Inégalités de martingales

Th (Inégalité maximale) (X_n) sous-martingale, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Alors $$a\, \mathbb{P}(\sup_{k \leq n} X_k) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\sup_{k \leq n} X_k \geqslant a\}})$$

[Inégalité de Markov : $a\, \mathbb{P}(X \geqslant a) \leq \mathbb{E}(X^+)$]

Lemme : (X_n) sous-martingale, S, T temps d'arrêt bornés, $S \leq T$, alors $\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T)$

dém : (H_n) processus défini par $$H_n = \mathbb{1}_{\{S < n \leq T\}} = \underbrace{\mathbb{1}_{\{S \leq n-1\}} - \mathbb{1}_{\{T \leq n-1\}}}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable}}$$

(H_n) prévisible

S, T bornés : $\exists N$, $S \leq T \leq N$ p.s.

$(H.X)$ sous-martingale $\quad \mathbb{E}(H.X)_N \geqslant \mathbb{E}(H.X)_0 = 0$

$$(H.X)_N = X_T - X_S$$
$$\mathbb{E}(H.X)_N = \mathbb{E}(X_T) - \mathbb{E}(X_S) \geqslant 0$$

dém de l'inégalité maximale : $T = \{\inf n,\ X_n \geqslant a\}$

$$A = \{\sup_{k \leq n} X_k \geqslant a\} = \{T \leq n\}$$

on applique le lemme aux deux temps d'arrêt $T \wedge n$ et n

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \leq \mathbb{E}(X_n)$$

$$X_{T \wedge n} \geqslant X_n \mathbb{1}_{A^c} + a \mathbb{1}_A$$
$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A^c}) + a\, \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}(X_n)$$

$$a\,\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}(X_n 1_A) = \mathbb{E}(X_n 1_{\sup_{k\leq n} X_k \geq a})$$

<u>Prop</u> : (i) $p > 1$ X_n sous martingale positive

En posant $\tilde{X}_n = \sup_{k\leq n} X_k$, on a $\forall n \geq 0$

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(X_n^p)$$

(ii) Si Y_n martingale L^p, $Y_n^* = \sup_{k\leq n} |Y_k|$ alors $\forall n \geq 0$

$$\mathbb{E}(Y_n^{*p}) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \mathbb{E}(|Y_n|^p)$$

<u>dém</u> (i) Inégalité de Jensen ($x \mapsto x^p$ convexe)

$$\mathbb{E}(X_k^p) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k)^p) \leq \mathbb{E}(X_n^p)$$

$$a^{p-2}\, a\,.\,\mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a) \leq \mathbb{E}(X_n 1_{(\tilde{X}_n \geq a)})\, a^{p-2}$$

$$\int_0^\infty a^{p-1}\,\mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a)\,da = \mathbb{E}\left(\int_0^{\tilde{X}_n} a^{p-1}\,da\right) = \frac{1}{p}\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)$$

$$\int_0^\infty a^{p-2}\,\mathbb{E}(X_n 1_{\tilde{X}_n \geq a}) = \mathbb{E}\left(X_n \int_0^{\tilde{X}_n} a^{p-2}\,da\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(X_n \frac{\tilde{X}_n^{p-1}}{p-1}\right)$$

Hölder $\mathbb{E}\left(X_n \frac{\tilde{X}_n^{p-1}}{p-1}\right) \leq \frac{1}{p-1}\left(\mathbb{E}(X_n^p)\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)\right)^{\frac{p-1}{p}}$

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \leq \frac{1}{p-1}\left(\mathbb{E}(X_n^p)\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

(ii) même démonstration

<u>Th</u> : on pose $X^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|$

soit (X_n) martingale bornée dans L^p pour un certain $p > 1$:

$\forall n$, $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ et $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$

Alors (i) X_n converge p.s vers X_∞, et $\mathbb{E}(|X_\infty|^p) = \sup \mathbb{E}|X_n|^p$

(ii) $\mathbb{E}(X^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_\infty|^p)$

<u>dém</u> : (i) (X_n) bornée dans $L^p \Rightarrow$ bornée dans $L^1 \Rightarrow$ CV p.s.

