(z) \end{pmatrix} = g+1 \quad \forall z \in V.$$

et que f soit injective.

Pour fabriquer des plongements projectifs de tores complexes, il faut donc calculer les sections globales de leurs fibrés en droites.

<u>Théorème (Riemann-Roch)</u>: Soit $X = V/\Lambda$ tore complexe, L fibré en droites sur X tel que $c_1(L)$ est une forme de Kähler entière. Alors

$$\dim H^0(X, L) = pf(c_1(L)) > 0.$$

Dém : Par le théorème d'Appell-Humbert, on peut supposer $L = L(H, \alpha)$. Il faut donc calculer la dimension de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes θ sur V telles que :

$$\theta(z+\lambda) = \alpha(\lambda)\, e^{\pi H(\lambda, z) + \frac{\pi}{2} H(\lambda,\lambda)}\, \theta(z)$$

$\forall z \in V$, $\lambda \in \Lambda$, avec $H = \operatorname{Im} c_1(L)$. On le vérifie sur une base $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$ de Λ choisie de sorte que $(\lambda_{g+1}, \dots \lambda_{2g}, \lambda_1, \dots, \lambda_g)$ donne la décomposition en somme directe du théorème de Riemann.

Renormalisons : $\tilde{\theta}(z) = e^{-\frac{\pi}{2} B(z,z) - 2i\pi l(z)}\, \theta(z)$

où $B : V \times V \to \mathbb{C}$ est la forme bilinéaire symétrique obtenue comme $\mathbb{C}$-linéarisation de $H_{|W \times W} \to \mathbb{R}$

(H est réelle puisque E est nulle sur W × W), sur W×W
et $\alpha(\lambda) = e^{2i\pi\, l(\lambda)}$ $\forall \lambda \in \Lambda'$, sous-groupe de Λ engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ (α y est un caractère, donc l est une forme linéaire). Un calcul montre que $\tilde{\theta}$ est Λ'-périodique, donc on peut le développer en série de Fourier:

$$\tilde{\theta}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} c_m \exp\left(2i\pi \sum m_k z_k\right).$$

Les formules pour $\tilde{\theta}(z + \gamma_{g+j})$, $j = 1, \dots, g$, donnent par unicité du développement de Fourier les relations :

$$c_m \exp\left(2i\pi \sum \frac{m_k}{d_k} \Omega_{kj}\right) = b_j\, c_{m + d_j \varepsilon_j} \qquad \forall j = 1, \dots, g,$$

avec b_j constante $\neq 0$ et $\varepsilon_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$.

Donc les c_m sont déterminés par les c_m avec $0 \leq m_j < d_j$ $\forall j$ et donc

$$\dim H^0(X, L) \leqslant pf(c_1(L)) = d_1 \cdots d_g.$$

Réciproquement, on vérifie qu'un choix quelconque des $c_m \in \mathbb{C}$ avec $0 \leq m_j < d_j$ donne en définissant les autres c_m par récurrence via les relations ci-dessus une série de Fourier convergente, puisque $\operatorname{Im} \Omega$ est définie >0. ∎

Pour $a \in X$, notons $\tau_a : x \mapsto x+a$ la translation par a sur X.

<u>Théorème du carré</u> : Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe, L un fibré en droites sur X. Pour tous $a, b \in X$,

$$\tau_{a+b}^* L \otimes L = \tau_a^* L \otimes \tau_b^* L.$$

<u>Dém</u> : Par Appell-Humbert, on peut supposer $L = L(H,\alpha)$. Rappelons que celui-ci est le quotient de $V \times \mathbb{C}$ par

$$\lambda \cdot (z,t) = \left(z+\lambda, \alpha(\lambda) e^{\pi H(\lambda,z) + \frac{\pi}{2} H(\lambda,\lambda)} t\right)$$

Donc $\tau_a^* L(H,\alpha)$ est le quotient de $V \times \mathbb{C}$ par

$$\lambda \cdot (z,t) = \left(z+\lambda, \alpha(\lambda) e^{\pi H(\lambda, z+a) + \frac{\pi}{2} H(\lambda,\lambda)} t\right)$$

On peut toujours traiter un multiplicateur définissant un fibré par $f(z+\lambda)/f(z)$, $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}^\times)$ sans changer le fibré associé. Posons $f(z) = e^{-\pi H(a,z)}$.

Alors le multiplicateur devient :

$$\alpha(\lambda) e^{\pi H(\lambda, z+a) - \pi H(a,\lambda) + \frac{\pi}{2} H(\lambda,\lambda)}$$
$$= \alpha(\lambda) e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\lambda, a)} e^{\pi H(\lambda, z) + \frac{\pi}{2} H(\lambda,\lambda)}$$

Donc $\tau_a^* L(H,\alpha) \simeq L(H, \alpha e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot, a)})$.

Le résultat s'en déduit. ∎

On déduit du théorème du carré que si θ est une fonction thêta pour L, $a_1, \dots, a_r$ des points de V de somme nulle, alors

$$z \mapsto \theta(z+a_1) \cdots \theta(z+a_r)$$

est une fonction θ pour $L^r := L^{\otimes r}$.

