Cours 5

Variétés abéliennes, polarisations, dualité, endomorphismes

Références :

[D] : O. Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours spécialisés SMF, 1999.

[M] : D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1974. (Chapitre 1)

X tore complexe. Nous avons vu que le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$, noyau de c_1 sur $\mathrm{Pic}(X)$ a une structure de tore complexe. Ce tore complexe de même dimension que X est appelé dual de X et noté $\hat{X}$.

Def: Une isogénie est un morphisme surjectif à noyau fini entre tores complexes. Son degré est le cardinal de son noyau. Deux tores complexes liés par une isogénie sont dits isogènes.

Soit $u : X \to Y$ une isogénie. Comme son noyau est un groupe abélien fini, il existe un entier n tel que

$$n . \ker(u) = 0 .$$

Soit $[n]_X$ le morphisme de multiplication par n sur X. On a donc $\ker(u) \subseteq \ker([n]_X)$, et donc il existe une factorisation :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "{[n]_X}"'] & Y \arrow[r, "v"] & X \end{tikzcd}$$

i.e. $v \circ u = [n]_X$.

De plus, $u \circ v \circ u = u \circ [n]_X = [n]_Y \circ u$ et donc $u \circ v = [n]_Y$, car u est surjective. Donc v est aussi une isogénie et la relation "être isogène" est une relation d'équivalence.

<u>Théorème</u> : X tore complexe, L fibré en droites sur X. Le morphisme :

$$\varphi_L : X \to \hat{X}, \quad x \mapsto \tau_x^* L \otimes L^{-1}$$

est un morphisme de groupes ne dépendant que de $c_1(L)$. Son noyau est une réunion disjointe $K(L)$ de sous-tores de X de même dimension que $\ker(c_1(L))$. Si $c_1(L)$ est non dégénérée (on dira alors que L est non dégénéré), φ_L est une isogénie de degré $\mathrm{pf}(c_1(L))^2$.

<u>Démon</u> : On note $E = c_1(L)$. Si $x \in X$, on note $\tilde{x}$ un relèvement quelconque de x le long de $\pi : V \to X$ (on a écrit $X = V/\Lambda$). Par le calcul du cours précédent, $\varphi_L(x)$ est la classe de $L(0, e^{2i\pi E(\cdot, \tilde{x})})$. Donc φ_L est bien défini et ne dépend que de $c_1(L)$. Par le théorème du carré, c'est un morphisme de groupes.

Enfin, $K(L) = \{x \in X, E(\lambda, \tilde{x}) \in \mathbb{Z}\ \forall \lambda \in \Lambda\}$

Donc $K(L) = \bigcup_{\text{finie}}$ translatés de $\mathrm{Im}(\ker(E) \to X)$.

Lorsque L est non dégénéré, on a vu au cours précédent qu'il existe une base de Λ dans laquelle E a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$. Donc $K(L)$ est l'image par π du sous-groupe engendré par $\frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \frac{\lambda_g}{d_g}$, $\frac{\lambda_{g+1}}{d_1}, \dots, \frac{\lambda_{2g}}{d_g}$. Il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/d_g)^2$, de cardinal $\mathrm{pf}(c_1(L))^2$. ∎

Si $f : X \to Y$ est un morphisme entre tores complexes, on définit $\hat{f} : \hat{Y} \to \hat{X}$, $L \mapsto f^*L$. Si $\tilde{f} : V \to W$ est l'application $\mathbb{C}$-linéaire induisant f, $\hat{f}$ correspond à sa transposée ${}^t\tilde{f} : \bar{W}^* \to \bar{V}^*$. En particulier, $\hat{f}$ est aussi un morphisme de tores complexes. On vérifie aisément que $\hat{f}$ est une isogénie ssi f l'est, de même degré, et que $\dim \ker(\hat{f}) = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im} f$, $\dim(\mathrm{Im} \hat{f}) = \mathrm{codim} \ker(f)$.