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_n^{\,p}) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_n|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \sup_{k\leq n} \mathbb{E}(|X_k|^p)$$

$n\to\infty$ $\quad \mathbb{E}(X^{*p}) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n (\mathbb{E}|X_n|^p)$

Donc X^* est dans L^p et les $|X_n|^p$ sont dominés X^{*p}

par cv dominée, $X_n^p \to X_\infty^p$ dans $L^1 \Leftrightarrow X_n \to X_\infty$ dans L^p

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \sup \mathbb{E}(|X_n|^p)$$

$[|X_n|^p$ sous-martingale $\Rightarrow \mathbb{E}|X_n|^p \nearrow]$

<u>Remarque</u> : retour au cas des martingales bornées dans L^2 (X_n martingale)

Même sans utiliser la convergence p.s, on a l'inégalité maximale

$$\mathbb{E}\left(\sup_n X_n^2\right) \leq 4 \sup_n \mathbb{E}(X_n^2)$$

$$\to \mathbb{P}(X^* \geq a)\, a^2 \leq 4 \sup_n \mathbb{E}(X_n^2)$$

On va démontrer que p.s, (X_n) est une suite de Cauchy

$\forall m$, $(X_{n+m} - X_n)$ martingale

(X_n) bornée dans L^2, $\forall \varepsilon$, $\exists N$ $\forall n \geq N$, $\forall m \geq 0$

$$\mathbb{E}[A_n^2 + A_{n+1}^2 \cdots + A_{n+m}^2] = \mathbb{E}(X_{n+m} - X_n)^2 < \varepsilon$$

$[A_n = X_{n+1} - X_n$, les A_n sont orthogonaux et $\sum A_n^2 < \infty]$

$\forall k$, $\exists n_k$ $\quad \sum_{n=n_k}^{\infty} \mathbb{E} A_n^2 < \frac{1}{8^k}$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\sup_{n\geq n_k} X_n - X_{n_k} \geq 2^{-k}}_{E_k}) \leq \frac{\sum_{n=n_k}^{\infty} \mathbb{E}(A_n^2)}{4^{-k}} \leq 2^{-k}$$

[Borel-Cantelli] $\sum \mathbb{P}(E_k) < \infty$ donc p.s il existe N, $\forall k \geq N$
E_k n'est pas réalisé $\to$ suite de Cauchy.

Uniforme intégrabilité (u.i.)

<u>déf</u> $(X_i)_{i\in I}$ famille de variables aléatoires L^1 est uniformément intégrable si $\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|\geq a} = 0$

<u>remarques</u> : . u.i. $\Rightarrow$ borné dans L^1 : $\exists a$, $\sup_{i\in I} (\mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq a}) \leq 1$

$\forall i$, $\mathbb{E}|X_i| \leq \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>a}) + \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|\leq a}) \leq 1+a$

. I ensemble fini $\Rightarrow$ u.i.

. si $\exists Z \geq 0$, $Z\in L^1$, $\forall i$ $|X_i| \leq Z$, alors X_i u.i.

$\forall i$ $\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq a}) \leq \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{Z\geq a})$

. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, telle que $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ Alors $\forall c>0$
$\{X\in L^1, \mathbb{E}(\phi(|X|)) \leq c\}$ u.i.

cas particulier $\varphi(x) = x^p$ $(p>1)$ $\to$ Les variables aléatoires bornées dans L^p sont u.i : $\forall c>0$, $\{X, \mathbb{E}|X|^p \leq c\}$ est u.i

$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|\geq a}) \leq \mathbb{E}\left(\varphi(|X|) \sup_{x\geq a}\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)\right)$

. contre exemple : X_n v.a. uniforme sur $[n, 2n]$

<u>Prop</u> : $(X_i)_{i\in I}$ v.a. bornées dans L^1. On a l'équivalence :

(i) $(X_i)_{i\in I}$ u.i

(ii) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ $\forall A\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)<\delta$, $\forall i\in I$, $\mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$