<u>Théorème (Lefschetz)</u> : Soit $X = V/\Lambda$ tore complexe, L fibré en droites sur X.

1) Si L a une section non identiquement nulle,

$\Psi_{L^r} : X \to \mathbb{P}\Gamma(X, L^r)^*$ définit une application holomorphe, pour tout $r \geq 2$.

2) Si $c_1(L)$ est une forme de Kähler entière, φ_{L^r} définit un plongement de X dans un espace projectif, pour tout $r \geq 3$.

Dém : Soit θ une fonction thêta correspondant à une section non nulle de L. Si $r \geq 2$, il existe pour tout $z_0 \in V$ un point $a \in V$ tel que

$$\theta(z_0 - a)\,\theta(z_0 + (r-1)a) \neq 0.$$

La fonction : $z \mapsto \theta(z-a)^{r-1}\theta(z+(r-1)a)$ est par la remarque avant le théorème une section de L^r non nulle en z_0. Ceci démontre 1).

Supposons que $c_1(L)$ soit une forme de Kähler entière. Alors, par le théorème de Riemann-Roch, L a une section non nulle. On note θ la fonction theta correspondante. Soit $(\theta_0, \dots, \theta_n)$ base de $H^0(X, L^r)$. Soit $z_0 \in V$. Supposons qu'il existe $\mu_0, \dots, \mu_g \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mu_0 \theta_j(z_0) + \sum_{k=1}^{g} \mu_k \frac{\partial \theta_j}{\partial z_k}(z_0) = 0$$

$\forall j = 0, \dots, n$. Par le théorème du carré,

$$\theta_{ab} : z \mapsto \theta(z-a)^{r-2}\,\theta(z-b)\,\theta(z+(r-2)a+b)$$

correspond à une section de L^r, $\forall a, b \in V$. Donc c'est une combinaison linéaire de $\theta_0, \dots, \theta_n$, donc

$$\mu_0 \theta_{ab}(z_0) + \sum_{k=1}^{g} \mu_k \frac{\partial \theta_{ab}}{\partial z_k}(z_0) = 0$$

L'expression $-\sum \mu_k \frac{\partial \log \theta}{\partial z_k}(z)$ définit une fonction méromorphe φ sur V telle que

$$(r-2)\varphi(z_0-a) + \varphi(z_0-b) + \varphi(z_0+(r-2)a+b) = \lambda_0.$$

(diviser la relation linéaire ci-dessus pour θ_{ab} par θ_{ab}, et revenir à la définition de celle-ci).

Pour tout $a_0 \in V$, il existe b tel que $\theta(z_0-b) \neq 0$, $\theta(z_0+(r-2)a_0+b) \neq 0$ donc $a \mapsto \varphi(z_0-b)$ et $a \mapsto \varphi(z_0+(r-2)a+b)$ sont holomorphes au voisinage de a_0. Si $r \geq 3$, cela entraîne par la formule

ci-dessus que $a_0 \mapsto \varphi(z_0 - a_0)$ est holomorphe.
Comme a_0 était arbitraire, φ est holomorphe.
Or on a l'équation fonctionnelle :

$$\varphi(z+\lambda) = \pi H(\lambda, \mu) + \varphi(z)$$

$\forall z \in V$, $\lambda \in \Lambda$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_g)$. Donc les dérivées partielles de φ sont Λ-périodiques, donc constantes, donc φ est affine. Pour tout λ dans Λ, $\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \pi H(\lambda, \mu)$.
Comme les deux membres sont $\mathbb{R}$-linéaires, on a

$$\varphi(z) - \varphi(0) = \pi H(z, \mu) \quad \forall z \in V.$$

Or le membre de gauche est $\mathbb{C}$-linéaire, celui de droite $\mathbb{C}$-antilinéaire. Donc $H(z, \mu) = 0$ pour tout $z \in V$. Comme $c_1(L)$, donc H, est non dégénérée, $\mu = 0$, donc $\mu_j = 0$. Donc la matrice

$$\begin{pmatrix} \theta_0(z) & \frac{\partial \theta_0}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial \theta_0}{\partial z_g}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_n(z) & \frac{\partial \theta_n}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial z_g}(z) \end{pmatrix}$$

est de rang $g+1$. Comme expliqué plus haut, cela montre que la différentielle du morphisme $X \to \mathbb{P}\Gamma(X,L)^*$ est injective en tout point.

Enfin, il reste à justifier l'injectivité de ce morphisme. Nous l'admettons : cf [M], p. 30-32. ∎

<u>Ex</u> : $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathcal{H}$, tore complexe de dimension 1. Posons :

$$H(z,z') = \frac{1}{\mathrm{Im}(\tau)}\,\bar{z}\,z'.$$

Alors H est une forme hermitienne définie positive et si $E = \mathrm{Im}\,H$, $E(1,1) = E(\tau,\tau) = 0$, $E(1,\tau) = -E(\tau,1) = 1$, donc on a une forme de Kähler entière, et donc la projectivité.