Déf : On appelle *polarisation* sur un tore complexe $X = V/\Lambda$ une forme de Kähler entière pour Λ. On appelle *variété abélienne* (complexe) un tore complexe sur lequel existe une polarisation. Si celle-ci est fixée, on parle de *variété abélienne polarisée*.

Par le théorème de Lefschetz, toute variété abélienne admet un plongement holomorphe dans un espace projectif.

Or on dispose du résultat remarquable suivant, déjà mentionné précédemment.

Théorème (Chow) : Toute sous-variété analytique complexe fermée de $\mathbb{P}^n$ est algébrique.

Autrement dit, une telle sous-variété, bien qu'a priori seulement définie par des équations holomorphes, est découpée par des équations polynomiales homogènes !

De plus toute application holomorphe d'une variété algébrique projective vers une variété algébrique projective est automatiquement algébrique (appliquer le théorème de Chow au graphe de f).

Ceci a la conséquence qu'une variété abélienne complexe est la même chose qu'un objet en groupes dans la catégorie des variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ qui est projectif.

Par définition, une polarisation sur X est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée E sur V, entière sur Λ, vérifiant $E(ix, iy) = E(x,y)$ $\forall x,y \in V$, $E(x, ix) > 0$ $\forall x \in V \setminus \{0\}$.

De façon équivalente : polarisation $\Leftrightarrow$ première classe de Chern d'un fibré en droites ample sur X $\Leftrightarrow$ fibré en droites ample sur X à translation près (équivalence : corollaire du théorème ci-dessus).

Théorème (réductibilité de Poincaré) : Soit X une variété abélienne, Y une sous-variété abélienne. Il existe une sous-variété abélienne Z de X telle que $Y \cap Z$ est fini et $Y + Z = X$. Autrement dit, l'application somme : $Y \times Z \to X$ est une isogénie.

Dém : L fibré en droites ample sur X, $\varphi_L : X \to \hat{X}$ isogénie associée. Notons $i : Y \to X$ l'inclusion, $\hat{i}$ son dual. Notons $Z = \varphi_L^{-1}(\mathrm{Ker}(\hat{i}))^0$ sous-tore de X. La composée $\hat{i} \circ \varphi_L$ est

composante connexe de 0

nulle sur Z. Sa restriction à Y est φ_{i^*L} et c'est une isogénie car i^*L est ample sur Y. Donc $Y \cap Z \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_{i^*L})$ fini. Donc l'application somme $Y \times Z \to X$ est de noyau fini et c'est une isogénie puisque $\dim Z = \dim \mathrm{Ker}\,\hat{i} = \dim X - \dim Y$. ∎

Corollaire : Toute variété abélienne est isogène à un produit de variétés abéliennes simples (sans autre sous-tore que $\{0\}$ et lui-même).

Pour X variété abélienne, notons $\mathrm{End}(X)$ l'anneau des endomorphismes de X. C'est l'anneau des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de V envoyant Λ dans lui-même, si $X = V/\Lambda$. Donc c'est un sous-anneau de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\Lambda)$ = groupe abélien libre de rang $4g^2$. Donc $\mathrm{End}(X)$ est un groupe abélien libre de rang au plus $4g^2$. En particulier, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre de dim $\leq 4g^2$, qui de plus ne dépend que de la classe d'isogénie de X.

On déduit du corollaire que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ est le produit (fini) d'algèbres de matrices sur des algèbres à division.

<u>Rq</u> : Une analogie vague mais éclairante : on peut penser à la catégorie des variétés abéliennes (à isogénie près)

comme à une sous-catégorie de la catégorie des représentations d'un groupe G, sous-catégorie qui ne serait toutefois pas stable par $\otimes$. Dans cette analogie,

var. ab. duale	$\longleftrightarrow$	représentation duale
polarisation	$\longleftrightarrow$	forme hermitienne déf. >0 G-invariante
isogénie $\varphi_L : X \to \hat{X}$	$\longleftrightarrow$	identification $V \simeq \bar{V}^*$ induite par la forme hermitienne
th de réductibilité de Poincaré	$\longleftrightarrow$	complète réductibilité