<u>dém</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) soit $\varepsilon>0$, $\exists a$, $\sup \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|\geq a}) < \frac{\varepsilon}{2}$

soit $\delta < \frac{\varepsilon}{2a}$, si $\mathbb{P}(A) < \delta$, alors $\forall i$
$\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{A\cap\{|X|>a\}}) + \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|\leq a\}})$
$\leq \frac{\varepsilon}{2} + a\,\mathbb{P}(A) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) variables bornées dans L^1 : $\exists c>0$, $\forall i \in I$, $\mathbb{E}|X_i| < c$

$$\forall a>0 \quad , \forall i \in I \quad \mathbb{P}(|X_i|>a) \leq \frac{\mathbb{E}|X_i|}{a} \leq \frac{c}{a}$$

soit $\varepsilon>0$, on prend δ satisfaisant (ii), soit a tel que $\frac{c}{a}<\delta$

alors $\forall i \in I \quad \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>a}) < \varepsilon$

<u>Corollaire</u> : $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors la famille $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}')_{\mathcal{F}' \text{ sous-tribu de } \mathcal{F}}$

est uniformément intégrable :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \delta, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A)\leq\delta, \quad , \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_A) \leq \varepsilon$$

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')>a\right) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')|) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}))$$
$$= \frac{1}{a}\mathbb{E}|X|$$

si $a > \frac{\mathbb{E}|X|}{\delta}$, $\quad \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}') \mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')|\geq a}\right)$

$$\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}') \mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')|\geq a}\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(|X| \mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')|\geq a}\right) \leq \varepsilon$$

<u>Th</u> : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. L^1. On suppose $X_n \xrightarrow{P} X_\infty$. Alors on a l'équivalence

(i) $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

(ii) (X_n) u.i.

<u>dém</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) (X_n) CV dans L^1 $\Leftrightarrow$ suite de Cauchy dans L^1

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists N, \quad \forall n\geq N, \quad \mathbb{E}|X_n - X_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$(X_0, X_1 \ldots X_N)$ u.i , $\exists \delta>0$, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)<\delta$, $\forall i \leq N$

$$\mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $n \geq N$, $\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_A) \leq \underbrace{\mathbb{E}(|X_N| \mathbb{1}_A)}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\mathbb{E}(|X_n - X_N| \mathbb{1}_A)}_{< \varepsilon/2} \leq \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u.i. $\Rightarrow (X_m - X_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ u.i.

$\varepsilon > 0$, $\exists a$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{E}(|X_m - X_n| \mathbb{1}_{|X_m - X_n| > a}) < \varepsilon$

$$\mathbb{E}|X_m - X_n| \leq \underbrace{\mathbb{E}(|X_m - X_n| \mathbb{1}_{|X_m-X_n| < \varepsilon})}_{} \quad < \varepsilon$$

$$+ \quad \varepsilon < |X_m - X_n| < a$$

$$+ \quad \underbrace{\qquad |X_m - X_n| > a}_{} \quad < \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon + \mathbb{E}|X_m - X_n| \mathbb{1}_{\{\varepsilon < |X_m - X_n| < a\}}$$

$$\leq 2\varepsilon + a\,\mathbb{P}(|X_m - X_n| > \varepsilon) \quad \leq 4\varepsilon$$

CV en proba $\Rightarrow$ $\exists N$, $\forall n \geq N$, $\mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon$

$$\mathbb{P}(|X_m - X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|(X_m - X_\infty) + (X_\infty - X_n)| > \varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(|X_m - \cancel{X_\infty}| < \tfrac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|X_\infty - X_n| > \tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$\leq 2\varepsilon$$

si m et $n \geq N$, $\mathbb{E}|X_m - X_n| \leq 4\varepsilon$

$\to$ (X_n) suite de Cauchy dans L^1 $\Rightarrow$ CV dans L^1

<u>Corollaire</u> : si (X_n) martingale, on a l'équivalence :

(i) (X_n) CV p.s et dans L^1 vers X_∞

(ii) (X_n) U.I.

(iii) (X_n) martingale fermée : $\exists Z$ variable aléatoire L^1, et $(\mathcal{F}_n)$ filtration tq $X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$

<u>rappel</u> : on peut avoir CV p.s et pas dans L^1 : branchement critique

(Z_n) CV vers 0 p.s mais $\forall n$, $\mathbb{E}(Z_n) = 1$